

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

51. Band, Heft 6/10

1. Juli 1954.

S. 241–480

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

Wilder, R. L.: The origin and growth of mathematical concepts. Bull. Amer. math. Soc. 59, 423–448 (1953).

Wiedergabe eines Vortrages. Es wird u. a. dargelegt, daß die großen mathematischen Ideen vorbereitet wurden durch eine sich oft über Generationen erstreckende Vorgeschichte, was es verständlich macht, daß die Ideen mehrfach von verschiedenen Mathematikern gleichzeitig konzipiert wurden. Außerdem wird deutlich gemacht, daß die Entwicklung der Mathematik weitgehend dadurch erfolgt, daß eine mathematische Idee publiziert wird und, falls sie fruchtbar ist, oft von anderen Mathematikern verarbeitet, ev. umgeformt und in ihre endgültige Gestalt gebracht wird, wodurch Zufälligkeiten, die in der Struktur der einzelnen Mathematiker liegen, ausgeglichen werden.

G. Nöbeling.

● Schläfli, Ludwig: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band II. Basel: Verlag Birkhäuser 1953. 381 S. Fr. 56,15.

Der Band beginnt mit einer langen Arbeit über die Resultante von n Formen mit n Variablen, die, obwohl schon 1846 konzipiert und 1852 gedruckt, teilweise recht modern anmutet. An früheren Arbeiten (Hesse und Cayley) wird Kritik geübt. Die Koeffizienten der Formen werden als „lauter einfache und unter sich unabhängige Größen“ angenommen. In einem Brief an Steiner, der in einem Nachwort abgedruckt ist, wird sogar von „litteralen (unbestimmten)“ Koeffizienten gesprochen, also ganz modern. Die Resultante wird als Polynom dieser Koeffizienten definiert, das die Eigenschaft hat, daß es bei Spezialisierung allemal dann verschwindet, wenn die n Formen eine gemeinsame nicht triviale Nullstelle haben. Das ist allerdings zunächst nur eine Forderung, daß es so etwas gibt. Der Existenzbeweis wird dann durch Konstruktion zu führen versucht. Dazu führt Schläfli die Wurzelsysteme von $n-1$ der gegebenen Formen ein; daß es Wurzeln gibt, sucht er sich durch sukzessive Elimination klar zu machen, wobei für diese $n-1$ Formen die Koeffizienten allerdings Zahlen sein müssen, während sie für die n -te Form Unbestimmte bleiben. Auch über die Anzahl der Wurzelsysteme sucht er sich durch ein Rekursionsverfahren Klarheit zu verschaffen. Er entwickelt dann die Theorie der symmetrischen Funktionen dieser Wurzelsysteme und baut aus ihnen die Resultante auf. Daß die so aufgebaute (der obigen Definition würde auch jede höhere Potenz davon entsprechen) Resultante irreduzibel ist, beweist er nicht, sondern „nimmt es als Grundsatz an“. Er kommt so zu den wichtigsten Eigenschaften der Resultante: den Sätzen über Grad und Gewicht, dem Produktsatz und der Formel

$$R(z_1, \dots, z_n) = R(z_1, \dots, z_n)^{\mu^{n-1}} \cdot R(y_1, \dots, y_n)^p,$$

wobei μ der gemeinsame Grad der n Formen $y_\nu(x_1, \dots, x_n)$ ist und p das Produkt der Grade der n Formen $z_\nu(y_1, \dots, y_n)$. Ref. erinnert sich nicht, diese Formel schon sonstwo gesehen zu haben; sie ist aber richtig und im Prinzip auch richtig bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß die Resultante, speziell als Polynom von einer der n Formen, etwa $f_1(x_1, \dots, x_n)$, angesehen, in Linearfaktoren zerfällt, und zwar ist sie gleich $\prod f_1(\xi_1^{(v)}, \dots, \xi_n^{(v)})$, wobei die $\xi_1^{(v)}, \dots, \xi_n^{(v)}$ die gemeinsamen Wurzelsysteme der anderen $n-1$ Formen sind. Insbesondere, wenn man zu $n-1$ Formen noch eine lineare Form mit unbestimmten Koeffizienten hinzunimmt und dann die Resultante bildet, also das, was man heute als u -Resultante bezeichnet, so zerfällt diese in Linearfaktoren, aus denen man sofort die Wurzelsysteme ablesen kann. Damit hat Schläfli wesentliche Resultate der späteren Mertensschen Theorie vorweggenommen, wenn auch der Ausgangspunkt (Existenz und Anzahl der Wurzelsysteme) problematisch bleibt. Die weiteren Abhandlungen des Bandes bewegen sich auf mehreren verschiedenen Gebieten: Algebra, Funktionentheorie, Geometrie, und eine ist auch der Planetenbewegung gewidmet. Vier Arbeiten sind als Vorläufer der großen im ersten Band (1950, siehe dies. Zbl. 35, 219) abgedruckten Monographie über die Theorie der vielfachen Kontinuität anzusehen. Es handelt sich dabei um die Berechnung mehrdimensionaler Körper- und Flächeninhalte; z. B. wird der Körper behandelt, der aus der n -dimensionalen Kugel von n durch den Mittelpunkt gehenden $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen ausgeschnitten wird. Unter den rein geometrischen Arbeiten sei eine über die 27 Geraden

auf einer Fläche dritter Ordnung erwähnt. Die Funktionentheorie ist vertreten durch eine Arbeit über die Koeffizienten des Polynoms mit den Nullstellen $-1, -2, \dots, -(n-1)$; eine Arbeit ist der Berechnung bestimmter Integrale durch komplexe Integration gewidmet und eine beschäftigt sich mit einer auf Laplace zurückgehenden Verallgemeinerung der Lagrangeschen Reihenumkehrformel.
Ö. Perron.

Geschichte.

• Zinner, Ernst: *Sternglaube und Sternforschung*. Freiburg/München: Karl Alber. 1953. XIV, 171 S. 23 Abb. und 16 Tafeln.

Das vorliegende Buch des anerkannten Historikers der Astronomie gibt eine mehr skizzenhafte Darstellung der Ergebnisse der Sternforschung bis in unsere neueste Zeit und der dadurch gewordenen Problematik. Interessante Bilder und Tafeln sowie ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis sind beigelegt.
O. Volk.

Cavallaro, Vincenzo G.: *Divina proportione*. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 203—218 (1953).

Hofmann, Jos. E.: *Über eine altindische Berechnung von π und ihre allgemeine Bedeutung*. Math.-phys. Semesterber. 3, 193—206 (1953).

Verf. berichtet über die Leibniz-Reihe $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ bei indischen Mathematikern des 15. Jahrhunderts. Zur Erzielung numerisch brauchbarer Reihen brechen sie beim n -ten Glied (Partialsumme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$) ab und ersetzen die unendlich vielen folgenden Reihenglieder in drei verschiedenen Verfahren durch ein „Korrektionsglied“, deren einfachstes $T_n = (-1)^n/4n$ ist. Verf. untersucht dann den Weg, auf dem diese Ansätze wohl gefunden wurden, und zeigt, daß das vorliegende Verfahren mit konvergenzverbessernden Transformationen allgemeiner Natur ist, also bei Potenz- und Zahlenreihen — und nicht nur bei der Leibnizschen — anwendbar ist. In dem genannten einfachen Fall ergibt T_n zusammen mit dem letzten Glied der Partialsumme eine unendliche geometrische Reihe. K. Vogel.

Bruins, E. M.: *A contribution to the interpretation of Babylonian mathematics. Triangles with regular sides*. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 412—422 (1953).

In der babylonischen Mathematik versteht man unter „regulären“ Zahlen solche von der Form $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, weil bei einer Division durch sie der Quotient sexagesimal darstellbar ist. Der Verf. untersucht die rechtwinkligen, gleichschenkligen und allgemeinen Dreiecke unter dem Gesichtspunkt der Regularität der Seiten und führt den Nachweis, daß es kein schiefwinkliges nicht gleichschenkliges Dreieck gibt mit regulären Seiten und rationaler Fläche. Tatsächlich enthalten die Texte nur rechtwinklige Dreiecke sowie gleichschenklige mit meist regulären Seiten. — Hat ein allgemeines Dreieck eine rationale Fläche, dann ist mindestens eine Seite nicht regulär. Darin sieht Verf. den Grund, warum die Babylonier keine Ähnlichkeitstheorie entwickelt haben. Es kann dann nämlich das Seitenverhältnis $a:a_1$ zweier ähnlicher Dreiecke nicht auf dem gewöhnlichen Weg (durch Multiplikation mit $1/a_1$) ausgerechnet werden. Dazu darf gesagt werden, daß man sich in solchen Fällen zu helfen wußte („womit muß man a_1 multiplizieren, damit a herauskommt?“) Verf. vermutet, daß man, um Proportionen zu vermeiden, mit Produktgleichungen, also mit Flächenvergleichen operierte. Auf die enge Beziehung zwischen Proportionen und Produktgleichungen und den Vorteil beim Vermeiden von Nennern hatte der Ref. früher schon hingewiesen (dies. Zbl. 14, 243).
K. Vogel.

• Heath, Sir Thomas: *The works of Archimedes. The „Method“ of Archimedes*. Reprint. New York: Dover Co. 1953. CLXXXVI, 326, 51 p. \$ 1,95; cloth \$ 4,95.

Agostini, Amedeo: *Archimede*. Archimede 5, 259—263 (1953).

• Stamatis, Evangelos: *Der Schluß von der vollständigen Induktion bei Euklid*. Athen: Andreas Sideris 1953. 6 S. [Neugriechisch].

Mit Recht betont Verf., daß sich der Schluß von der vollständigen Induktion keineswegs nur in Euklid, Elemente IX, 8 und 9 vorfindet (G. Vacca, 1910), sondern auch an anderen Stellen der Elemente, z. B. beim Existenzbeweis für unendlich viele Primzahlen (IX, 20). Er bemerkt ergänzend, daß Spuren dieses Beweisverfahrens bis zu Aristoteles verfolgt werden können (Analyt. post. 73 B 32).

J. E. Hofmann.

● Millas Vallierosa, José: Das Buch „Nova Geometria“ von Ramon Lull. [Spanisch S. 1—52, Lateinisch S. 53—104]. Asociación para la historia de la Ciencia Española. Barcelona 1953. 105 S.

Verf. ediert den nur lateinisch (Bibl. Prov. Palmas 54, XIV. Jh. und c. l. München 10 544, XV. Jh. und 10 580, XVII. Jh.) erhaltenen Text vom Sommer 1299, der erheblich über die vermutlich vorangehende „Quadratura et triangulatura circuli“ (ed. J. E. Hofmann, 1942, dies. Zbl. 28, 1) hinausgeht. Buch I bezieht sich auf stark astrologisch beeinflusste Figurenteilungen, Buch II gibt Definitionen, Sätze und Fragen, worin mathematische, physikalische und metaphysische Vorstellungen vermengt sind, die graeco-arabischen Einschlag vermuten lassen. Dem Text gehen wertvolle Erläuterungen voran, welche sich auf die Deutung der wichtigsten Einzelheiten des schwierigen Wortlautes und seine Verbindung mit andern Schriften Lulls beziehen.
J. E. Hofmann.

Clagett, Marshall: Medieval mathematics and physics. A check list of microfilm reproductions. Isis 44, 371—381 (1953).

Tenca, Luigi: Sulle vele secondarie di Vincenzo Viviani. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 456—459 (1953).

Galli, M.: Le prove meccaniche della rotazione terrestre secondo Galileo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 328—336 (1953).

Verf. untersucht von neuem die Frage, wie weit Galilei die Abweichung eines frei fallenden Körpers nach Osten als Beweis für die Erddrehung angesehen hat. Er kommt zu dem Ergebnis, daß Galilei den Effekt qualitativ richtig aus dem Relativitätsprinzip der Bewegungen abgeleitet hat, daß er aber weder seine GröÙe angeben noch ihn experimentell beobachten konnte. So erklärt sich sein Schweigen bei der Behandlung der Bewegungen auf der rotierenden Erde und der mehr gelegentliche Hinweis auf das Phänomen anläßlich der Widerlegung der Scheinerschen Falltheorie.
H. I. Hermelink.

Volpe, Galvano della: Galileo e il principio di non-contradizione. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 157—162 (1953).

● Ore, O.: Cardano, the gambling scholar. With a translation from the Latin of Cardano's „Book on games of chance“ by S. H. Gould. Princeton: Princeton University Press 1953. XVI, 249 p. \$ 4,00.

Einleitend gibt Verf. eine auf der Autobiographie und auf besten Zweitdarstellungen fußende sehr lebendige Schilderung von Cardanos reichbewegtem Leben, von der Zwiespältigkeit seines Wesens und seinen wissenschaftlichen Kontroversen. Dann folgt die Übersetzung des „Liber de ludo aleae“ (posthumer Erstdruck 1663) mit Noten des Verf. und vorangehender Übersicht über Inhalt und Bedeutung dieses ersten ernstzunehmenden wissenschaftlichen Versuchs über das Würfelspiel. Das Buch ist vorzüglich ausgestattet.
J. E. Hofmann.

Palamà, Giuseppe: Su di una regola di Fermat per la fattorizzazione dei numeri e su di una sua questione relativa alle parti aliquote. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 414—422 (1953).

Finikov, S. P.: Sergej Sergeevič Bjušgens. (Zum siebenzigsten Geburtstage.) Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 185—192 (1953) [Russisch].
Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

Pleijel, Åke: Nils Erik Fremberg in memoriam. Nordisk mat. Tidskrift 1, 7—9 (1953) [Schwedisch].

Mandelbrojt, S.: The mathematical work of Jacques Hadamard. Amer. math. Monthly 60, 599—604 (1953).

Raševskij, P. K.: Benjamin Fedorovič Kagan. — Nachruf. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 131—138 (1953) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Cramér, Harald: Richard von Mises' work in probability and statistics. *Ann. math. Statistics* 24, 657—662 (1953).

Mit ausgewähltem Schriftenverzeichnis.

Černjaev, M. P., N. M. Nestorovič und N. M. Ljapin: Dmitrij Dmitrievič Mor-
duchaj-Boltovskoj (1876—1953). *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 4 (56), 131—139 (1953)
[Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Carruccio, Ettore: Giovanni Vacca matematico, storico e filosofo della scienza.
Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 448—456 (1953).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• **Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy.** (Brussels, Aug. 20—26, 1953.) — Vol. V: *Logic, Philosophical analysis; Philosophy of Mathematics.* — Vol. XIV: *Additional Volume and Contributions to the Symposium on Logic.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co.; Louvain: Editions E. Nauwelaerts 1953. 226 et 350 p. 2,25 \$, 17 sh.; 8,50 f. et 3.00 \$; 23 sb.; 11 f.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Freytag Löringhoff, Bruno Baron von: Zur Logik als Lehre von Identität und Verschiedenheit. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 19—24 (1953).

Ein mißglückter Versuch, eine philosophische Logik als Lehre von der Identität der logistischen Logik gegenüberzusetzen. Die Identität des Verf. ist offensichtlich keine Identität, sondern eine Beziehung des Elementseins. Bei der Definition der Negation muß der „Begriff des Meinbaren überhaupt“ verwendet werden. Ref. kann keine Interpretation der eingeführten Pfeilsymbole finden, in der die Regel 2 richtig wäre. Regel 3 zeigt, daß diese Logik nur für benennbare, d. h. abzählbare Mengen gedacht ist.

H. Guggenheimer.

Heyting, A.: Sur la tâche de la philosophie des mathématiques. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 193—198 (1953).

Greenwood, Thomas: Valeur explicative des mathématiques. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 145—153 (1953).

Callahan, J. J.: Symbolism in mathematics and logic. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 166—171 (1953).

Juhos, Béla: Wahrscheinlichkeitsschlüsse als syntaktische Schlußformen. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 105—108 (1953).

Martin, R. M.: On non-translational semantics. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 132—138 (1953).

Pap, Arthur: Analytic truth and „implicit definitions“. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 151—155 (1953).

Menne, Albert: Beweis und Negation. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 91—97 (1953).

Schmidt, Arnold: Zum Verhältnis von Existenz und Widerspruchsfreiheit. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 205—207 (1953).

Johansson, Ingebrigt: On the possibility to use the subtractive calculus for the formalization of constructive theories. *Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy* (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 60—64 (1953).

Der sogenannte subtraktive Kalkül kann dazu dienen, Beweise von Formeln in konstruktiven Theorien zurückzuführen auf Beweise der Unmöglichkeit gewisser Konstruktionen. Da der Kalkül die Implikation nicht enthält, ist zu seiner Anwendung und Beurteilung noch die, wenigstens teilweise, Formalisierung seiner Metatheorie notwendig.

H. Guggenheimer.

Rasiowa, H. and R. Sikorski: On satisfiability and decidability in non-classical functional calculi. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 229—231 (1953).

Rasiowa and Sikorski announce results concerning the functional calculi corresponding to the classical, Lewis (S. 4), Heyting and positive propositional calculi. They give definitions of satisfiability and validity in terms of certain abstract algebras and state, without proof, six theorems on satisfiability and decidability.

A. Rose.

Günther, Gotthard: Die philosophische Idee einer nicht-Aristotelischen Logik. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 44—50 (1953).

Vaccarino, Giuseppe: Le logiche polivalenti e non aristoteliche. Archimede 5, 226—231 (1953).

Ein Referat über das System der dreiwertigen Logik von J. Łukasiewicz (nicht Ł. und A. Tarski) mit Bezug auf den Bericht über die Logik und das Grundlagenproblem in „Les entretiens de Zürich“, hrsg. von F. Gonseth, Zürich 1941.

H. Scholz.

Frey, Gerhard: Bemerkungen zum Problem der mehrwertigen Logiken. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 53—58 (1953).

Frey first discusses interpretations of many-valued logics. He then attempts to find two formalisations of the Łukasiewicz-Słupecki 3-valued logic in which the designated truth-values are 2 and 3 respectively. He claims that in the first case the formalisation can be obtained by replacing C throughout by NC in the Wajsberg-Słupecki axioms [C. r. Soc. Sci. Lett., Varsovie, Cl. III 29, 9—11 (1936)] and that in the second case it can be obtained by replacing C , N , T by SC , SN , ST respectively, where Sp is an abbreviation for $CpTp$. Both these claims are erroneous. In the first case the axiom $CpCqp$ becomes $NCpNCqp$ which takes the truth-value 1 when p takes the truth-value 1. In the second case this axiom becomes $SCpSCqp$ which again takes the truth-value 1 when p takes the truth-value 1.

A. Rose.

Kolmogorov, A. N.: Über den Begriff des Algorithmus. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 175—176 (1953) [Russisch].

Uspenskij, V. A.: Über den Begriff der algorithmischen Reduzibilität. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 176 (1953) [Russisch].

Uspenskij, V. A.: Der Satz von Gödel und die Theorie der Algorithmen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 176—178 (1953) [Russisch].

Bar-Hillel, Yehoshua: On recursive definitions in empirical sciences. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 160—165 (1953).

Davis, Martin: Arithmetical problems and recursively enumerable predicates. J. symbolic Logic 18, 33—41 (1953).

Ausdrücke der Form $\exists x_1 \dots \exists x_n (P = Q)$, wo P und Q Polynome mit nicht-negativen ganzen Koeffizienten sind, mögen diophantisch heißen, ebenso die durch solche Ausdrücke definierbaren Mengen und Relationen. Die Frage, ob alle diese Mengen entscheidbar sind, ist offen und eng verwandt mit dem 10. Hilbertschen Problem. Durchschnitt und Vereinigung diophantischer Mengen sind wieder diophantisch, das Komplement einer diophantischen Menge kann nicht-diophantisch sein. — Verf. zeigt, daß jede aufzählbare Menge (Relation) durch einen Ausdruck der Form $\exists y \forall k (k \leq y \rightarrow D)$ mit diophantischem D definiert werden kann. Es gibt also in dieser Form definierbare, unentscheidbare Mengen (Relationen). — Beweis: (1) Jede primitiv-rekursive Relation ist nach Gödel in der Form $\Pi (P = Q)$ definierbar, worin Π aus Partikularisatoren und beschränkten Generalisatoren besteht. (2) Jede aufzählbare Relation ist nach Rosser in der Form $\exists x S$ mit primitiv-rekursivem S definierbar, also auch in der Form $\Pi (P = Q)$. (3) Das Präfix Π kann schrittweise auf die gewünschte Form gebracht werden, indem man die bekannte diophantische Numerierung der Paare und der endlichen Folgen von natürlichen Zahlen heranzieht. — Durch Verwendung der Kleeneschen Normaldarstellung liefert das Theorem eine entsprechende Normaldarstellung mit festem D_n für die n -stelligen aufzählbaren Relationen.

W. Markwald.

Goodstein, R. L.: A problem in recursive function theory. J. symbolic Logic 18, 225—232 (1953).

This paper is concerned with the validity of constructive analogues of Rolle's theorem. The author has previously shown (this Zbl. 41, 347): (1). If (A): $f(n, x)$ is recursively convergent and relatively differentiable with a relative derivative $f^1(n, x)$ for $a \leq x \leq b$, and if $f(n, a) = f(n, b) = 0$ relative to n , then (B): there is a recursive function c_k , $a < c_k < b$, and a recursive $R(k)$ such that $f^1(n, c_k) = 0(k)$ (i. e. is $\leq 10^{-k}$) for $n \geq R(k)$. The fact that the classical form of Rolle's theorem gives the existence of an interior point of the interval at which the derivative vanishes suggests that it might be possible to strengthen the above result by adding to (B) the condition that the sequence c_k be „uniformly contained in (a, b) “, i. e. that there exist α, β such that, for all k , $a < \alpha \leq c_k \leq \beta < b$. „The object of this note is to show that this is not in fact the case, and we shall construct a recursive function $f(n, x)$ satisfying condition (A) in the interval $(0, 1)$ and such that any sequence c_k for which $f^1(n, c_k) = 0(k)$ for large enough values of n is not uniformly contained in $(0, 1)$.“ The reader should be warned that the author's point of view is non-classical; what he proves, for the particular function $f(n, x)$ which he constructs, is that there is no recursive sequence c_k , recursive function $V(k)$ and rational numbers α, β such that it is provable in „recursive number theory“ that $f^1(n, c_k) = 0(k)$ for $n \geq V(k)$ and that $0 < \alpha \leq c_k \leq \beta \leq 1$. However taking $c_k = 1/2$, $V(k) = 10^k$, $\alpha = 1/4$, $\beta = 3/4$ it is provable that $0 < \alpha \leq c_k \leq \beta < 1$ and for each particular numeral n it is provable that $n \geq V(k)$ implies $f^1(n, c_k) = 0(k)$, so that most mathematicians would be inclined to say that this was a c_k which satisfied $f^1(n, c_k) = 0(k)$ for $n \geq V(k)$ and was uniformly contained in $(0, 1)$. In fact if one takes a classical point of view one can indeed prove (I) with the strengthened form of (B). This is most easily seen by noting that from this point of view every recursively convergent recursive function $f(n, x)$ is either (a) „relatively variable“ or (b) „relatively constant“ and that the author has already proved the strengthened form of the theorem for functions satisfying (a) or (b). — The reader will find the paper easier to follow if he reads „provable in recursive number theory“ for „true“ and „not provable in recursive number theory“ for „false“; e. g. Theorem 5. „There is no recursive function $V(k)$ such that $n \geq V(k) \rightarrow d(n) = 0(k)$ “, means „There is no recursive function $V(k)$ such that $n \geq V(k) \rightarrow d(n) = 0(k)$ is provable in recursive number theory“; „ p is impossible“ (foot of p. 321) means „ p is not provable in recursive number theory“. What is meant by „recursive number theory“ is not made quite clear. From the author's earlier papers it would appear that it resembles the Hilbert-Bernays free-variable system, and it is certainly supposed to be subject to the Gödel incompleteness theorem since the author's proofs are based on this. But it is not clear just what sort of definitions by recursion are permitted. The author makes one or two comments about recursion and recursive definitions but he does not say precisely what he means by a recursive function. This is to be regretted since in connection with his earlier paper referred to above he explained to the reviewer that by „recursive“ he did not mean „general recursive“, but „primitive or multiply recursive“, whereas one of the definitions suggested in the present paper would, at least if given its usual interpretation, yield the whole class of general recursive functions. [Cf. Myhill, J. symbolic Logic 18, 190, 260 (1953); Routledge, Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 175—182 (1953).] Corrections: (1) insert „recursively convergent and“ after „is“ in (A) p. 225 and before „recursive function“ on p. 227 l. 5, 6 up. (without this the first result is false and the second trivial); (2) insert „well-“ before „ordering“ on p. 225 l. 4 up.

J. C. Shepherdson.

Wang, Hao: Between number theory and set theory. Math. Ann. 126, 385—409 (1953).

Verf. betrachtet mengentheoretische Systeme verschiedener Reichweite, aber nur solche, aus denen man die Zahlentheorie ableiten kann (im Sinne des Systems Z von Hilbert und Bernays). Die Beziehungen zwischen Mengenlehre und Zahlentheorie werden in mehrerer Hinsicht untersucht, z. B. bezüglich der Frage, wie weit die Interpretation des mengentheoretischen Systems durch die Interpretation des zahlentheoretischen Teils bestimmt ist. Alle Systeme sind mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls formalisiert. In § 1 wird ein System G' der allgemeinen Mengenlehre, d. h. ein Zermelohes System ohne Unendlichkeitsaxiom, diskutiert. Dieses hat bekanntlich ein abzählbares Modell. In G' läßt sich ein Prädikat $E(x, m)$ definieren (m ist der Repräsentant einer natürlichen Zahl), das eine Abzählung der Mengen dieses Modells gibt. Erweitert man G' zu G^* durch Hinzufügung eines Axioms des Inhalts, daß nur durch $E(x, m)$ definierte Mengen vorkommen, so werden die Axiome der Ersetzung, der Vereinigungsmenge, der Potenzmenge und der Auswahl überflüssig. Außerdem ist G^* kategorisch bezüglich seiner Zahlentheorie in dem Sinne, daß zwei Modelle für G^* isomorph sind, wenn die Isomorphie bezüglich des zahlentheoretischen Teils besteht. In § 2 wird eine prädikative Erweiterung P' von G' betrachtet, die einem Bernayschen System ohne Unendlichkeitsaxiom entspricht. Auch für P' läßt sich leicht ein abzählbares Modell angeben. Für dieses Modell läßt sich ein Prädikat $\eta^*(m, n)$ in P' definieren mit der Bedeutung: die (der natürlichen Zahl) m entsprechende Menge ist Element der durch n repräsentierten Klasse. η^* ist dann nicht allgemein rekursiv. Es ist möglich, in P' ein Prädikat zu definieren, das, inhaltlich betrachtet, die Gesamtheiten (Mengen und Klassen)

von P' abzählt. Der formale Beweis dafür kann aber nicht in P' geführt werden. In § 3 werden verschiedene Arten diskutiert, wie man das System so erweitern kann, daß der Beweis gelingt, z. B. Einführung einer Regel der unendlichen Induktion, oder Zulassung von imprädikativen Klassenbildungen. Für die so entstehenden Systeme werden ähnliche Fragen behandelt. Ferner werden einige neue Formen von unentscheidbaren Aussagen, die in diesen Systemen auftreten, angegeben. W. Ackermann.

Saarnio, Uuno: Der Teil und die Gesamtheit. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 35—37 (1953).

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Davis, Robert L.: The number of structures of finite relations. Proc. Amer. math. Soc. 4, 486—495 (1953).

Two m -adic relations A, B defined on a set N are said to be isomorphic if and only if there is a permutation π of N such that for all x_1, \dots, x_m in N , $A(x_1, \dots, x_m) \equiv B(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$. Let $st_m(n)$ denote the number of non isomorphic m -adic relations on a set of n elements. By using group theoretic and combinatorial arguments the author obtains a formula expressing $st_m(n)$ as a sum over all partitions of n . Similar formulae are obtained for the number of non isomorphic dyadic relations of the following types on a set of n elements: reflexive, irreflexive, symmetric, asymmetric, anti-symmetric; also for the number of non-isomorphic mappings of a set of n elements into itself and for the number of graphs (directed graphs) on n nodes with at most one arc (directed arc) between any pair (ordered pair) of nodes.

J. C. Shepherson.

Zorat, Alfredo: Decimazioni zoratiane. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 219—223 (1953).

Etude des „Series ejectionis“ dérivées du problème de Joseph et considérées par L. Euler [Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Novi Commentarii Petrop. 20, 123—139 (1775—76), art. 5]. La notation $(n)/h$ représentant la série des rejetés en décimant l'ensemble ordonné $1, 2, 3, \dots, n$ de h en h , $1^\circ (n)/h = (n)/k$ si $h \equiv k \pmod{N}$, où N est le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, 3, \dots, n$. Si l'on répète la décimation, mais de k en k , sur la série des rejetés de h en h , on aboutit à une nouvelle série des rejetés, notée $(n)/h/k$, qui est le produit des deux décimations. L'A. se pose la question de savoir 2° dans quel cas ce produit est encore une $(n)/h'$; 3° dans quel cas il est commutatif; 4° dans quel cas une transformation linéaire de $(n)/h$ est aussi une $(n)/h'$. Sur ce sujet, voir P. Lévy (ce Zbl. 34, 295) pour $(n)/2$ et la note du rapporteur (ce Zbl. 35, 289).

A. Sade.

Yamamoto, Koichi: Symbolic methods in the problem of three-line Latin rectangles. J. math. Soc. Japan 5, 13—23 (1953).

Dans un précédent travail (ce Zbl. 39, 248) l'A. avait obtenu, par l'emploi du calcul symbolique, une expression générale du nombre $f(n, 3)$ des rectangles latins de trois lignes. Cette même méthode lui permet cette fois de parvenir plus rapidement aux résultats déjà obtenus dans un autre papier (ce Zbl. 37, 298) et à une expression opérationnelle de $f(n, 3)$ dont il déduit la démonstration des formules de récurrence: $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}/n(n-1) + 2\Phi_{n-3}/n(n-1)(n-2) + \eta_n$ ($n \geq 3$), $\Phi_0 - 1 = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$, $\zeta_n = n! \eta_n = 3(-)^n \sum_{u=0}^n \frac{(-2)^u}{u!} - \frac{2^{n+1}}{n!}$, $\zeta_n + \zeta_{n-1} + \frac{2^n(n-1)}{n!} = 0$, ($n \geq 1$), $\zeta_0 = 1$, où Φ est définie par: $f(n, 3) = (n!)^3 \Phi_n$. A. Sade.

Greenwood, R. E.: The number of cycles associated with the elements of a permutation group. Amer. math. Monthly 60, 407—409 (1953).

Gontcharoff [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 8, 3—48 (1944)] a trouvé que le coefficient de x^n dans le développement du produit $x(x+1) \dots$

$\dots(x+n-1)$ est le nombre des permutations de n lettres qui ont exactement p cycles, en comptant également les cycles de 1 lettre. L'A. a retrouvé ce résultat et le déduit d'une manière indépendante par une induction simple et élégante passant du groupe symétrique S_n au groupe symétrique S_{n+1} . S. Bays.

Gruder, Osias: Zur Theorie der Zerlegung von Permutationen in Zyklen. Ark. Mat. 2, 385—414 (1953).

On sait que chaque permutation est le produit et d'une seule manière de cycles sans éléments communs. L'A. résoud d'une manière générale la question du nombre des permutations qui sont le produit de cycles d'ordres donnés. Ces ordres étant $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$ entier positif fixé quelconque, et $F(n)$ étant le nombre des permutations de n éléments dont les cycles ont les ordres a_i , il pose $h(z) = \sum \left(\frac{z^{a_i}}{a_i} \right)$; la fonction génératrice pour $F(n)$ est alors: $e^{h(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} F(n) \frac{z^n}{n!}$.

Si $f(n, k)$ désigne le nombre de ces $F(n)$ permutations qui ont k cycles, $f(n, k)$ est le coefficient du terme $x^k z^n / n!$ dans le développement de $e^{zh(z)}$ en puissances de z . L'A. restreint ensuite le sens de $F(n)$ et $f(n, k)$ au cas particulier où la suite des a_i est $a, a+b, a+2b, \dots$. Il obtient une formule de récurrence pour chacune des fonctions et, en donnant à a et b des valeurs particulières, retrouve une série de résultats donnés autrefois par Sylvester. Au moyen d'une matrice définie d'une façon particulière, il établit aussi directement et d'une manière indépendante les deux formules de récurrence en question. Par l'introduction d'un polynôme $H_n(x)$, défini par la formule de récurrence symbolique suivante: $(H(x))^n = H_n(x)$, $(H(x) + x)^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$, $n \geq 1$, et qui a pour coefficient de x^k le nombre $p(k, n)$ des permutations de n éléments qui ont k cycles et déplacent tous les éléments, il obtient une vue plus complète sur la répartition des $n!$ permutations en classes différentes suivant le nombre k des cycles et leur ordre minimum a . Le cas particulier $a = 2$ revient au problème dit „problème des rencontres“. Enfin l'A. établit pour la constante d'Euler et le nombre π des définitions combinatoires analogues à la définition connue de e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} n!/P_n$, $P_n = H_n(1)$ étant le nombre

des permutations qui déplacent les n éléments.

S. Bays.

Slepian, David: On the number of symmetry types of Boolean functions of n variables. Canadian J. Math. 5, 185—193 (1953).

Verf. betrachtet die $\mu = 2^{2^n}$ Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, deren Variablen x_1, \dots, x_n der Werte 0 und 1 fähig sind und die selbst Werte 0 und 1 annehmen. Ist x_i gleich 0 oder 1, so sei x'_i bezüglich gleich 1 oder 0. Verf. rechnet zwei Funktionen zum gleichen Typ, wenn sie durch eine Permutation der x_1, \dots, x_n und/oder Ersetzen einiger x_i durch x'_i ineinander übergehen; die Anzahl N_n dieser Typen soll bestimmt werden. Die genannten Transformationen der Variablen x_1, \dots, x_n bilden eine Gruppe O_n der Ordnung $2^n n!$, die zu der Gruppe der Drehungen und Spiegelungen isomorph ist, die ein n -dimensionales Hyperoktaeder (oder einen n -dimensionalen Hyperwürfel) in sich überführen. Bei Anwendung dieser Transformationen permutieren sich die μ Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$. Die so entstehende Permutationsgruppe ist eine Darstellung von O_n , und N_n ist die Anzahl der dabei auftretenden Transitivitätsbereiche. Also ist N_n die Vielfachheit, in der beim Ausreduzieren der genannten Permutationsgruppe die identische Darstellung auftritt. Die Darstellungstheorie liefert nun eine Formel für N_n , zu deren Auswertung Verf. sich einen Überblick über die Klassen konjugierter Elemente von O_n verschafft und einen Weg zeigt, die in der Formel auftretenden Größen zu berechnen. N_1, \dots, N_6 werden numerisch angegeben, N_6 ist bereits $> 4 \cdot 10^{14}$. — Ein etwas allgemeineres Problem gestattet folgende Einkleidung: Jede Ecke eines n -dimensionalen Hyperwürfels sei mit einer von p Farben gefärbt. Wieviel solche Färbungen gibt es, die nicht durch Drehungen oder Spiegelungen ineinander überführbar sind? A. Stöhr.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Fréchet, M.: Rectification. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 71—72 (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 47, 18) hat der Verf. 2-dimensionale Matrizenpaare A, B mit $e^A e^B = e^{A+B}$ angegeben. Dabei hat er stillschweigend angenommen, daß $e^A e^B = e^B e^A$ ist, was im allgemeinen nicht gilt. Ein Beispiel, mitgeteilt von M. A. G. Kalar, ist angegeben. Daher sind die Lösungen des Verf. in der obigen Arbeit als die Lösungen von $e^A e^B = e^{A+B}$ und $e^A e^B = e^B e^A$ anzusehen.

K. Shoda.

Mal'cev, A. I.: Multiplikative Matrizengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 333—335 (1953) [Russisch].

In dem Matrizenring F_n der n -reihigen Matrizen über einem Körper F werden multiplikative Untersysteme F_n^r untersucht, deren Matrizen höchstens den Rang r haben. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, Teilsysteme aus F_n^r zu finden, welche Rechts- und Linksmultiplikation mit einer beliebigen Matrix aus F_n^r gestatten und eine Unterteilung des Systems F_n^r nach der Art von Kongruenzklassen ermöglichen. Er stellt für eine umfassende Klasse solcher Teilsysteme notwendige und hinreichende Bedingungen auf, welche indessen zu weitläufig sind, als daß sie hier wiederholt werden könnten.

H. Brandt.

Egerváry, E.: On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Acta Sci. math. 15, 1—6 (1953).

P sei eine Projektionsmatrix, d. i. eine komplexe $n \times n$ -Matrix mit $P^2 = P$. Wird P mittels zweier $n \times r$ -Matrizen S, T mit $r = \text{Rang } P$ in der Form $P = ST'$ dargestellt, so ist $T'S$ stets eine Einheitsmatrix. Diese Bemerkung kann dazu benutzt werden, um für eine vorgegebene, auf Diagonalform transformierbare Matrix A ein vollständiges Biorthonormalsystem von vorderen und hinteren Eigenvektoren zu berechnen. Für P sind dabei der Reihe nach diejenigen Projektionsmatrizen zu nehmen, die sich als Polynome von A darstellen lassen.

H. Wielandt.

Wallace, Andrew H.: A note on the Capelli operators associated with a symmetric matrix. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 7—12 (1953).

Verf. liefert neue Beweise für die von Turnbull gegebene Übertragung der Capellis Formel auf den symmetrischen Fall und für den Satz von Gårding (dies. Zbl. 36, 150). Die Beweisführung beruht auf der Möglichkeit, eine m -reihige symmetrische Matrix X , deren Elemente unabhängige Variable sind, in der Form $X = Y'Y$ darzustellen, wo Y eine quadratische Matrix ist, deren m^2 Elemente ebenfalls als unabhängige Variable angesehen werden dürfen.

E. Schönhardt.

Wallace, Andrew H.: Generalised Young tableaux. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 35—43 (1953).

The author uses echelon tableaux in which the left hand member of a row is above some member of the next row, and not necessarily above the first member as in Young tableaux (here called quadrantal). If S_i and S_j are two echelon tableaux of the same shape and if there is a tableau S whose rows and columns are respectively permutations of the rows of S_i and the columns of S_j , then S_i is said to be convertible to S_j . It is shown that in this case S_i cannot precede S_j . As in a previous paper (this Zbl. 46, 15) the author obtains, for each echelon tableau, a reducible invariant matrix $T(A) = T_0(A) T_0^{-1}(I)$, I being the unit matrix. (Only quadrantal tableaux were considered in the previous paper and these gave irreducible invariant matrices.) The convertibility result now being used to show that $T_0(I)$ is a direct sum of non-singular triangular matrices. The trace of $T(A)$ is found to be the isobaric determinant (of the latent roots of A) which corresponds to the tableau in question. Linear dependence properties of polarised double forms are established for echelon tableaux.

F. W. Ponting.

Ishaq, M.: On four-point matrices. Ganita 4, 61—78 (1953).

Vierpunkt-Matrizen sind vierreihige quadratische Matrizen, bei denen in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein von Null verschiedenes Element steht, während sämtliche übrigen Elemente Null sind. Matrizen dieser Art haben wegen ihres Auftretens in der relativistischen Quantenmechanik eine gewisse Bedeutung erlangt. Verf. untersucht eingehend die Eigenschaften dieser Matrizen, ihre Symmetrie bzw. Schief-Symmetrie, ihren Gruppencharakter, ihre Eigenwerte, die Quadratwurzeln aus der positiven und negativen Einheit, die lineare Unabhängigkeit u. a., und weist dabei auf die Beziehungen zur Quaternionentheorie hin.

W. Quade.

Kesava Menon, P.: On two positive forms of Arne Beurling. Math. Student 21, 29—36 (1953).

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > 0 \quad \& \quad \prod_{\alpha=1}^{k-1} (\alpha_\alpha - \alpha_{\alpha+1}) = p \quad \& \quad \sum_{\alpha, \lambda=1}^k \beta_{\alpha, \lambda} z_\alpha \bar{z}_\lambda = q \geq 0 \quad \& \\ \sum_{\alpha, \lambda=1}^k \min(\alpha_\alpha, \alpha_\lambda) \beta_{\alpha, \lambda} z_\alpha \bar{z}_\lambda = f \quad \text{bewirken} \quad f \geq 0 \quad \text{mit Ausschluß der Gleichheit für}$$

$p^2 + q^2 > 0$. — $l = 1, 2, \dots$ & $\sum_{\kappa=1}^k \gamma_{\kappa} \alpha_{\kappa}^h = 0$ für $h = 0, 1, \dots, l-1$ bzw. $\neq 0$ für $h = l$, & $0 \leq m \leq 2l$ bewirkt $\operatorname{sg} \left(\sin \frac{\pi m}{2} \right) \sum_{\kappa, \lambda=1}^k \gamma_{\kappa} \bar{\gamma}_{\lambda} |\alpha_{\kappa} - \alpha_{\lambda}|^m \leq 0$. — Im euklidischen \mathbb{R}_n seien mit $\mu, \nu = 1, \dots, n$ aus Vektoren ξ_r die Beiwerte $\operatorname{sg} \left(\sin \frac{\pi m}{2} \right) \sum_{\kappa, \lambda=1}^k \gamma_{\kappa} \bar{\gamma}_{\lambda} |\alpha_{\kappa} \xi_{\mu} - \alpha_{\lambda} \xi_{\nu}|^m = b_{\mu, \nu}$ gebildet. Diese bewirken $\sum_{\mu, \nu=1}^n b_{\mu, \nu} z_{\mu} \bar{z}_{\nu} \leq 0$.

W. Maier.

● **Ruffini, Paolo:** *Opere matematiche. Tomo II.* Herausgegeben von Ettore Bortolotti. Roma: Edizioni Cremonese 1953. XIII, 509 p. 5000 Lire.

Der erste Band der Werke von Ruffini erschien 1915 (Palermo). Die Fortsetzung der Ausgabe wurde durch den Tod des Herausgebers, G. B. Guccia, sowie durch den Krieg unterbrochen. Die berühmte Abhandlung aus dem Jahre 1799 „Teoria generale delle equazioni, ...“ mit dem ersten Beweisversuch des „importantissimo Teorema“, wonach nicht jede algebraische Gleichung vom Grade > 4 durch Radikale gelöst werden kann, sowie die Arbeit „Della soluzione“ ... (1802) welche den Beweis vervollständigen sollte und zugleich die Elemente einer Theorie der Permutationsgruppen im Stile der damaligen Zeit enthält, waren dort schon abgedruckt worden. Darauf bezügliche Bemerkungen wurden Ruffini durch seinen Schüler und Freund P. Abbati „mio amicissimo e Personaggio di grandi talenti e di profonda penetrazione“ brieflich zugestellt. Dieser Brief, im Anhang des vorliegenden Bandes abgedruckt, „mi ha eccitato a formare e ad esporre al Pubblico una nuova Dimostrazione della insolubilità algebraica delle Equazioni generali di grado superiore al quarto“; dies ist die Abhandlung von 1803, pp. 1—50 des vorliegenden Bandes. Es folgen die „Riposta ai dubbi propostigli dal Socio G.-F. Malfatti ...“ (1805, pp. 51—90) „dalle quale (nach der Vorrede von E. Bortolotti), meglio che delle precedenti, risulta il corso delle sue idee, e con essa vengono eliminate le obiezioni mosse dal Malfatti, ed anche altre che gli stesso si era posto“. In demselben Problemkreis bewegen sich die Abhandlungen „Della insolubilità delle Equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi, o trascendentale“ (1806, pp. 107—154) und „Riflessioni intorno alla soluzione ...“ (1813, pp. 159—268), wo man „la quinta ed ultima dimostrazione data da Ruffini per il suo teorema“ findet, welche mit der sogen. „Wantzelschen Vereinfachung des Abelschen Beweises“ im wesentlichen übereinstimmt (vgl. Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, Leipzig 1929, p. 168). Auch die anderen Abhandlungen dieses Bandes beziehen sich auf die Auflösung algebraischer Gleichungen. Numerische Methoden mit vielen Zahlbeispielen werden behandelt in „Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche“ (1804, pp. 285—404) und in „Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche“ (1813, pp. 407—450). Bemerkenswert scheint die Note „Intorno al metodo generale proposto da Signor Hoene Wronski ...“ (1817, pp. 271—279), in der mit den bei der Lösung der zyklischen Gleichungen gebrauchten Lagrangeschen Resolventen gearbeitet wird. Schließlich eine Arbeit über Einheitswurzeln (1824, pp. 452—466). — Am Schluß finden sich erläuternde und historische Bemerkungen des Herausgebers des ersten Bandes, auf die im Text an den betr. Stellen verwiesen wird. Es handelt sich dabei vor allem um die im Kern gruppentheoretischen Argumente und Resultate der Abhandlungen, die hier in moderner Ausdrucksweise vorgebracht werden. Da manche der Ruffinischen Arbeiten in fast jedem Lehrbuch der Algebra zitiert werden, ist es zu begrüßen, daß sie nunmehr allgemein zugänglich sind. Der ausstehende dritte Band soll Ruffini's Korrespondenz bringen.

H. Schwertfeger.

Carlitz, L.: A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 4, 184—188 (1953).

Durch die Gleichungen

$$B_m(kx) = k^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} B_m \left(x + \frac{s}{k} \right) \text{ für ein ganzes } k > 1,$$

$$E_m(kx) = k^m \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s E_m \left(x + \frac{s}{k} \right) \text{ für ein ungerades } k > 1$$

werden nebst der Forderung, daß B_m bzw. E_m normierte Polynome m -ten Grades in x sein sollen, nach N. Nielsen (Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris 1923, p. 54) die Bernoullischen bzw. Eulerschen Polynome eindeutig bestimmt. Dagegen stellt

$$(1) \quad g_{m-1}(kx) = -\frac{2}{m} k^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s f_m \left(x + \frac{s}{k} \right) \text{ für ein gerades } k \geq 2,$$

g_{m-1}, f_m normierte Polynome vom Grade $m-1$ bzw. m , was für jedes positive

$k \equiv 0 \pmod{2}$ mit $g_m = E_m$, $f_m = B_m$ gilt, natürlich nicht umgekehrt die Charakterisierung von E_m und B_m dar. Verf. beweist jedoch, daß, falls (1) für zwei verschiedene der zugelassenen k -Werte zutrifft, durch die genannten Forderungen E_m eindeutig und B_m bis auf eine additive Konstante bestimmt sind. Verf. betrachtet auch verschiedene Verallgemeinerungen dieser Aussage. *H.-E. Richert.*

Chamberlin, Eliot and James Wolf: A decision method for trigonometric identities. *Math. Mag.* **27**, 75–77 (1953).

Ein Polynom $P(x)$ in $\sin a_i x$, $\cos a_i x$ ($i = 1, \dots, n$), wobei die a_i rational sind, kann stets auf die Form $q_1(\sin x/p) \cos x/p + q_2(\sin x/p)$ gebracht werden; p ist der kleinste gemeinsame Nenner der Zahlen a_i und q_1 und q_2 sind Polynome. Verf. beweist den Satz: Sind $q_1(v)$ und $q_2(v)$ Polynome, so gilt dann und nur dann $q_1(\sin u) \cos u + q_2(\sin u) \equiv 0$, wenn alle Koeffizienten von q_1 und q_2 verschwinden. — Für irrationale Vielfache im Argument gilt ein zweiter Satz: Ist $R(x)$ ein Polynom in $\sin b_1 x$, $\cos b_1 x, \dots, \sin b_k x$, $\cos b_k x$, wobei die b_1, \dots, b_k linear unabhängig sind, und entsteht $S(v_1, \dots, v_k)$ dadurch, daß man die $b_1 x, \dots, b_k x$ durch v_1, \dots, v_k ersetzt, so ist dann und nur dann $R(x) \equiv 0$, wenn $S(v_1, \dots, v_k) \equiv 0$. An Beispielen zeigt Verf., wie man mit diesen Sätzen fast mechanisch nachweisen kann, ob eine trigonometrische Gleichung eine Identität ist oder nicht.

Rudolf Ludwig.

Jakovkin, M. V.: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Reduzibilität von Polynomen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **93**, 629–631 (1953) [Russisch].

Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ drei Polynome mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten. Hinreichend (und trivialerweise notwendig) für das Bestehen der Gleichung $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ ist, daß diese Gleichung für $x = 1$ und für mindestens eine Zahl t besteht, die größer als alle in den Polynomen auftretenden Koeffizienten ist. — Der sehr einfache Beweis beruht darauf, daß die Ausdrücke $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ als Darstellungen der entsprechenden Zahlen im Ziffernsystem der Zahl t aufgefaßt werden können. — Verf. gibt noch einige Anwendungen und Verallgemeinerungen.

W. Hahn.

Jakovkin, M. V.: Über eine Methode zum Aufsuchen von irreduziblen Faktoren. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **93**, 783–785 (1953) [Russisch].

Aus dem in der vorstehend besprochenen Arbeit genannten Satz läßt sich ein Verfahren zur Ermittlung irreduzibler Teiler eines Polynoms ableiten, das folgendermaßen verläuft: Man wähle die Zahl t hinreichend groß (besonders zweckmäßig ist es, t als Potenz von 10 zu nehmen) und bestimme eine Zerlegung von $f(t)$ in zwei Faktoren. Schreibt man diese im Ziffernsystem der Zahl t und bildet die entsprechenden Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so ist $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, falls noch die Bedingung $f(1) = \varphi(1)\psi(1)$ erfüllt ist. — Verf. bemerkt, daß dieses Verfahren zur Zerlegung eines Polynoms erheblich weniger Probierschritte erfordert, als etwa das Kronecker-sche.

W. Hahn.

Grinstein, Louisa S.: Upper limits to the real roots of polynomial equations. *Amer. math. Monthly* **60**, 608–615 (1953).

Rules are summarized for the computation of upper bounds to the real roots of polynomial equations with real coefficients.

E. Frank.

Četković, Simon: Sur les zéros réels des dérivées d'une classe des fonctions. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* **5**, Nr. 1/2, 47–51 und französ. Zusammenfassg. 51 (1953) [Serbisch].

En partant des résultats obtenus par N. Obrechhoff (ce Zbl. **37**, 300) et D. Markovitch [Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **4**, Nr. 3, 1–5 (1952)], l'A. dans ce travail définit d'abord l'ensemble N de la manière suivante: Soient a, b, A, B des nombres réels ($a < A$, $b < B$). Soit $f(x) = P(x)Q(x)$ un ensemble de fonctions rationnelles, telles que, $P(x)$ et $Q(x)$ étant deux polynômes avec les coefficients réels, les parties réelles des zéros de $P(x)$ appartiennent au segment $[a, A]$, et les zéros tous réels de $Q(x)$ appartiennent au $[b, B]$. Envisageons

l'ensemble des fonctions dérivées de $f(x)$ et désignons les par $G(x)$. Les zéros réels de l'ensemble des fonctions $G(x)$ représentent un ensemble de nombres réels que nous désignerons par N . L'A. démontre que l'ensemble N est partout dense dans les quatre intervalles $(-\infty, \min(a, b))$, $(\max(A, B), +\infty)$, (a, A) , (b, B) .
Autoreferat.

Faedo, Sandro: Un nuovo problema di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali. Ann. Scuola norm. sup. Pisa. Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 53—63 (1953).

Sia $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polinomio a coefficienti reali. Siano assegnati i numeri reali $a_i \leq a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Si considerino le due tabelle di numerie:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} & \dots \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0j} & \alpha_{1j} & \alpha_{2j} & \alpha_{3j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} & \dots \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0j} & \alpha_{1j} & \alpha_{2j} & \alpha_{3j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

in cui

$$\alpha_{00} = a_0, \quad \alpha_{10} = a_2, \quad \alpha_{20} = a_4, \quad \alpha_{30} = a_6, \dots$$

$$\alpha_{01} = a_1, \quad \alpha_{11} = a_3, \quad \alpha_{21} = a_5, \quad \alpha_{31} = a_7, \dots \text{ con } a_k = 0 \text{ per } k = 0$$

$$\alpha_{00} = a_0, \quad \alpha_{10} = a_2, \quad \alpha_{20} = a_4, \quad \alpha_{30} = a_6, \dots$$

$$\alpha_{01} = a_1, \quad \alpha_{11} = a_3, \quad \alpha_{21} = a_5, \quad \alpha_{31} = a_7, \dots \text{ con } a_{n+k} = 0 \text{ per } k > 0 \text{ e per } j > 1:$$

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1,j-2} & \alpha_{0,j-2} \\ \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{0,j-1} \end{vmatrix} \text{ e } \alpha_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1,j-2} & \alpha_{0,j-2} \\ \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{0,j-1} \end{vmatrix}.$$

L'A. dimostra che se $a_k \leq a_k \leq a_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) e $\alpha_{0j} > 0$, $\alpha_{0j} > 0$ ($j = 0, 1, \dots, n$), il polinomio $f(z)$ ha tutte le radici con parte reale negativa. Nel caso $a_n = a_n = a_n$ la condizione è necessaria e sufficiente (teorema di Routh).
G. Fichera.

Gruppentheorie:

Ellis, David: Cross-associativity and essential similarity. Amer. math. Monthly 60, 545—546 (1953).

Eine Menge G werde durch die Verknüpfung $*$ zu einer Gruppe G^* und durch die Verknüpfung \cdot zu einer Gruppe G_\cdot . Dann sind die folgenden zwei Aussagen gleichwertig: 1. $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * c$ für alle $a, b, c \in G$; 2. es gibt in G ein b so, daß $a * c = a \cdot b \cdot c$ für alle $a, c \in G$. Aus ihnen folgt: G^* und G_\cdot sind isomorph. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß die multiplikativen Gruppen von Schiefkörpern, die aus denselben Elementen bestehen und dieselbe Addition besitzen, isomorph sind.
G. Pickert.

Szász, G.: Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen. Acta Sci. math. 15, 20—28 (1953).

Bezeichne S eine Menge von der Mächtigkeit r , in der eine eindeutige (sonst beliebige) Multiplikation ab ($a, b \in S$) definiert ist. Man nenne den Begriff der Sätze $(x, y, z) \rightarrow x(yz)$ ($x, y, z \in S$) die Assoziativitätsaxiome (für S). Verf. löst das vom Ref. aufgeworfene schwierige Problem der Unabhängigkeit der Assoziativitätsaxiome und bekommt zur Antwort, daß Unabhängigkeit dann und nur dann vorliegt, wenn $r = 4$ ist. (Wenn man also im Fall $r \geq 4$ nachweisen will, daß S assoziativ, d. h. eine Halbgruppe ist, so muß die Erfüllung aller $(x, y, z) \rightarrow x(yz)$ im allgemeinen einzeln nachgewiesen werden.) Verf. verfährt im Fall $r = 4$ so, daß er ein beliebiges Tripel $a, b, c \in S$ herausgreift, und zeigt, daß sich die Multiplikation in S so definieren läßt, daß $(ab)c = a(bc)$ falsch ist, dagegen alle übrigen $(x, y, z) \rightarrow x(yz)$ ($x, y, z \in S$) richtig sind; das bedeutet offenbar die behauptete Unabhängigkeit. Ferner kann er mit einem leichten Kunstgriff den Fall $r \geq 4$ auf den Fall $r = 4$ reduzieren. Für diesen Fall geschieht der Beweis mit einer mühsamen, effektiven Konstruktion. In den Fällen $r = 2, 3$ werden alle vollständigen unabhängigen Teilsysteme der Assoziativitätsaxiome aufgestellt.
L. Rédei.

Conkling, Randall and David Ellis: On metric groupoids and their completions. *Portugaliae Math.* 12, 99—103 (1953).

Groupoids which are metric spaces are considered; the groupoid product is assumed continuous (i) in each factor, or (ii) simultaneously in both factors, or uniformly continuous (iii) in each factor, or (iv) in both factors. Typical conclusions are that (i) implies that the closure of an ideal is an ideal, and a neutral element of a subset is neutral for the closure of the subset; that (ii) implies that the closure of a subgroupoid is a subgroupoid, and that commutativity and associativity are inherited by closures. Completion by Cauchy sequences is considered when the groupoid satisfies (iv). If the groupoid is a group and satisfies (iii), then inversion is a uniformly continuous operation. An embedding of a normed abelian group in a Banach space is described. The arguments are straightforward and not difficult.

B. H. Neumann.

Lorenzen, Paul: Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsguppen. *Math. Z.* 58, 15—24 (1953).

Pour les définitions, se reporter à un mémoire antérieur de l'A. (ce Zbl. 35, 293). Le présent travail réalise l'extension d'un groupe pré-ordonné G (halbgeordnete Gruppe) en un groupe pré-réticulé (Verbandsguppe), déjà étudiée dans le travail cité. Lorsque G est le groupe multiplicatif $K - \{0\}$ d'un corps commutatif K , cette construction est la forme abstraite donnée à la divisibilité dans K , relativement à un sous-anneau I intégralement fermé dans K . En considérant le système H_d des idéaux de Dedekind de K , le groupe pré-réticulé V extension de G est défini par la relation:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m < b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_n \Leftrightarrow 1 \in \sum_{\kappa=1}^k (a_1 b_1^{-1}, \dots, a_\mu b_\mu^{-1}, \dots, a_m b_n^{-1})^\kappa,$$

qui est une généralisation de la dépendance intégrale de Prüfer:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_m < b \Leftrightarrow b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k = 0, \quad c_\kappa \in (a_1, \dots, a_m)^\kappa.$$

L'A. montre (Satz 2. p. 24, § 3) qu'elle équivaut à l'existence d'éléments c_μ ($\mu = 1, \dots, l$) tels que:

$$1 \in (a_1 b_1^{-1}, \dots, a_m b_n^{-1}) I [c_1^{-1}, \dots, c_l^{-1}].$$

et c'est sous cette forme qu'il peut l'étendre au cas abstrait d'un r -groupe pré-ordonné G muni d'un système H_r spécifié d'idéaux, lorsque G est r -fermé (§ 2). Au § 1, il donne une construction analogue pour le cas plus général d'un ensemble pré-ordonné B avec opérateurs, ou domaine („Bereich", voir du même A., ce Zbl. 48, 12). Cette construction nécessite alors la donnée supplémentaire d'un „Überidealbereich" F_α de B , contrairement au cas d'un groupe ou la donnée de H_r suffit. (Il faut sans doute lire p. 24, $I[a_1, \dots, a_\mu^{-1}, \dots, a_m]$ au lieu de $I[a_\mu^{-1}]$). *L. Lesieur.*

Croisot, Robert: Demi-groupes et axiomatique des groupes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 237, 778—780 (1953).

L'A. résout trois problèmes posés par B. Stolt (Thèse, Uppsala 1953) au moyen des trois théorèmes suivants: 1. Un demi-groupe D est un groupe s'il possède un élément d tel que l'équation $xa = d$ admette une solution unique x pour tout a , et tel que l'on puisse trouver c pour lequel l'équation $cy = d$ admette une solution unique y . 2. Un demi-groupe D simple à gauche est un groupe s'il existe deux éléments a et b tels que l'équation $xb = a$ admette une solution unique, et deux éléments c et d tels que l'équation $cx = d$ admette une solution unique. 3. Le demi-groupe des applications d'un ensemble dénombrable sur lui-même donne un exemple de demi-groupe (qui n'est pas un groupe) simplifiable à droite, possédant un élément unité qui est son unique idempotent, et dans lequel existe un élément b tel que l'équation $ax = b$ admette pour tout a une solution x . *L. Lesieur.*

Dubreil, P.: Contribution à la théorie des demi-groupes. III. *Bull. Soc. math. France* 81, 289—306 (1953).

L'A. continue ici ses travaux sur les demi-groupes (ce Zbl. 26, 196; 45, 8). Les principales notions introduites concernent les idéaux fermés et les idéaux larges d'un demi-groupe D . Leur définition résulte naturellement de calculs simples sur les complexes de D , considérés comme les éléments d'un gerbier P complet résidué, dont la théorie est exposée par M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot dans „Leçons sur la théorie des treillis..." (Paris 1953, ce Zbl. 51, 260). P est muni d'une structure de treillis complet, le treillis des parties de D , et d'une structure de demi-groupe par le produit $A \cdot B$ des complexes, O étant adjoint avec la loi de multiplication

$O \cdot X = X \cdot O = O$. Ces deux structures sont liées par les propriétés $A \cdot (\cup X_\alpha) = \cup (A \cdot X_\alpha)$ et $(\cup X_\alpha) \cdot A = \cup (X_\alpha \cdot A)$, d'où résulte l'existence du résiduel à droite (ou à gauche) $A : B$ (ou $A : B$), c. à d. d'un complexe maximum X vérifiant $B \cdot X = A$ (ou $X \cdot B \subseteq A$); de plus P n'admet pas de véritable diviseur de zéro. Les résiduels à gauche de la forme $H : D$ sont des idéaux à droite dans D , qu'on appelle idéaux fermés à droite. Pour qu'une partie \tilde{X} de D soit idéal fermé à droite, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $\tilde{X} = \tilde{X} D$, D (th. 3, p. 295). L'A. donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de D engendre un idéal fermé à droite, sous la forme $A D : D \subseteq A = A D$ (th. 4, p. 295), puis il identifie les idéaux à droite fermés à droite et les résidus à droite W_H : un résidu à droite W_H est un idéal fermé à droite $W_H = (D - H) : D$ et réciproquement tout idéal fermé à droite \tilde{X} est le résidu à droite de $H = D - \tilde{X} D$ (th. 5, p. 297). (Rappelons que W_H est l'ensemble des éléments w qui vérifient $H : w = O$.) De plus, les idéaux à droite m qui vérifient $m : D = m$, et en particulier les idéaux à droite premiers et les intersections d'idéaux à droite premiers, sont des idéaux fermés à droite (th. 6, p. 297). Tout idéal à droite est évidemment fermé à droite lorsque D est idempotent, ou possède un élément neutre à droite, ou est un quasi-groupe à droite, et d'une manière générale lorsque D est simplifiable à droite dans le demi-groupe P . Tous les résultats précédents sont exposés dans les sections 1 et 2. — Dans la section 3, l'A. introduit la notion d'idéal large, qui prend son intérêt dans les demi-groupes D qui ne sont pas globalement idempotents ($D^2 \neq D$): un idéal à droite m est large s'il n'existe aucun idéal $m' \supset m$ vérifiant $m' : D^2 = m' : D^2$. Pour que m soit large, il faut et il suffit que l'on ait $(m : D) \cap (D - D^2) \subseteq m$; il suffit aussi que $m : D = m$; en particulier, tout idéal premier est large. Un résidu à droite W_H n'est pas nécessairement large. Il le devient cependant si la condition $H : D^2 = W_H = O$ est vérifiée, ce qui a lieu en particulier si H est un sous-demi-groupe de D . — Dans la section 4, l'A. donne la notion nouvelle de complexe S unitaire par rapport à un complexe H , c. à d. $xs = H$, $s \in S = x : H$, et il l'applique à l'étude d'un complexe fort H contenant un sous-demi-groupe non vide, en généralisant ainsi certaines propriétés des sous-demi-groupes forts. Il donne d'autre part un théorème sur la comparaison d'un complexe fort H avec sa trace $D^2 \cap H$, qui fait apparaître à nouveau la condition $H \cap D^2 \cap W_H = O$. — Dans la section 5 est présentée une généralisation de la décomposition en classes d'un groupe G par rapport à un sous-groupe S , lorsque G est remplacé par un demi-groupe D et S par un sous-demi-groupe fort de D vérifiant certaines propriétés supplémentaires.

L. Lesieur.

Sade, Albert: Contribution à la théorie des quasi-groupes: Diviseurs singuliers.
C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 372—374 (1953).

Sous le nom de diviseur quasi-normal d'un quasi-groupe Q , avec domaine de singularité S , l'A. considère une relation d'équivalence R vérifiant les propriétés:
1. $ac : bc(R)$ ou $ca : cb(R)$ implique $a : b(R)$ lorsque $a \notin S$ et $b \notin S$.
2. $a : c(R)$ et $b : d(R)$ impliquent $ab : cd(R)$ quand $ab \notin S$ et $cd \notin S$.
3. Si $a \in S$, on a $a : b(R)$ si et seulement si $b \in S$. S est donc une classe de R , dite singulière; les autres classes sont appelées régulières. L'A. énonce la propriété suivante: si Q est d'ordre fini, SX et XS sont régulières lorsque X est une classe régulière; si Y est régulière, XY est régulière si $XS = SY$. Il donne également une proposition faisant intervenir la notion d'autotopie de A. Albert, ou triple q, φ, χ d'applications biunivoques de Q sur lui-même vérifiant: $(q \ x)(\varphi \ y) = \chi \ x \ y$. Ces deux propositions sont énoncées sans démonstration.

L. Lesieur.

Sade, Albert: Contribution à la théorie des quasi-groupes: Quasi-groupes obéissant à la „loi des keys“ ou automorphes par certains groupes de permutations de leur support. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 420—422 (1953).

Suivant une expression de Mitsuhashi-Takasaki, la „loi des keys“ dans un quasi-groupe Q est la relation $(x \ y) \ y = x$. D'autre part, une „torsion“ de Q est une autotopie particulière (voir note précédente) réduite à une application biunivoque χ de Q sur lui-même vérifiant: $\chi \ x \ y = x \ y$. L'A. énonce une proposition concernant les autotopies de Q préservant la loi des keys: ce sont les produits d'autotopies du type (q, φ, q^{-1}) , ou du type torsion χ dans le cas $\chi[(\chi \ a) \ x] = a \ x$. Un exemple simple de quasi-groupe vérifiant la loi des keys est fourni par un groupe abélien avec la loi de composition $x \ y = a - x - y$. Dans ce cas la loi des keys est bilatère. Pour qu'une autotopie préserve la loi des keys bilatère dans un quasi-groupe Q qui la vérifie, et qui est par suite commutatif, il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'autotopies du type (q, φ, q^{-1}) et du type torsion indiqué plus haut. Un quasi-groupe est dit semi-groupe singulier s'il obéit à la loi associative $(x \ y) \ z = x \ (y \ z)$ à l'exception des cas où deux des éléments x, y, z sont égaux ou lorsque l'un d'eux est égal au produit des deux autres. L'A. étudie le semi-groupe singulier constitué par un quasi-groupe idempotent Q vérifiant la loi des keys bilatères et tel que $ab = cd$ implique $a \ d = c \ b$ quels que soient a, b, c, d , distincts deux à deux. La fin de la note se rapporte aux lois de composition qu'on peut introduire dans l'anneau R_n des entiers congrus modulo n ,

qui sont invariantes par le groupe des translations (et des transformations linéaires) de R_n , et qui font de R_n un quasi-groupe. L. Lesieur.

Teissier, Marianne: Sur les demi-groupes ne contenant pas d'élément idempotent. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1375—1377 (1953).

Im ersten Teil der Note gibt Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man eine kein idempotentes Element enthaltende Halbgruppe D mit Linksdivision auf eine ein idempotentes Element besitzende Halbgruppe homomorph abbilden kann. Die Bedingung ist die Existenz einer Unterhalbgruppe E in D mit den beiden Eigenschaften: aus $u \in E$, $xu \in E$ folgt $x \in E$, und $eaE \subseteq Ea$ gilt für jedes $ea \in ED$. (E ist eine Klasse beim Homomorphismus.) Im zweiten Teil wird durch ein Beispiel gezeigt, daß die minimalen Linksideale — falls sie kein idempotentes Element besitzen — nicht mehr isomorph zu sein brauchen.

L. Fuchs.

Magnus, W.: Errata: A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside. Ann. of Math., II. Ser. **57**, 606 (1953).

Vgl. dies. Zbl. **37**, 304.

Schiek, Helmut: Bemerkung über eine Relation in freien Gruppen. Math. Ann. **126**, 375—376 (1953).

Simple proof of the following fact: if x, y_1, y_2, \dots, y_n are elements of a free group, and if $\prod y_i^{-1} x^{e(i)} y_i = 1$, then $\prod x^{e(i)} = 1$. B. H. Neumann.

Lyndon, R. C.: On the Fouxé-Rabinovitch series for free groups. Portugaliae Math. **12**, 115—118 (1953).

Let F be the free group on s_1, s_2, \dots and R the ring of formal power series with integer coefficients in the (non-commuting) variables x_1, x_2, \dots . With each word w in the s_i and s_i^{-1} and each sequence of suffixes $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$, an integer $\pi_\sigma(w)$ is associated, the determinant of w for σ (cf. Fouxé-Rabinovitch, this Zbl. **23**, 14). These determinators are combined to form the power series $\pi(w) = \sum \pi_\sigma(w) x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_n}$ in R , and it is shown that $\pi(w)$ satisfies the following rules (which can also be used to define it):

1) $\pi(s_i) = x_i$, $\pi(s_i^{-1}) = -x_i$; 2) $1 + \pi(uv) = [1 + \pi(u)] [1 + \pi(v)\pi(u)]^{-1} [1 + \pi(v)]$.

Moreover, $\pi(w) = \pi(w')$ whenever $w = w'$ in F . — The representation $w \rightarrow \pi(w)$ is compared with the Magnus representation $w \rightarrow D(w)$ which satisfies $D(s_i) = x_i$, $1 + D(uv) = [1 + D(u)] [1 + D(v)]$. The author shows how the coefficients π_σ with $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$) can be expressed in terms of the D 's, and deduces from this Fouxé-Rabinovitch's result, that the representation $w \rightarrow \pi(w)$ is faithful. P. M. Cohn.

Krull, Wolfgang: Über gewisse Homomorphismen von Polynomgruppen. Math. Ann. **126**, 377—380 (1953).

A polynomial over a group G is an element of the free product $P = G * F_n$, where F_n is the free group freely generated by the „variables“ x_1, \dots, x_n . The polynomial $p \in P$ is said to have a „root“ if there is a homomorphism of P which maps G isomorphically and p on the unit element. Let γ be the endomorphism of P which maps G identically and F_n trivially, and let φ be the endomorphism of P which maps G trivially and F_n identically. The main result of the paper is the fact that $p \in P$ has a root if (1) γ maps p into the centre of G , and (2) φ maps p non-trivially. This generalizes a result of H. K. Schuff (this Zbl. **46**, 248). The author conjectures that condition (2) by itself is also sufficient, and that it is not necessary. [This last conjecture is confirmed by a result of G. Higman, B. H. Neumann, and H. Neumann, this Zbl. **34**, 301. Misprints: p. 377, line 8, for Y_1, \dots, Y_n read y_1, \dots, y_n ; p. 378, line 9, for $f(x)$ read $f(y)$; p. 379, line 33, for \in read \notin .]

B. H. Neumann.

Tsuboi, Teruo: Note on metabelian groups. Sci. Rep. Saitama Univ., Ser. A **1**, 59—62 (1953).

Let G be a metabelian group, finite or infinite, containing a normal abelian subgroup A with finite cyclic factor group. If Z_i ($i = 0, 1, 2, \dots$; $Z_0 = \{1\}$) denotes the i th term of the upper central series and G_i ($i = 1, 2, \dots$; $G_1 = G$) the terms of the lower central series, then $A/A \cap Z_i \cong G_{i+1}$ for $i = 1, 2, \dots$. This theorem is related to a result by H. F. Tuan (this Zbl. 40, 8) who proves these relations for a p -group G with abelian normal subgroup of index p .
Hanna Neumann.

Tsuboi, Teruo: On finite simple groups. Sci. Rep. Saitama Univ., Ser. A 1, 55—57 (1953).

Let H be a subgroup of order m of a finite simple group G . If the index of H is prime to both m and $q(m)$, then the order of every centre element of H is at most $\sqrt[m]{m}$. Reviewer's note: The author's theorem states „less than $\sqrt[m]{m}$ “; his proof establishes „at most $\sqrt[m]{m}$ “, and the A_5 shows that this is all that can be expected.

Hanna Neumann.

Kertész, A.: On a theorem of Kulikov and Dieudonné. Acta Sci. math. 15, 61 69 (1953).

Dans un p -groupe abélien G (noté additivement), l'A. dit qu'un élément a est de hauteur extérieure infinie s'il est de hauteur infinie, mais s'il existe un entier t tel que l'équation $p^t x = a$ n'admet que des solutions x de hauteur finie. Si B est un sous-groupe de G , l'A. appelle système principal un ensemble $P \subseteq B$ pseudolibre (i. e. tel que $\sum r_i a_i = 0$ entraîne $r_i a_i = 0$ pour tout i , si $a_i \in P$) maximal et tel qu'on ne puisse remplacer un élément de P par un élément de B de hauteur (dans G) strictement plus grande sans que le système cesse d'être pseudolibre. Il démontre alors le théorème suivant: pour que G soit décomposable en somme directe de sous-groupes indécomposables (qui sont nécessairement de type p^n ou du type p^∞ de Prüfer), il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées: 1. G ne contient pas d'élément de hauteur extérieure infinie; 2. il existe un sous-groupe B de G contenant un système principal; 3. G/B est somme directe de sous-groupes cycliques (d'ordre fini). Il montre que ce théorème contient les théorèmes mentionnés dans le titre comme cas particuliers, et qu'il n'est pas possible de supprimer une quelconque des trois conditions de l'énoncé.

J. Dieudonné.

Kochendörffer, Rudolf: Zur Theorie der Rédei'schen schiefen Produkte. J. reine angew. Math. 192, 96—101 (1953).

Ref. (dies. Zbl. 40, 299) hat das schiefe Produkt $G \circ F$ zweier Gruppen G, F mit den Elementen (a, α) ($\alpha \in G, \alpha \in F$) und der Produktregel $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$ allgemein untersucht, wobei $b^\alpha, \beta^\alpha, a^b, \alpha^b$ Funktionen der angegebenen Argumente mit Werten aus G bzw. F sind, und die Bedingungen dafür aufgestellt, daß $G \circ F$ eine Gruppe ist. Sind genau k der vier Relationen $b^\alpha = b, \beta^\alpha = e, a^b = e, \alpha^b = \alpha$ identisch erfüllt, wo e bzw. e das Einselement von G bzw. F ist, so heißt $G \circ F$ k -fach ausgeartet. Es gibt nur vier wesentlich verschiedene zweifach ausgeartete Fälle, die mit $G \circ F$ bis $G \circ F$ bezeichnet wurden, von denen die ersten zwei gerade die Schreierschen Erweiterungen von F mit G bzw. die Zappa-Szépschen Produkte von G und F darstellen. Verf. untersucht die übrigen zwei Spezialfälle $G \circ F, G \circ F$ ausführlich, in denen nämlich die Produktregel $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha \alpha^\beta, a^b \alpha^b \beta)$ bzw. $(ab^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$ gilt (in der ersten wurde α^β statt β^α geschrieben, was unwesentlich ist); er beschränkt sich dabei auf den Fall, daß (e, e) das Einselement ist. Er stellt fest, daß dann die durch $G \circ F, G \circ F$ gebildeten Gruppen sich auch als zweimal hintereinander ausgeführte Schreiersche Erweiterungen erzeugen lassen (von denen die eine in ein direktes Produkt ausarten kann), wobei jedesmal die bei den Erweiterungen auftretenden Bestimmungsstücke sich aus den Angaben G, F und aus den ebenfalls angegebenen Funktionen α^β, a^b bzw. b^α, α^b festlegen lassen. Und zwar werde bezüglich einer Gruppe $G \circ F$ mit G_1 bzw. F_1 die durch die α^β bzw. a^b erzeugte Untergruppe von G bzw. F bezeichnet. Es zeigt sich zunächst, daß $\alpha^{\alpha_1} = \alpha_1, a^{a_1} = a_1$ ($a_1 \in G, a_1 \in G_1, \alpha_1 \in F, \alpha_1 \in F_1$) gelten und G_1 bzw. F_1 im Zentrum von G bzw. F liegen. Die (a_1, α_1) bilden eine Untergruppe (G_1, F_1) von $G \circ F$, die im Zentrum liegt und isomorph dem direkten Produkt $G_1 \times F_1$ ist. Die Gruppe $G \circ F$ läßt sich als eine Schreiersche Erweiterung von (G_1, F_1) mit dem (ebenfalls) direkten Produkt

$G/G_1 \times \Gamma \Gamma_1$ erzeugen, wobei nur identische Automorphismen auftreten und auch das Faktorensystem leicht angebar ist. Außerdem wird noch $G \circ \Gamma$ und auch $G \rtimes \Gamma$ in zwei hintereinander ausgeführte Schreiersche Erweiterungen zerlegt. Ref. hält es für möglich, daß mit dem Verfahren des Verf. sich sogar jede Gruppe $G \circ \Gamma$ in einige hintereinanderfolgende Konstruktionen von der Art $G \rtimes \Gamma$, $G \rtimes \Gamma$ zerlegen läßt.

L. Rédei.

Rédei, L. und A. Stöhr: Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. Acta Sci. math. 15, 7–11 (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 40, 299) war der Spezialfall $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^b, \alpha^b \beta)$ der schiefen Produkte ausführlich behandelt worden. Es ist dies das Zappa-Szépsche Produkt. In der vorliegenden Arbeit wird das Produkt $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^b b, \alpha^b \beta)$ untersucht. Es ergibt sich, daß jedes derartige schiefe Produkt zu einem Zappa-Szépschen Produkt isomorph ist, aber nicht umgekehrt.

R. Kochendörffer.

Baer, Reinhold: Group elements of prime power index. Trans. Amer. math. Soc. 75, 20–47 (1953).

Sei eine endliche Gruppe; der Index in \mathcal{G} des Normalisators $\mathfrak{N}(S)$ eines Elementes $S \in \mathcal{G}$, also $[\mathcal{G} : \mathfrak{N}(S)]$ werde als Index von S bezeichnet. Gruppen \mathcal{G} , in denen gilt: „Hat das Element $S \in \mathcal{G}$ Primzahlpotenzordnung, so hat S auch Primzahlpotenzindex“ nennt der Verf. \mathfrak{Z} -Gruppen. Verf. gibt die vollständige Theorie der \mathfrak{Z} -Gruppen, die sich zusammenfassen läßt in den Satz: \mathcal{G} ist eine \mathfrak{Z} -Gruppe dann und nur dann, wenn \mathcal{G} das direkte Produkt von Gruppen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ ist, die folgende Eigenschaften haben: a) Die Ordnungen von \mathcal{G}_i und \mathcal{G}_j , $j \neq i$, sind prim zueinander. b) Wenn \mathcal{G}_i keine p -Gruppe ist, so ist die Ordnung von \mathcal{G}_i durch genau zwei verschiedene Primzahlen teilbar und die Sylowgruppen von \mathcal{G}_i sind abelsch; Normalteiler und Faktorgruppen von \mathfrak{Z} -Gruppen sind \mathfrak{Z} -Gruppen. Verf. untersucht dann den Hyperkommutator $C(\mathcal{G}) =$ Durchschnitt aller Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe, und das Hyperzentrum $H(\mathcal{G}) =$ Durchschnitt aller Normalteiler, deren Faktorgruppe das Zentrum 1 hat. Es ist $C(\mathcal{G}), H(\mathcal{G}) = 1$ und der Zentralisator von $C(\mathcal{G})$ ist nilpotent. $\mathcal{G}/C(\mathcal{G})$ ist nilpotent. Das Hyperzentrum ist nilpotent, $\mathcal{G}/H(\mathcal{G})$ hat das Zentrum 1. Verf. charakterisiert die Sylowgruppen von $H(\mathcal{G})$ und stellt Beziehungen zwischen Normalteilern und Hyperzentrum auf.

O. Grün.

Grün, O.: Beiträge zur Gruppentheorie. V. Über endliche p -Gruppen. Osaka math. J. 5, 117–146 (1953).

In this interesting paper, which is quite independent of the other papers of the author with the same title (Part IV, this Zbl. 37, 11), the author studies the (Ω, \mathcal{O}) structure of general p -groups of finite order. P. Hall (this Zbl. 7, 291) has shown that in a regular p -group the totality of elements X satisfying $X^{p^\mu} = 1$ forms a characteristic subgroup Ω_μ , and the totality of p^μ -th powers of elements in \mathcal{G} forms a characteristic subgroup \mathcal{O}_μ . The author generalizes these concepts for general p -groups, and proves various propositions on the (Ω, \mathcal{O}) structure. Let \mathcal{G} be a finite p -group of exponent p^* . If $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$ is a uniquely determined characteristic subgroup of a group \mathfrak{g} , and if \mathfrak{N} is a normal subgroup of \mathcal{G} , then the subgroup $\mathfrak{N}(\mathcal{G} \div \mathfrak{N})$ is defined to be the subgroup of \mathcal{G} containing \mathfrak{N} such that $\mathfrak{N}(\mathcal{G} \div \mathfrak{N})/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathcal{G}/\mathfrak{N})$. The upper central series $\mathfrak{Z}_i(\mathcal{G}) = \mathfrak{Z}_i$ of \mathcal{G} may be defined by $\mathfrak{Z}_1(\mathcal{G})$ is the center of \mathcal{G} , and $\mathfrak{Z}_{i+1} = \mathfrak{Z}_i(\mathcal{G} \div \mathfrak{Z}_i)$. A maximal subgroup $\Omega_\mu(\mathcal{G}) = \Omega_\mu$ is defined to be a subgroup of exponent p^μ which is not a proper subgroup with the same exponent. Dually $\mathcal{O}_\mu(\mathcal{G}) = \mathcal{O}_\mu$ is a maximal subgroup consisting of p^μ -th powers of elements in \mathcal{G} . In general these subgroups are not unique, nor even normal, but the normalizers of these subgroups contain \mathfrak{Z}_ν . The intersection of all $\Omega_\mu(\mathcal{G})$'s ($\mathcal{O}_\mu(\mathcal{G})$'s) (for a fixed μ) is denoted by $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathcal{G}) = \mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathfrak{Z}_{p^\mu}^*(\mathcal{G}))$, which is clearly characteristic. It is proved that $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathcal{G}) \supseteq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1})$ and $\mathfrak{D}_{1, p^\mu}^*(\mathcal{G}) \supseteq \mathcal{O}_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1})$. A new series of characteristic subgroups $\mathfrak{D}_{1, p^\mu} \subset \mathfrak{D}_{2, p^\mu} \subset \dots \subset \mathcal{G}$ is defined by $\mathfrak{D}_{i, p^\mu} = \mathfrak{D}_{1, p^\mu}(\mathcal{G} \div \mathfrak{D}_{i-1, p^\mu})$, and its various properties are discussed. If \mathfrak{N} and \mathfrak{R} are normal subgroups of \mathcal{G} , and if \mathfrak{R} is regular, then $(\mathfrak{Z}_1(\mathcal{G} \div \mathfrak{D}_{i, p^\mu}(\mathfrak{N})), \mathcal{O}_\mu(\mathfrak{R})) = 1$. The totality of elements $T \in \mathcal{G}$ such that $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu} T^{p^\mu}$ (or $(ST)^{p^\mu} = S^{p^\mu}$) for every $S \in \mathcal{G}$ and for a fixed μ , is denoted by $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}^*(\mathcal{G}) = \mathfrak{U}_{1, p^\mu}^*$ [or $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}(\mathcal{G}) = \mathfrak{U}_{1, p^\mu}$ resp.]. Both $\mathfrak{U}_{1, p^\mu}^*$ and \mathfrak{U}_{1, p^μ} are characteristic subgroups of \mathcal{G} , which coincide with $\mathfrak{Z}_1(\mathcal{G} : \Omega_\mu)$ and Ω_μ resp. in the case of regular p -groups. Various properties are proved: e.g. $\mathfrak{U}_{1, p^\mu} \subseteq \mathfrak{Z}_1(\mathcal{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu})$, $\mathfrak{U}_{1, p^\mu} \supseteq \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_{p-1})$, $(\mathfrak{U}_{1, p^\mu}^*, \Omega_\mu(\mathcal{G})) = 1$, $(\mathcal{O}_\mu(\mathcal{G}), \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathcal{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu}^*))) = 1$ and $(\Omega_\mu(\mathcal{G}), \mathcal{O}_\mu(\mathfrak{Z}_1(\mathcal{G} \div \mathfrak{U}_{1, p^\mu}))) = 1$. The last two relations present the duality of an order-power structure of finite groups remarked by P. Hall (this Zbl. 23, 299). This duality appears also in the relation $(\mathcal{O}_\mu(\mathcal{G}), \Omega_\mu(\mathfrak{Z}_\nu(\mathcal{G}))) = (\mathcal{O}_\nu(\mathfrak{Z}_\mu(\mathcal{G})), \Omega_\mu(\mathcal{G})) = 1$. A series of characteristic subgroups $\mathfrak{Z}_{1, p^\mu} \subset \mathfrak{U}_{2, p^\mu} \subset \dots \subset \mathfrak{U}_{\varrho, p^\mu} = \mathcal{G}$ is defined inductively by $\mathfrak{U}_{\nu, p^\mu}(\mathcal{G}) = \mathfrak{U}_{1, p^\mu}(\mathcal{G} \div \mathfrak{U}_{\nu-1, p^\mu}(\mathcal{G}))$. The length of this series $\varrho = \varrho(\mu, \mathcal{G})$ is an invariant of \mathcal{G} . The author proves that if there is an upper bound $\varrho(\mu, \kappa, \alpha)$ such that $\varrho(\mu, \mathcal{G}) \leq \varrho(\mu, \kappa, \alpha)$ for all p -groups \mathcal{G} of exponent p^* and with α

generators, then the Burnside's conjecture for p^* can be reduced to the corresponding one for p^u . The question of the existence of such a bound is not discussed. Let $\mathfrak{G}(p^u, 0) = \mathfrak{G}$, and $\mathfrak{G}(p^u, v)$ be the subgroup generated by all p^u -th powers of elements of $\mathfrak{G}(p^u, v-1)$. Then the following commutativity relation is true: $(\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}_{v,p^u}))$, $\mathfrak{G}(p^u, v) = 1$. Several relations concerning the power groups $\mathfrak{G}(p^u, v)$ and the upper central series are proved, e. g., $(\mathfrak{Z}_v(\mathfrak{G}(p^u, v)) \subset \mathfrak{Z}_{v-1}(\mathfrak{Z}_{p-1})$. Many commutativity relations are generalized to the relations involving the terms of upper and lower central series, and they may be considered as generalizations of Hall's results on regular p -groups. In the course of proofs frequent use is made of the results of P. Hall.

M. Suzuki.

Mattioli, Ennio: Altri teoremi di copertura dei gruppi. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 43—52 (1953).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der früheren Forschungen des Verf. (dies. Zbl. 37, 12; 44, 15; 48, 14). Die Hauptergebnisse sind: 1. Bezeichne μ die Menge der Variationen N -ter Klasse von P Elementen mit Wiederholung (die Anzahl der Variationen ist P^N), wo $P = p^k$ (p eine Primzahl) und $N = (P^k - 1)/(P - 1)$ ($k \geq 2$). Aus μ können wir dann P^{N-k} Variationen auswählen, so daß jede andere Variation von einer aus diesen ausgewählten nur in einem einzigen Element sich unterscheidet [s. noch S. K. Zarembka, dies. Zbl. 42, 24; J. London math. Soc. 27, 242—246 (1952)]. 2. Seien gegeben M Mengen, jede mit P Elementen, weiter $(N - M)n$ Mengen, jede mit p Elementen, p ist eine Primzahl, $n = (p^k - 1)/(p - 1)$, $P = p^k$, $N = (P^k - 1)/(P - 1)$, $k, k \geq 2$. Dann können wir aus diesen Mengen $P^M \cdot p^{N-M}$ Anordnungen bilden, so daß aus jeder Menge ein Element ausgewählt wird. Aus diesen $P^M \cdot p^{N-M}$ Anordnungen können wir $P^{N-k} \cdot (p^{n-k})^{N-M}$ Anordnungen auswählen, so daß jede andere Anordnung von einer aus diesen ausgewählten nur in einem einzigen Element sich unterscheidet. Der Beweis dieser Ergebnisse geschieht mit Hilfe solcher Abelschen Gruppen G von Typus $(1, 1, \dots, 1)$ mit Ordnung p^n und mit Generatoren R_1, R_2, \dots, R_n für die eine Zerlegung $G = Q \cdot \sum Q R_i^\alpha$ ($i = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, p-1$) mit Untergruppe $Q \subset G$ gilt. Am Ende der Arbeit wirft der Verf. das Existenzproblem solcher Abelschen Gruppen G vom Typus $(1, \dots, 1)$ mit Ordnung p^n mit Generatoren R_1, \dots, R_n auf, für die eine Zerlegung $G = Q \cdot \sum Q R_i^\alpha \cdot \sum Q R_j^\beta R_j^\gamma$ ($i, j = 1, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, p-1$) mit Untergruppe $Q \subset G$ gilt. Mit Hilfe solcher Gruppen kann man die obigen Ergebnisse weiter verallgemeinern. Verf. gibt ein Beispiel für $n = 11$, $p = 3$, $k = 5$.

J. Szék.

Zacher, Giovanni: Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 113—122 (1953).

A finite group G is seen to be solvable if and only if $G = N_r$ for some r , where the subgroups N_i are defined recursively by $N_0 = 1$, $N_i N_{i-1} =$ the maximal normal special subgroup of G/N_{i-1} . G is called complemented if to every subgroup H of G there corresponds a subgroup K such that G is generated by H and K , and the intersection of H and K is 1. The author proves that a finite solvable group is complemented if and only if $N_i N_{i-1}$ is generated by minimal normal subgroups of G/N_{i-1} and the Frattini subgroup of G/N_{i-1} is the identity subgroup, $i = 1, 2, \dots, r$.

D. G. Higman.

Bruijn, N. G. de: On the factorization of cyclic groups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 56, 370—377 (1953).

Fortsetzung für den zyklischen Fall der auf die Faktorisierung von endlichen Abelschen Gruppen bezüglichen Untersuchungen des Verf. (s. dies. Zbl. 50, 257). Das Hauptresultat ist, daß die zyklischen Gruppen von der Ordnung $p^2 q$ (p, q verschiedene Primzahlen) „gut“ sind. Wegen früherer Resultate von Hajós und vom Ref. bleiben dann nur noch die Ordnungen $p^2 q^2$, $p^2 q r$, $p q r s$ kritisch (p, q, r, s verschiedene Primzahlen). Verf. verwendet zu den Untersuchungen den folgenden Satz des Ref. (dies. Zbl. 29, 109): Bezeichnet R den Ring der ganzen Zahlen und $F_n(x) (= R[x])$ das n -te Kreisteilungspolynom, so sind die Polynome $G_{n,p}(x) = (x^n - 1)/(x^{n/p} - 1)$ (p Primzahl) Erzeugende des Hauptideals $(F_n(x))$. [Er bemerkt, daß der Beweis des Ref. ungenügend war, und führt einen Beweis aus. Inzwischen erschien vom Ref. in den Acta Math. Acad. Sci. Hung., 5, 27—28 (1954), ein kurzer Beweis für den Satz.] Verf. verfeinert diesen Satz für seine Zwecke in Spezialfällen. So z. B., wenn $n = p^2 q^u$ ($u \geq 1$; p, q verschiedene Primzahlen) ist, ferner $A(x) (= F_n(x))$ einen kleineren Grad als n und lauter nichtnegative Koeffizienten hat, so hat $A(x) = G_{n,p}(x) P(x) + G_{n,q}(x) Q(x)$ eine Lösung $P(x), Q(x) (\in R[x])$ mit ebenfalls nichtnegativen Koeffizienten. Die Arbeit enthält noch mehrere interessante Bemerkungen und Vermutungen.

L. Rédei.

Itô, Noboru: On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. *Acta Sci. math.* **15**, 79—84 (1953).

Definitionen, einfache Tatsachen: Ist $G = HK$ eine Faktorisierung der Gruppe G , so ist auch $G = xHx^{-1}yKy^{-1}$ eine Faktorisierung von G , wo H, K eigentliche Untergruppen von G sind, $x, y \in G$. Die Untergruppen H, K sind die Faktoren der Faktorisierung. Man nennt $G = HK = H'K'$ äquivalent, wenn H, H' bzw. K, K' konjugiert sind. Die Faktorisierung $G = HK$ ist eine maximale Sylow-Faktorisierung, wenn $(H:1, K:1) = 1$, H und K maximale Untergruppen von G sind. Verf. gibt sämtliche (nicht äquivalente) Faktorisierungen von $LF(2, p^n)$ an. Ergebnisse: a) Die Gruppen $LF(2, p^n)$ mit $p^n \equiv 3 \pmod{4}$ [mit Ausnahmen von $LF(2, 3)$, $LF(2, 7)$] haben eine maximale Sylow-Faktorisierung, in welcher kein Faktor ein Normalteiler von G ist. Aus einem Satz des Ref. (dies. Zbl. **42**, 22) folgt sofort, daß diese Gruppen einfach sind. b) Die Gruppen $LF(2, p^n)$ mit $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ [mit Ausnahme von $LF(2, 5)$, $LF(2, 3^2)$, $LF(2, 29)$] haben keine Faktorisierung. Diese Gruppen können dann eine Faktor in der in einer anderen Arbeit vom Ref. erwähnten exceptionellen Faktorisierung sein (dies. Zbl. **43**, 259). Detaillierung: $LF(2, 2^n)$ $n \geq 2$, $LF(2, 5)$ haben 2 nicht äquivalente Faktorisierungen (n. e. F.); $LF(2, 19)$, $LF(2, 23)$ haben 3 n. e. F.; $LF(2, 29)$ hat 4 n. e. F.; $LF(2, 7)$ hat 5 n. e. F.; $LF(2, 11)$ hat 6 n. e. F.; $LF(2, 3^2)$ hat 7 n. e. F.; die andern haben 1 n. e. F. *J. Szép.*

Gamba, Augusto e Luigi A. Radicati: Sopra un teorema per la riduzione di talune rappresentazioni del gruppo simmetrico. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **14**, 632—634 (1953).

Verff. beweisen einen Satz, der die irreduziblen Bestandteile des direkten Produktes der Darstellung $(N-1, 1)$ der symmetrischen Gruppe γ_N von N Elementen mit einer beliebigen Darstellung der γ_N durch ein einfaches graphisches Anlegenverfahren liefert. Dieser Fall ist für die Auswahlregeln von Kernprozessen von Bedeutung. *F. L. Bauer.*

Mackey, George W.: Symmetric and anti symmetric Kronecker squares and intertwining numbers of induced representations of finite groups. *Amer. J. Math.* **75**, 387—405 (1953).

Diese Arbeit bildet eine Fortsetzung einer Arbeit des Verf. [*Amer. J. Math.* **73**, 576—592 (1951)]. Dort hat er einen Fundamentalsatz aufgestellt, der gewisse Resultate von Frobenius, Shoda und Artin über die induzierten Darstellungen einer endlichen Gruppe als spezielle Fälle enthält. In dieser Arbeit erhält der Verf. einen analogen Satz über die symmetrischen und schiefsymmetrischen Komponenten des Kroneckerschen Quadrates einer induzierten Darstellung. Dadurch wird der oben erwähnte Satz so verallgemeinert, daß er auch gewisse Resultate von Frame (dies. Zbl. **27**, 152; **32**, 248) und Wigner (dies. Zbl. **24**, 253) enthält. *K. Shoda.*

Ellis, David: On metric representations of groups. *Math. Mag.* **26**, 183—184 (1953).

Let G be a countable group, $B(G)$ the metric Baire space on G . For g in G , and $X = (x_1, x_2, \dots)$ in $B(G)$, define $gX = (gx_1, gx_2, \dots)$. Then the mapping g into gX is an isomorphism of G into the group of motions of $B(G)$. *D. G. Higman.*

Freudenthal, Hans: Sur le groupe exceptionnel E_8 . *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 95—98 (1953).

Dies ist eine aus einer Reihe von Noten des Verf., in denen er neue Darstellungen für die Killing-Cartanschen einfachen Ausnahmegruppen angibt. In der vorliegenden Note werden die folgenden zwei- bzw. dreistufigen, neun-dimensionalen Tensoren durch die (quadratischen, bzw. kubischen) neunreihigen Matrizen mit variablen Elementen: $X = (x_{ij}^t)$ mit der Spur $x_{ii}^t = 0$ (80 Parameter), $X_* = (x_{ijk})$, $X^* = (x^{ijk})$ schiefsymmetrisch (also je 84 Parameter), eingeführt. Insgesamt hat man so ein System mit 248 unabhängigen Parametern. In diesem werden Klammerrelationen (Kommutatoren) definiert, z. B. $[X, Y] = Z: z_{ij}^t = x_{ij}^\alpha y_{\alpha}^t - y_{ij}^\alpha x_{\alpha}^t$, d. i. der gewöhnliche Kommutator der beiden Matrizen X, Y , $[X, Y_*] = Z_*: z_{ijk} = \frac{1}{2} I_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} x_{\alpha}^\delta y_{\beta\gamma\delta}$, usw., wo $I_{ijk}^{\alpha\beta\gamma}$ das Permutationssymbol der Tensoralgebra bedeutet. Mit Rücksicht auf diese Definition der Klammern werden für alle möglichen Kombinationen von je drei Matrizen der verschiedenen Typen die Jacobischen Identitäten bewiesen und für die hiernach durch die X, X_*, X^* dargestellte Liesche Algebra L_{248} die adjungierte Gruppe und ihre quadratische Invariante berechnet.

Die Diagonalmatrizen $X = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$) erzeugen eine reguläre maximale abelsche Untergruppe, und für die X_* , bzw. X^* , in denen nur das Element $x_{i,jk}$, bzw. x^{ijk} von Null verschieden ist, ergeben sich $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k$, bzw. $-\lambda_i - \lambda_j - \lambda_k$ als Wurzelformen; zusammen mit den Formen $\lambda_i - \lambda_j$ der von den X erzeugten speziellen linearen Gruppe sind dies die Wurzelformen von E_6 .
H. Schwerdtfeger.

Est. W. T. van: Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 484–492, 493–504 (1953).

Verf. untersucht die Beziehungen zwischen den Cohomologiegruppen der Lieschen Gruppen und der dazugehörigen Lieschen Ringe. Die Formeln für die Ableitungsoperatoren unterscheiden sich nicht wesentlich von denen von Koszul (dies. Zbl. 39, 29). Die Beziehung wird hergestellt durch eine Transgression in einem Komplex mit Filtration, der als „bicochain complex“ eingeführt wird.

H. Guggenheimer.

Verbände. Ringe. Körper:

Northam, E. S.: The interval topology of a lattice. Proc. Amer. math. Soc. 4, 824–827 (1953).

Teillösungen der Probleme 21, 76 und 104 von G. Birkhoff. Lattice theory (rev. ed., New York 1948, dies. Zbl. 33, 101).
G. Nöbeling.

Hanai, Sitiro: On commutative T -closure operators. Kodai math. Sem. Reports 1, 17–19 (1953).

Einen finit supremumtreuen Hüllenoperator q eines vollständigen Verbandes S bezeichnet Verf. als „ T -closure operator“. Es werden Bedingungen für die Vertauschbarkeit zweier solcher Operatoren, q und η , untersucht. Die interessanteste ist die folgende, zugleich notwendige und hinreichende: ist das q -abgeschlossene Element a mit dem η -abgeschlossenen Element b vergleichbar, so gibt es zwischen a und b wenigstens ein zugleich q - und η -abgeschlossenes Element c . Anwendung: jede maximale Menge paarweise vertauschbarer T -closures ist ein vollständiger Verband, dessen eine Verbandsoperation mit der des vollständigen Verbandes aller T -closures übereinstimmt.

Jürgen Schmidt.

Schützenberger, Marcel Paul: Le problème des mots dans les treillis modulaires libres. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 507–508 (1953).

Solution, exposée dans ses grandes lignes, du problème 28 de G. Birkhoff [Lattice theory, rev. ed., New York 1948 (s. Zbl. 33, 101), p. 70] concernant les „mots“ dans un treillis modulaire libre.

L. Lesieur.

• **Dubreil-Jacotin, M. L., L. Lesieur et R. Croisot:** Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Préface de Gaston Julia. (Cahiers Scientifiques, Fasc. XXI.) Paris: Gauthier-Villars 1953. VIII, 385 p. Fr. 5500, —.

Das Buch ist aus Vorlesungen der Verf. an der Universität Pontiers hervorgegangen. Es soll kein vollständiges Lehrbuch der Verbandstheorie sein; es will vielmehr nur den Leser zum Verstehen der Originalarbeiten auf diesem Gebiet befähigen und darüber hinaus einige Sondergebiete ausführlich darstellen. — In dem von R. Croisot verfaßten ersten Teil (S. 1–126) werden demgemäß die Grundbegriffe der Verbandstheorie entwickelt. Als Besonderheiten sind zu erwähnen: Ausführliche Berücksichtigung der Halbverbände; eine von jeder Endlichkeitsvoraussetzung freie Definition der halbmodularen Verbände; eine Theorie der Unabhängigkeit in allgemeinen Verbänden, welche dann für modulare Verbände den Satz von Kurat-Ore liefert. Der Satz von Zorn wird ohne Zurückführung auf das Auswahlaxiom benutzt. Die Darstellung distributiver Verbände durch Mengenvverbände sowie die Theorie der Booleschen Verbände werden nicht behandelt. — Der zweite, von M. L. Dubreil-Jacotin verfaßte Teil (S. 127–247) beschäftigt sich hauptsächlich mit teilweise geordneten (—) algebraischen Strukturen mit einer einzigen (multiplikativ geschriebenen) binären Verknüpfung, welche die Bedingung erfüllt: $ac \leq bc$ und $ca \leq cb$, falls $a \leq b$ (groupoïdes ordonnés). Besonders wichtig sind unter diesen einerseits die als „gerbiere“ bezeichneten Halbverbandshalbgruppen (Halbverband bez. der teilweisen Ordnung, Multiplikation assoziativ), andererseits die groupoïdes résiduels, bei denen es zu Elementen a, b ein größtes x mit $a x = b$ und $y a = b$ gibt. Während in den Kapiteln I und II die allgemeine Theorie dieser Begriffe gegeben wird, handelt Kapitel III von den Kongruenzen, d. h. den mit den Verknüpfungen verträglichen

Äquivalenzrelationen einer algebraischen Struktur, insbesondere einer Halbgruppe. In Kapitel IV wird zuerst für Halbgruppen der Begriff des Idealkomplexes als Verallgemeinerung des Normalteilerbegriffes bei Gruppen eingeführt, und es werden Bedingungen angegeben, unter denen der Verband der Idealkomplexe einer Halbgruppe modular ist. Ferner werden Ideale von Halbverbänden und Halbverbandsgruppen betrachtet, sowie für beliebige algebraische Strukturen Verallgemeinerungen der Sätze angegeben, welche für Halbgruppen und (nicht notwendig assoziative) Ringe besagen, daß die Ideale eine Verbandshalbgruppe bzw. einen multiplikativen Verband bilden. Im Mittelpunkt von Kapitel V stehen die Dedekindschen Halbgruppen; das sind teilweise geordnete Halbgruppen mit größtem und zugleich neutralem Element e , welche die folgende Eigenschaft besitzen: Jedes Element $\neq e$ läßt sich auf genau eine Weise als Produkt von untereinander vertauschbaren primen Elementen darstellen, die untere Nachbarn von e sind; dabei heißt p prim, wenn aus $xy \leq p$ stets $x \leq p$ oder $y \leq p$ folgt. Eine Halbverbands-halbgruppe mit größtem und zugleich neutralem Element e , bei der die unteren Nachbarn von e untereinander vertauschbar sind, ist genau dann eine Dedekindsche Halbgruppe, wenn sie die O -Kettenbedingung erfüllt und zu a, b mit $a \leq b < e$ stets ein $c > a$ mit $a = bc$ vorhanden ist. Die angegebenen Beispiele Dedekindscher Halbgruppen sind — der Zielsetzung des Buches entsprechend — nicht konkreter Art; so besteht das eine Beispiel darin, daß der folgende Satz bewiesen wird: In einer Verbandsgruppe ist die Unterhalbgruppe der Elemente $\leq e$ (= neutrales Element) genau dann eine Dedekindsche Halbgruppe, wenn sie die O -Kettenbedingung erfüllt. Das Kapitel VI beschäftigt sich mit Homomorphismen einer Verbandshalbgruppe, insbesondere mit solchen auf Dedekindsche Halbgruppen. — Im dritten Teil (S. 249—373) stellt L. Lesieur die Theorie der geometrischen Verbände, also der als Verbände betrachteten projektiven und affinen Räume dar. In Kapitel I werden die geometrischen Verbände endlicher Dimension eingeführt als Verbände mit kleinstem und größtem Element, in denen jedes Element Vereinigung von endlich vielen Punkten (= obere Nachbarn des kleinsten Elementes 0) ist und für jeden Punkt p aus $a \leq b$ stets $(a \cup p) \cap b = a \cup (p \cap b)$ folgt. Es zeigt sich, daß dies gerade die halbmodularen, relativ komplementierten Verbände endlicher Länge sind. In Kapitel II wird der allgemeinere Begriff des geometrischen Verbandes so eingeführt, daß er mit dem MacLaneschen Begriff des Austauschverbandes übereinstimmt: Man läßt in der obigen Definition die Worte „endlich vielen“ fort und fordert noch, daß die Vereinigung einer beliebigen Menge von Punkten stets vorhanden ist und ein in ihr enthaltener Punkt bereits in einer Vereinigung von endlich vielen der Punkte liegt. Die O - sowohl wie die U -Kettenbedingung besagt dann gerade, daß der geometrische Verband endliche Dimension hat. In einem geometrischen Verband heißt a parallel zu b , wenn $a \cap b = 0$ und $a \cup b$ oberer Nachbar von a ist. In Kapitel III werden die projektiven Geometrien eingeführt als die geometrischen Verbände, in denen für die Hyper-ebenen (= untere Nachbarn des größten Elements) h aus $b \leq a$ stets $(a \cap h) \cup b = a \cap (h \cup b)$ folgt. Diese Zusatzforderung ist gleichbedeutend mit der Modularität des geometrischen Verbandes. Im Falle endlicher Dimension sind die projektiven Geometrien gerade die modularen komplementierten Verbände. In der üblichen Weise werden die projektiven Geometrien auch von den Punkten und ihren oberen Nachbarn, den Geraden her beschrieben. Jede projektive Geometrie ist direkte Vereinigung irreduzibler projektiver Geometrien, und eine projektive Geometrie ist genau dann irreduzibel, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält. Nur im Falle endlicher Dimension ist der zu einer irreduziblen projektiven Geometrie duale Verband wieder eine solche. Das Kapitel IV beschäftigt sich mit den affinen Geometrien. Unter einer solchen versteht man eine abgeschwächte projektive Geometrie (d. h. in der Definition der projektiven Geometrie ist noch die Voraussetzung $a \cap h \neq 0$ einzufügen) von einer Dimension ≥ 2 (im geometrischen Sinn!), in der zu einer Geraden g und einem nicht auf g liegenden Punkt p stets genau eine zu g parallele Gerade durch p vorhanden ist. Wird in dieser Definition, falls die Dimension ≥ 3 ist, „genau“ durch „höchstens“ ersetzt, so entsteht der Begriff der verallgemeinerten affinen Geometrie. Eine nichtprojektive verallgemeinerte affine Geometrie ist stets irreduzibel und kann in eine irreduzible projektive Geometrie gleicher Dimension eingebettet werden; diese Einbettung geschieht durch Hinzufügen der Klassen untereinander paralleler Elemente. Das von den affinen Ebenen, d. h. den zweidimensionalen affinen Geometrien handelnde Kapitel V fällt naturgemäß aus dem verbandstheoretischen Rahmen des Buches heraus. Nach M. Hall wird die Koordinatendarstellung der Geraden einer affinen Ebene mittels einer ternären Verknüpfung angegeben; übrigens sind dabei in Fig. 65 versehentlich die Punkte P und Q miteinander verwechselt. Bei der Beschreibung des zwischen den Translationsebenen, d. h. den affinen Ebenen mit affinem kleinen Desarguesschen Satz (Achse und Zentrum uneigentlich), und den Veblen-Wedderburn-Systemen (als Koordinatenbereichen) bestehenden Zusammenhangs wird in Lemma 4 der affine kleine Desarguessche Satz unnötigerweise noch für eine dritte Richtung vorausgesetzt. Die desarguesschen (arguésiennes) affinen Ebenen werden als affine Ebenen mit affinem Desarguesschen Satz (Achse uneigentlich) erklärt und die übliche Koordinatendarstellung durch Schiefkörper hergeleitet. Das bekannte Beispiel eines Veblen-Wedderburn-Systems aus 9 Elementen, welches kein Schiefkörper ist, zeigt die Existenz endlicher nichtdesarguesscher affiner Ebenen. Den Schluß des Kapitels bilden die Gleichwertigkeit des kommutativen Gesetzes für die Multiplikation im Koordinatenschiefkörper mit dem affinen Satz von Pappos und die

Hessenbergsche Herleitung des affinen Desarguesschen Satzes aus dem affinen Satz von Pappos; dabei wird endlich eine Lücke in der Hessenbergschen Herleitung ausgefüllt. Kapitel VI zeigt, daß die affinen und die irreduziblen projektiven Geometrien einer Dimension ≥ 3 in der üblichen Weise durch Vektorräume dargestellt werden können. — Das Buch vermittelt in ansprechender Form und ausführlicher Darstellung eine Fülle von Kenntnissen. Ein großer Teil des behandelten Stoffes ist bisher noch nicht buchmäßig dargestellt worden, und manches davon wird hier wohl überhaupt zum ersten Male veröffentlicht. Jedem Kapitel sind Aufgaben beigelegt, welche Beispiele und Ergänzungen liefern. Die Literaturangaben beschränken sich auf solche Arbeiten, die noch nicht in der „Lattice theory“ von G. Birkhoff (rev. ed., New York 1948, dies. Zbl. 33, 101) genannt sind. G. Pickert.

Vorob'ev, N. N.: Über Kongruenzen in Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 607—608 (1953) [Russisch].

The author observes that the set of congruence relations on an abstract algebra A (cf. Birkhoff, Lattice Theory, revised ed. New York 1948, this Zbl. 33, 101) consists of exactly those equivalences on A which, qua subset of $A \times A$, form a subalgebra of $A \times A$. When partially ordered by inclusion, the set of subalgebras of $A \times A$ forms a complete lattice; the author gives an example (with the additive semigroup of positive integers as algebra) to show that the set of congruences need not be a sublattice of this lattice, and asks for necessary and sufficient conditions on an algebra A for the set of congruences of A to be a sublattice of the lattice of subalgebras of $A \times A$. P. M. Cohn.

Foster, Alfred L.: Generalized „Boolean“ theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. Math. Z. 59, 191—199 (1953).

The author generalizes some of the results of Part I (this Zbl. 51, 22) by using slightly more general definitions. If A is a functionally strictly complete algebra (i. e. if A is finite and if every mapping of $A \times A \times \dots$ into A can be expressed in terms of the operations of A) and if A has at least two elements, then an algebra A (of the same species as A) with ≥ 2 elements is a „normal subdirect sum“ of A if and only if each strict identity of A is also an identity of A . He deduces that the set of strict identities holding in a functionally strictly complete algebra of ≥ 2 elements cannot be enlarged. P. M. Cohn.

Zassenhaus, Hans: Trace functions on algebras with prime characteristic. Amer. math. Monthly 60, 685—692 (1953).

Let A be an associative algebra over a field F of characteristic p and let Ω be an algebraically closed extension of F . Then a function f on A with values in Ω is called a trace function if it has the properties:

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(\lambda a) = \lambda f(a), \quad f(ab) = f(ba), \quad f(a^p) = f(a)^p$$

for $a, b \in A$ and $\lambda \in F$. The author shows that these trace functions are the traces of the representations of A by (finite) matrices with coefficients in Ω and that there are p trace functions for each completely irreducible representation. This result is used to give another proof of the theorem of R. Brauer (this Zbl. 10, 344) that the number of distinct irreducible modular representations (for characteristic p) of a finite group G is equal to the number of classes of conjugate elements of G which contain elements whose orders are prime to p . F. W. Pönting.

Tomber, Marvin L.: Lie algebras of type F . Proc. Amer. math. Soc. 4, 759—768 (1953).

Let \mathfrak{L} be a Lie algebra over a field Φ of characteristic 0. Then \mathfrak{L} is said to be of type F , if the algebra \mathfrak{L}_Ω obtained by extending Φ to its algebraic closure Ω , is the exceptional simple Lie algebra F_4 of dimension 52 over Ω . The author shows that a Lie algebra \mathfrak{L} over a field Φ (of characteristic 0) is of type F if and only if it is isomorphic to $\mathfrak{L}(\mathfrak{J})$, the derivation algebra of an exceptional simple Jordan algebra \mathfrak{J} over Φ . An essential step in the proof is Theorem 1: If \mathfrak{J} is the exceptional simple Jordan algebra over an algebraically closed field of characteristic 0, then every automorphism of its derivation algebra $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ has the form $D \rightarrow SDS^{-1}$ for a unique automorphism S of \mathfrak{J} . The rest of the proof follows Jacobson's characterization (this Zbl. 22, 198) of Lie algebras of type G as the derivation algebras of Cayley algebras over Φ . — In the

case of a real closed field there are known to be three non-isomorphic Lie algebras of type F (Cartan), and the corresponding non-isomorphic exceptional simple Jordan algebras are determined here. They are the Jordan algebras formed (in the usual way) from the two Cayley algebras over Φ , and the Jordan algebra formed from the Cayley division algebra with the transposition rule $X' = P^{-1} X P$, where P is the 3×3 diagonal matrix with elements 1, -1 , -1 .
P. M. Cohn.

Schafer, R. D.: The Casimir operation for alternative algebras. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 444—451 (1953).

Diese Arbeit entstand aus dem Bestreben, mit Hilfe einer passenden Verallgemeinerung der Casimirschen Operation einen einfacheren Beweis des Wedderburnschen Hauptsatzes der alternativen Algebren zu gewinnen. Es sei \mathfrak{A} eine halbeinfache alternative Algebra endlicher Dimension über einem Körper F von der Charakteristik 0. (S, T) eine Darstellung von \mathfrak{A} und \mathfrak{K}_S die Menge aller $x \in \mathfrak{A}$ mit $S_x = 0$. Jeder Basis u_1, \dots, u_h des komplementären Ideals \mathfrak{K}_S von \mathfrak{K}_S (in \mathfrak{A}) entspricht eine duale Basis u_1^*, \dots, u_h^* mit der Eigenschaft: Spur $S_{u_i} u_j^* = \delta_{ij}$ (Kroneckersches Symbol). Die Casimirsche Operation ist als der Endomorphismus

$F_S = \sum_{i=1}^h S_{u_i^*} S_{u_i}$ definiert; es wird bewiesen, daß sie mit S_a und T_a für jedes

$a \in \mathfrak{A}$ vertauschbar ist. Ferner beweist Verf. eine schwächere Form des zweiten Whiteheadschen Lemmas und zeigt, daß diese einige Vereinfachungen im Beweis des Wedderburnschen Hauptsatzes zuläßt.
L. Fuchs.

Schafer, R. D.: A generalization of a theorem of Albert. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 452—455 (1953).

A. A. Albert hat kürzlich bewiesen (dies. Zbl. **46**, 36), daß jeder endliche potenzassoziative Schiefkörper von der Charakteristik > 5 notwendigerweise kommutativ ist. Verf. verallgemeinert dieses Resultat für endliche Ringe \mathfrak{R} , die potenzassoziativ sind und kein Element mit additiver Ordnung 2, 3 oder 5 besitzen, indem er zeigt: wenn für jedes Element a von \mathfrak{R} eine Gleichung von der Form $a^{n(a)} = a$ mit irgendeiner natürlichen Zahl $n(a) > 1$ besteht, so ist entweder \mathfrak{R} eine direkte Summe von einer endlichen Anzahl von endlichen Körpern, oder es ist der kommutative Ring \mathfrak{R}^+ (mit der neuen Multiplikation $x \cdot y = xy + yx$) eine direkte Summe von endlichen Körpern und gewissen dreidimensionalen Algebren.
L. Fuchs.

Schafer, R. D.: A remark on finite simple rings. *Amer. math. Monthly* **60**, 696—697 (1953).

Nach einem Satz von A. A. Albert kann jede separable assoziative Algebra endlichen Ranges über einem unendlichen Körper durch ein oder zwei Elemente erzeugt werden, je nachdem sie kommutativ ist oder nicht. Bei Algebren über endlichen Körpern ist dieser Satz hingegen im allgemeinen nicht richtig. Verf. zeigt jedoch, daß jeder endliche und einfache assoziative Ring ebenfalls im kommutativen Fall durch ein, im nichtkommutativen Fall durch zwei Elemente erzeugt werden kann. Der Beweis stützt sich auf die Isomorphie dieser Ringe zu vollen Matrizenringen über einem endlichen Körper, woraus sich noch eine Folgerung für Matrizenringe über Ringen mit Einselement ergibt.
H.-J. Kowalsky.

Herstein, I. N.: Une note sur un article de M. Tumuraru. *Portugaliae Math.* **12**, 113—114 (1953).

Soit R une algèbre sur le corps complexe et soit $*$ un antiautomorphisme involutif de R . Si l'algèbre de Jordan R déterminée par R est associative pour les éléments unis de $*$, R est commutative. L'A. donne aussi une démonstration très simple du théorème: Tout élément d'un corps K qui commute avec tous les commutateurs de K appartient au centre de K (voir à ce propos L. K. Hua, ce Zbl. **33**, 104).
G. Ancochea.

Nagao, Hirosi and Tadasu Nakayama: On the structure of (M_o) - and (M_u) -modules. *Math. Z.* **59**, 164—170 (1953).

A sei eine Algebra über einem Körper. Im Anschluß an Begriffsbildungen von R. Baer [Bull. Amer. math. Soc. 52, 501—506 (1946) sowie dies. Zbl. 34, 300] und Ref. (dies. Zbl. 47, 27) werden A -Linksmoduln m mit einer der folgenden Eigenschaften betrachtet: (M_o) : Aus $\mathfrak{M} \cap n \subseteq m$ folgt $\mathfrak{M} = m' \oplus n$. (M_u) : Aus $m \subseteq \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M} = m \oplus n$; \mathfrak{M} durchlaufe hierbei alle A -Linksmoduln. m wird dann (M_o) - bzw. (M_u) -Modul genannt. Verff. beweisen die folgenden Charakterisierungen: m ist dann und nur dann (M_u) -Modul, wenn m direkte Summe von A -Linksmoduln ist, die mit Summanden einer direkten Linksidealzerlegung von A isomorph sind. m ist dann und nur dann (M_o) -Modul, wenn m direkte Summe von A -Linksmoduln ist, die zu Summanden einer direkten Rechtsidealzerlegung von A dual sind. Dabei heißt ein Linksmodul l zu einem A -Rechtsmodul r dual, wenn l mit dem A -Linksmodul der Linearformen von r (Bereich der A -Homomorphismen λ von r in A , $(a\lambda)r = \lambda(ra)$, $r \in r$, $a \in A$) isomorph ist. In speziellen Algebren hatten Ref. 1. c. und M. Ikeda [Osaka Math. J. 5, 53—58 (1953)] Charakterisierungen der (M_o) - und (M_u) -Moduln angegeben.

W. Gaschütz.

Rabin, Michael: Sur la représentation des idéaux par des idéaux primaires. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 544—545 (1953).

A étant un idéal d'un anneau commutatif R , on dit que A satisfait à la condition de chaîne des quotients (C. C. Q.) si toute chaîne croissante $A \subseteq A: B_1 \subseteq \dots \subseteq A: (B_1 B_2 \dots B_n) \subseteq \dots$, R n'a qu'un nombre fini de termes. Si ce nombre est majeure, A satisfait à la condition stricte de chaîne des quotients (C. S. C. Q.) et on peut définir la longueur $L(A)$ de A . Dans cette note est annoncé le résultat suivant: Pour que tout idéal soit l'intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires forts, il faut et il suffit que tout idéal vérifie la C. S. C. Q. La démonstration est esquissée; elle utilise une induction sur $L(A)$ et le lemme suivant: Si R satisfait à la C. S. C. Q., et si $A = B \cap T$ où T est un idéal maximal vérifiant cette condition, l'idéal T est primaire, ou bien il existe un élément i et un idéal T' tels que: a) $A \subset A:i = A:i^2$; b) $T \subset T'$; c) $A = B \cap T' \cap A:i$.

L. Lesieur.

Goldhaber, J. K.: A note on Lie k system automorphisms. Amer. J. Math. 75, 859—863 (1953).

The author generalizes two theorems (Jacobson, this Zbl. 25, 303, Jacobson and Rickart, this Zbl. 39, 264) from Lie triple system to Lie k -ple system. E. g. he proves that a Lie k -system automorphism φ of a simple Lie ring \mathfrak{B} over a field \bar{K} with $[\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \neq 0$ is of the form $\varphi = \lambda \Phi$, where Φ is a Lie automorphism of \mathfrak{B} and λ is a $(k-1)$ st root of unity.

L. K. Hua.

Nakayama, Tadasi: Wedderburn's theorem, weakly normal rings and the semigroup of ring-classes. J. math. Soc. Japan 5, 154—170 (1953).

L'A. continue dans ce travail à développer ses idées visant à généraliser la théorie de Galois à des anneaux quelconques, en remplaçant les conditions de semi-simplicité par des conditions d'existence de bases finies [cf. Amer. J. Math. 74, 645—655 (1952)]. Il commence par énoncer une généralisation du th. de Jacobson. Bourbaki: A étant un anneau ayant un élément unité, \mathfrak{A} l'anneau des endomorphismes du groupe additif A , il s'agit de caractériser, dans \mathfrak{A} , les sous-anneaux qui sont des commutants des anneaux de type C_R , où C désigne un sous-anneau de A contenant l'unité et tel que A soit un C -module à droite ayant une base finie, et C_R désigne le sous-anneau de \mathfrak{A} formé des homothéties $x \mapsto xc$, où $c \in C$. Dans l'énoncé, la condition qu'un tel commutant contient l'élément unité n'est pas mentionnée (bien qu'utilisée dans la démonstration); en outre, la démonstration de la nécessité de la condition de l'énoncé est incorrecte: elle repose en effet sur l'assertion (inexacte en général, comme il est bien connu) que deux bases d'un module à droite sur A ont le même nombre d'éléments (la démonstration esquissée en note p. 156 repose apparemment sur la relation fallacieuse $(\sum e_i) m = \sum e_i m$ pour un idéal à

droite m de A). La validité des énoncés dépendant de la nécessité de la condition énoncée dans la prop. 1 reste donc en doute, sans hypothèse supplémentaire sur les anneaux envisagés. Soit A_L le sous-anneau de \mathfrak{A} formé des homothéties $x \mapsto ax$ ($a \in A$); l'A. dit que C est faiblement normal dans A si son commutant a une base finie sur A_L consistant d'endomorphismes semi-

linéaires de A (considéré comme A -module à gauche); au cas où il existe une telle base formée d'endomorphismes linéaires de A , C est intérieurement faiblement normal. Dans ce dernier cas, le commutant de C_R dans \mathfrak{A} est le produit kroneckerien de K_R et de A_L sur le centre de A , K étant le commutant de C dans A ; si C est simple (resp. primaire et satisfaisant à une condition minimale), il en est de même de A et de K ; tout anneau S contenant A , ayant même élément unité que A et dont le centre contient le centre de A , est produit kroneckerien (sur C) de A et du commutant de K dans S (généralisation d'un théorème de Wedderburn). L'A. discute les relations entre ses résultats et certains théorèmes d'Azumaya (ce Zbl. 45, 11), notamment en ce qui concerne une extension de la notion de groupe de Brauer aux classes d'anneaux faiblement normaux sur un anneau C donné.

J. Dieudonné.

Lamprecht, Erich: Über I -reguläre Ringe, reguläre Ideale und Erklärungsmoduln. I. Math. Nachr. 10, 353—382 (1953).

Es handelt sich um die Untersuchung von Fragen, die in den Problemkreis der im wesentlichen auf T. Nakayama zurückgehenden Theorie der Frobeniusringe fallen. Die von der geäußerten abweichende Bezeichnungsweise des Verf. und die erneute Herleitung einiger bereits bekannter Ergebnisse erklärt sich dadurch, daß Verf. erst bei der Korrektur von den Nakayama'schen Arbeiten Kenntnis erhielt (dies. Zbl. 21, 294 und 26, 58). — Sei R ein Ring mit Einselement, in dem beide Kettenätze für Links- und Rechtsideale gelten. Dann ist R eine endliche, direkte Summe von „Komponentenringen“ R_i , d. h. von Ringen, deren Zentren Z_i primäre, kommutative Ringe mit Einselement sind. Sei g_i bzw. g_r der Links- bzw. Rechtsannulator einer beliebigen Menge von Elementen g aus R , dann bezeichnet der Verf. R als regulär im idealtheoretischen Sinne, kurz I -regulär, wenn für jedes Rechtsideal r und für jedes Linksideal l die Beziehungen $r = (r_l)_r$, $l = (l_r)_l$ gelten. Die I -regulären Ringe stimmen also mit den quasi-Frobeniusringen (im Sinne von T. Nakayama) überein. Satz 1 besagt nun, daß R genau dann I -regulär ist, wenn jeder seiner Komponentenringe R_i I -regulär ist. Es genügt daher, sich auf die Untersuchung der Komponentenringe zu beschränken, bei denen drei Klassen unterschieden werden. 1. Vollständig primäre Ringe; 2. Primäre Ringe; 3. Halbprimäre Ringe mit primärem Zentrum. Zunächst werden Folgerungen aus der Annahme der I -Regularität der Komponentenringe der ersten beiden Klassen auf ihre idealtheoretische Struktur gezogen und insbesondere der Zusammenhang zwischen I -Regularität und Durchschnittsirreduzibilität untersucht. Bei den weiteren Überlegungen erfolgt eine Einschränkung auf die folg. Ringtypen: (A) R ist eine Algebra mit Einselement von endlichem Rang über einem kommutativen Körper K ; (E) R ist ein endlicher Ring mit Einselement; (L) Jeder Komponentenring von R ist entweder vom Typus (A) oder (E). Es werden nun lineare Funktionen $s[\xi]$ von R über K (im Falle (A)) bzw. Additivcharaktere $e[\xi]$ von R (im Falle (E)) betrachtet, wobei es wegen der Analogie der beiden Fälle hier genügt, den ersten anzugeben. Zu jedem festen Element $\alpha \in R$ und der festen linearen Funktion $s[\xi]$ gehören zwei weitere lineare Funktionen $s[\alpha\xi]$ und $s[\xi\alpha]$. Durch die Zuordnung $\alpha \rightarrow s[\alpha\xi]$ bzw. $\alpha \rightarrow s[\xi\alpha]$ erhält man je einen Homomorphismus des K -Moduls R in den K -Modul der linearen Funktionen. Die Kerne r_s bzw. l_s dieser Homomorphismen sind ein Rechts- bzw. Linksideal und werden als rechter bzw. linker Erklärungsmodul bezeichnet. Ist insbesondere $r_s = l_s = 0$, so heißt $s[\xi]$ eine echte lineare Funktion von R und R wird dann dualer Ring genannt. Mit anderen Worten (Ref.): Ein dualer Ring ist eine Algebra R/K , die eine lineare Abbildung von R auf K besitzt, bei der kein von Null verschiedenes Rechts- oder Linksideal auf Null abgebildet wird (d. h. der Kern ist eine nichtsinguläre Hyperebene). Nach einem bekannten Kriterium stimmen folglich die dualen Ringe (vom Typus (A)) mit den Frobeniusalgebren überein. Von den weiteren Überlegungen, die sich im wesentlichen mit dem Zusammenhang zwischen dualen Ringen (Frobeniusalgebren) und I -regulären Ringen des Typus (A) (quasi-Frobeniusalgebren) beschäftigen, seien erwähnt: Satz 5: Ist R ein vollständig primärer Ring mit Einselement vom Typus (A) oder (E), so sind folg. vier Aussagen über R einander äquivalent: 1. R ist I -regulär; 2. R ist dual; 3. R ist schwach beschränkt und zweiseitig durchschnittsirreduzibel; 4. In R gilt die Aussage (M). Die Aussage (M) bedeutet, daß es in R ein minimales zweiseitiges Ideal $\neq (0)$ gibt, welches in jedem ein- oder zweiseitigen Ideal enthalten ist. Satz 8: Ist R ein fastprimärer Ring vom Typus (L), so ist R dann und nur dann I -regulär, wenn jeder seiner Komponentenringe voller Matrizenring über einem I -regulären, d. h. schwach beschränkten zweiseitig durchschnittsirreduziblen, vollständig primären Ring ist. Die Arbeit schließt mit einigen Beispielen und Anwendungen.

F. Kasch.

Johnson, R. E.: The imbedding of a ring as an ideal in another ring. Duke math. J. 20, 569—573 (1953).

Verf. untersucht die Frage, wann ein gegebener Ring R als (zweiseitiges) Ideal in einen anderen Ring S eingebettet werden kann, und stellt sodann in diesem Fall Beziehungen zwischen gewissen Idealen von R und von S her. Besitzt R ein Einselement, so ist die Frage nach der Einbettbarkeit einfach zu beantworten: R ist genau dann als Ideal in einen Ring S einbettbar, wenn S in eindeutiger Weise als direkte Summe $R \oplus R'$ dargestellt werden kann; R' ist der Annulator von R in S . Im allgemeinen Fall (R besitzt kein Einselement) wird die additive Gruppe R' als R -Linksmodul aufgefaßt und ihr Endomorphismenring mit $E(R)$ bezeichnet.

R ist dann ein Rechtsideal von $E(R)$. $N(R)$ bedeute den größten Unterring von $E(R)$, in dem R sogar Ideal ist. Verf. zeigt dann: Ist R ein Ideal in S , und ist der Rechtsannulator von R in S gleich Null, so ist S isomorph zu einem Unterring von $N(R)$. Ist R ein Ideal in S , und ist 0 der einzige Rechtsannulator von R in R , so ist S isomorph zu einem Unterring von $N(R) \oplus S R$. $\mathfrak{A}_r(R)$ bedeute die Menge aller derjenigen Rechtsideale I von R , bei denen aus $a R \subseteq I$, $a \in R$ stets $a \in I$ folgt. Weiter sei $\mathfrak{A}_r(S, R)$ die Menge aller Rechtsideale I aus $\mathfrak{A}_r(S)$, für die $I \cap R \in \mathfrak{A}_r(R)$. Ist dann R ein Ideal in S , so ist die Zuordnung $I \mapsto I \cap R$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}_r(S, R)$ auf $\mathfrak{A}_r(R)$ hinsichtlich der Inklusion und beliebiger Durchschnittsbildung. Entsprechende Zuordnungen werden für Primideale, Halb-Primideale, Rechts-Primideale und reguläre Ideale angegeben.

H.-J. Kowalsky.

Kochendörffer, Rudolf: Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem für abelsche Algebren. Math. Nachr. 10, 75—84 (1953).

Gegeben sei ein galoisscher Relativkörper $\Omega \Omega_0$ mit der endlichen Gruppe g , sowie eine endliche abelsche Gruppe \mathfrak{A} und eine Erweiterung \mathfrak{G} von \mathfrak{A} mit der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} \cong g$. Das Einbettungsproblem verlangt die Konstruktion abelscher Algebren K/Ω mit der Gruppe \mathfrak{A} , für die K/Ω_0 galoissch mit der Gruppe \mathfrak{G} ist. Die Frage der Lösbarkeit des Einbettungsproblems wurde durch Ref. (dies. Zbl. 32, 255) weitgehend geklärt, bis auf den Nachweis einer bisher nur in Spezialfällen bestätigten Vermutung (V.). Verf. fördert hier den Zugang zu dieser Vermutung (V.) wesentlich durch den Beweis zweier allgemeiner Reduktionssätze. Der erste Satz reduziert in ganz einfacher Weise die Frage von der abelschen Gruppe \mathfrak{A} auf ihre Sylowgruppen. Der zweite, wesentlich tieferliegende Satz, der sich auf einen von Gaschütz (dies. Zbl. 47, 27) entwickelten Formalismus über Faktorensysteme stützt, reduziert die Frage von der Gruppe g auf eine Untergruppe \bar{s} , deren Index teilerfremd zur Ordnung von \mathfrak{A} ist. Setzt man, dem ersten Satz entsprechend, \mathfrak{A} als p -Gruppe voraus, so kann man im zweiten Satz \bar{s} als p -Sylowgruppe von g nehmen. So ergibt sich insgesamt eine Reduktion der Lösbarkeitsfrage des Einbettungsproblems auf p -Gruppen \mathfrak{G} .

H. Hasse.

Iwasawa, Kenkichi: On solvable extensions of algebraic number fields. Ann. of Math., II. Ser. 58, 548—572 (1953).

k sei ein kommutativer Körper von der Charakteristik $\chi(k)$ und K eine endliche separable galoissche Erweiterung (e. s. g. E.) von k mit $G(K/k)$ als Galoisgruppe über k . Ferner sei G eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler N von der Art, daß durch eine Abbildung g die Faktorgruppe G/N isomorph auf $G(K/k, G, N, q)$ abgebildet wird. Dann heißt das folgende Problem nach R. Brauer das Einbettungsproblem für $K: K$ in eine e. s. g. E. L von k derart einzubetten, daß durch eine Abbildung g G bzw. N isomorph auf die Galoisgruppe von L/k bzw. L/K abgebildet wird und daß g , angewandt auf $G/N, q$ induziert. Dies Problem ist mit $P(K/k, G, N, q)$ bezeichnet, und (L, g) ist eine Lösung von $P(K/k, G, N, q)$ genannt. Für einen Körper k bezeichnet k_m^* bzw. k_a^* die multiplikative Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus k bzw. die aus allen Elementen aus k bestehende, additive Gruppe. Ist eine Primzahl p von $\chi(k)$ verschieden, so bezeichnet k_m^p diejenige Untergruppe von k_m^* , die aus den p -ten Potenzen aller Elemente aus k_m^* besteht. Ist dagegen $p = \chi(k)$, so bezeichnet k_m^p diejenige Untergruppe von k_m^* , die aus den Elementen $x^p = x(x \in k)$ besteht. Ist nun K eine e. s. g. E. von k , so ist die Galoisgruppe $G(K/k)$ eine Automorphismengruppe von K_m . Daher lassen sich die Cohomologiegruppen von $G(K/k)$ über K_m definieren, die als die Galoiscohomologiegruppen bezeichnet werden. Ein Körper k heißt p -(Primzahl)-trivial, wenn für jede e. s. g. E. K von k mit p -Gruppe als Galoisgruppe über k die 2-dimensionale Galoiscohomologiegruppe von K stets die Einheitsgruppe ist. Verf. beweist den folgenden Hauptsatz: Für eine beliebige endliche separable Erweiterung k' von k und für eine beliebige endliche auflösbare Gruppe N besitzt jedes Einbettungsproblem $P(K/k', G/N, q)$ dann und nur dann stets eine Lösung, wenn für jede Primzahl p folgende Bedingung I. oder I' erfüllt ist, je nachdem ob $p \neq \chi(k)$ oder $p = \chi(k)$ ist: I. Für jede e. s. g. E. K von k und für jede natürliche Zahl n enthält K_m n Elemente x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von der Art, daß die sämtlichen konjugierten Elemente x_i^g [$g \in G(K/k)$] nach K_m^p p -unabhängig sind. Ferner ist jede endliche separable Erweiterung von k stets p -trivial. I'. Für jede e. s. g. E. K von k und für jede natürliche Zahl n enthält K_a n Elemente x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von der Art, daß die sämtlichen konjugierten Elemente x_i^g [$g \in G(K/k)$] nach K_a^p p -unabhängig sind. E sei eine Menge von endlichen Gruppen von der Art, daß jede endliche Gruppe stets in E genau ein isomorphes Bild besitzt, und S eine Untergruppe von E mit folgenden Bedingungen: (i) Jede Untergruppe einer beliebigen Gruppe aus S gehört zu S , (ii) jedes homomorphe Bild einer Gruppe aus S gehört zu S , und (iii) das direkte Produkt aus zwei Gruppen aus S gehört zu S . Dann heißt eine Gruppe, welche in S ihr isomorphes Bild besitzt, endliche S -Gruppe. Eine projektive Grenzgruppe von den endlichen S -Gruppen

ist kompakt und heißt auch S -Gruppe. Offenbar genügt die Gesamtheit S_a aller auflösbaren Gruppen aus E den Bedingungen (i), (ii), (iii). Nun sei F eine freie Gruppe mit abzählbar unendlich vielen freien Erzeugenden $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ und $\{M\}$ die Gesamtheit aller Normalteiler M mit der Eigenschaft, daß jedes M fast alle x_i enthält und F/M eine endliche S -Gruppe ist. Nimmt man $\{M\}$ als ein vollständiges Umgebungssystem des Einheitselementes aus F , so wird eine Topologie von F definiert; diese Topologie induziert in F/M_0 [M_0 ist der Durchschnitt aller M aus $\{M\}$] eine solche Topologie, daß die Kompletierung $F(S)$ von F/M_0 eine kompakte S -Gruppe ist. Für $S = S_a$ heißt $F(S_a)$ die auflösbare Kompletierung von F . Unter einer S -Erweiterung von k versteht man eine (endliche oder unendliche) galoissche Erweiterung von k mit einer S -Gruppe als Galoisgruppe über k . Verf. beweist dann folgenden Satz: k sei ein Körper und S eine Menge von den endlichen Gruppen, welche den obigen Bedingungen (i), (ii), (iii) genügt. Dann ist die Galoisgruppe $G(\Sigma/k)$ der maximalen S -Erweiterung Σ von k dann und nur dann isomorph zur Kompletierung $F(S)$ einer freien Gruppe F mit abzählbar unendlich vielen freien Erzeugenden, wenn $G(\Sigma/k)$ separabel ist und wenn für eine beliebige endliche S -Gruppe G jedes Einbettungsproblem $P(K/k, G/N, \varphi)$ stets eine Lösung besitzt. Als eine Folgerung des letzten Satzes erhält Verf. folgendes: k sei der maximale abelsche Zahlkörper über einem endlich-algebraischen Zahlkörper k_0 und Σ der maximale auflösbare Zahlkörper über k_0 . Dann ist die Galoisgruppe von Σ über k isomorph zur auflösbaren Kompletierung einer freien Gruppe mit abzählbar unendlich vielen freien Erzeugenden.

M. Moriya.

Lowe, R. D. and D. Zelinsky: Which Galois fields are pure extensions? Math. Student 21, 37—41 (1953).

The authors prove that there is an irreducible $x^f - \beta$ in a finite field $GF[q]$ if and only if $q - 1$ is divisible by every prime factor of f , and by 4 if $4|f$. Also, a choice of β is given. All but the case $4|f$ is proved in L. E. Dickson's „Linear groups, with an exposition of the Galois field theory“ (Leipzig 1901), § 35.

M. C. R. Butler.

Krasner, Marc: Compléments à ma Note précédente „Sur la non-existence des extensions d'une certaine forme“. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 685—687 (1953).

The author fills in a gap in a proof which he gave previously (this Zbl. 51, 28) and further generalizes the result to: Let K be a separable algebraic extension of a field k (where k is not an algebraic extension of a Galois field), p a positive integer, and suppose that each $\alpha \in K$ is a zero of a polynomial $f_\alpha(x) \in k[x]$ which is of the form

$$f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{p(\alpha)} d_j(\alpha) x^{n_j(\alpha)} + \varphi(x; \alpha),$$

where $0 < p(\alpha) \leq p$, $m = n_0(\alpha) < n_1(\alpha) \leq \dots \leq n_{p(\alpha)}(\alpha)$, where $\varphi(x; \alpha) \in k[x]$ is of degree $< m$ and the $d_j(\alpha)$ belong to a fixed finite set D of non-null elements of k ; then $(K:k) \leq m$.

J. C. Shepherdson.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

• Furtwängler, Ph.: Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen. Überarb. von H. Hasse und W. Jehne. (Enzyklopädie Math. Wiss. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage, Band I, 2. Teil, Heft 8, Art. 19.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 50. S.

Dies ist die Neubearbeitung des Artikels über die Arithmetik der allgemeinen endlich-algebraischen Zahlkörper (e. alg. Z. K.) in der „Enzyklopädie d. Math. Wissensch.“. Das ursprüngliche Manuskript dieser Neubearbeitung wurde 1938 von dem inzwischen verstorbenen Ph. Furtwängler abgeschlossen, und dann zunächst von M. Eichler, später von H. Hasse-W. Jehne gründlich überarbeitet und ergänzt. Die Arithmetik der speziellen Zahlkörper — z. B. der quadratischen Zahlkörper und Kreiskörper, usw. — ist in dieser Neubearbeitung nicht berührt. In § 1—§ 8 findet man die geschichtliche Entwicklung und die Grundbegriffe der algebraischen Zahlentheorie; darin findet man auch verschiedene Wege für die Begründung der Arithmetik der e. alg. Z. K. — Idealtheorie nach Dedekind, Formentheorie nach Kronecker und Divisorentheorie nach Hensel (Theorie der p -adischen Zahlen) —. § 11, Differenten und Diskriminante, enthält außer dem wohlbekannten Dedekindschen Differenten- und Diskriminantenatz einige Resultate über die gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteile und die Größe der (absoluten) Körperdiskriminanten. § 12, Zerlegung von Primidealen in Erweiterungskörpern, und § 13, Galoissche Körper, sind auf Grund der p -adischen Zahlen entwickelt. In § 13 findet man außer der Hilbertschen Theorie der galoisschen Körper nebst ihrer Anwendung für

die Primidealzerlegung in Zwischenkörpern nach Frobenius und Dedekind noch die Herbrand'sche Theorie über die galoisschen Zwischenkörper; es sind auch einzelne Resultate über die Verzweigungszahlen angegeben. § 9. Struktur des Restklassenringes und der primen Restklassengruppe nach einem ganzen Ideal; Theorie der Einseinheiten. § 14. Einheiten. § 15. Zerlegbare Formen; Kleinsche Gitterfigur. und § 16. Zusammensetzung von Körpern, stützen sich ganz auf die Besonderheiten der *e. alg. Z. K.* § 14 enthält außer dem klassischen Einheitensatz von Dirichlet noch den verallgemeinerten Einheitensatz von Hasse und den Satz über die Relativ-einheiten von Minkowski und Herbrand. Die beiden letzten Paragraphen, § 18 und § 19, sind der analytischen Theorie in der algebraischen Zahlentheorie gewidmet; die Artinschen Führer und Artinschen *L*-Funktionen, und analytische Bestimmung der Idealklassenzahl. Die Darstellung der Artinschen Theorie der Führer und *L*-Funktionen stützt sich auf die neueren Untersuchungen über allgemeine Gaußsche Summen durch Hasse. *M. Moriya.*

Mordell, L. J.: On the linear independence of algebraic numbers. *Pacific J. Math.* **3**, 625--630 (1953).

Aus einem endlich-algebraischen Zahlkörper K werde durch Adjunktion endlich vieler Radikale $\sqrt[n_i]{a_i}$ (mit a_i aus der Multiplikationsgruppe K^\times) ein Erweiterungskörper L gebildet. Enthält K die M n_i -ten Einheitswurzeln, so ist bekanntlich genau dann der Grad $[L:K] = \prod n_i$, wenn die Radikale $\sqrt[n_i]{a_i}$ in bezug auf K unabhängige Elemente der Ordnungen n_i sind, d. h. wenn ein Potenzprodukt $\prod (\sqrt[n_i]{a_i})^{r_i}$ nur dann in K^\times liegt, wenn alle Exponenten $r_i \equiv 0 \pmod{n_i}$ sind. Das gleiche gilt auch, wenn statt der Einheitswurzelforderung gefordert wird, daß K und die $\sqrt[n_i]{a_i}$ reell sind. Verf. beweist diese Tatsachen auf elementar-algebraischem Wege durch vollständige Induktion nach der Anzahl der adjungierten Radikale, ausgehend von der leicht zu erbringenden Feststellung, daß in jedem der beiden betrachteten Fälle ein einzelnes Radikal $\sqrt[n]{a}$ über K genau dann irreduzibel ist, wenn es die Ordnung n über K^\times hat. *H. Hasse.*

Kantz, Giorgio: Su quelle radici dell'unità di un corpo K ciclico di grado l sopra un corpo algebrico k , le quali sono potenze $(\sigma - 1)$ -esime di numeri di K , essendo l numero primo e σ un automorfismo generatore di K relativamente a k . *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **2**, 131—138 (1953).

Es sei k ein endlich-algebraischer Zahlkörper und K/k ein zyklischer Relativkörper vom Primzahlgrad l mit erzeugendem Automorphismus σ . Für den Takagischen Beweis, daß K/k Klassenkörper ist, spielt das Einheitenhauptgeschlecht $H(E^{1-\sigma})$ eine Rolle, wo E die Einheiten aus K und H diejenigen Einheiten aus K bedeutet, deren Relativnorm $N(H) = 1$ ist. Die Ordnung dieses Einheitenhauptgeschlechts wurde (im Anschluß an bereits im Hilbertschen Zahlbericht angestellte Untersuchungen) von Takagi explizit berechnet. Ref. gab dann in seinem Zahlbericht eine gruppentheoretisch-kalkülmaße Darstellung dieser eingermäßen umständlichen Rechnung. Verf. gibt für sie eine neue, einfachere und durchsichtigere Wendung in diesem Gruppenindex-kalkül, ausgehend von der mittels gruppentheoretischer Isomorphie- und Homomorphieregeln leicht zu gewinnenden Darstellung

$$[H:E^{1-\sigma}] = ([Z:Z \cap E^{1-\sigma}] [E_1:E_1^{1-\sigma} \epsilon] / [N(E):E^l]) \vee [\overline{E}:E^l] / [\overline{E}_1:E_1^l],$$

wo l die Einheiten aus k , ferner Z die l -ten Einheitswurzeln aus K (soweit vorkommend) und schließlich E_1 diejenigen Einheiten aus K bedeutet, für die $E_1^{1-\sigma}$ Einheitswurzel (beliebiger Ordnung) ist. Die E_1 nicht enthaltenden Indizes sind leicht anzugeben. Zur Berechnung der beiden E_1 enthaltenden Indizes bestimmt Verf. zunächst die Gruppe derjenigen Zahlen Θ aus K (nicht notwendig Einheiten), für die $\Theta^{1-\sigma}$ Einheitswurzel (beliebiger Ordnung) ist. Daraus ergibt sich dann leicht die Gruppe E_1 und damit die zu berechnende Einheitenhauptgeschlechtsordnung $[H:E^{1-\sigma}]$. *H. Hasse.*

Aigner, Alexander: Zur einfachen Bestimmung der Klassengruppe eines imaginär quadratischen Körpers. *Arch der Math.* **4**, 408—411 (1953).

Einige Hinweise, wie man unter Anwendung aller allgemeinen Kenntnisse, die man über die Struktur der Idealklassengruppe imaginär-quadratischer Zahlkörper besitzt, diese Gruppe in numerisch möglichst einfacher Form bestimmen kann.

H. Reichardt.

Kawada, Yukiyo: On the ramification theory of infinite algebraic extensions.

Ann. of Math., II. Ser. 58, 24—47 (1953).

Verf. entwickelt die Verzweigungstheorie der unendlichen separablen galoisschen Erweiterungen über einem kommutativen Körper mit einer diskreten Bewertung, dessen Restklassenkörper vollkommen ist. Verf. betrachtet der Einfachheit halber über einem gewöhnlichen p -adischen Zahlkörper k eine endliche separable galoissche Erweiterung K , und er definiert den kanonischen Wert $u(K/k)$ ($< \infty$) und die kanonische Menge $U(K/k)$ von K/k ; ferner definiert Verf. für einen reellen Parameter u ($-1 \leq u \leq \infty$) die u -Verzweigungsgruppe, welche entweder mit der Trägheitsgruppe oder mit einer gewissen Hilbertschen Verzweigungsgruppe von K/k übereinstimmt. Der einer u -Verzweigungsgruppe zugeordnete Zwischenkörper $U_{K/k}(u)$ von K/k heißt der u -Verzweigungskörper (u -V. K.). Ist K eine unendliche separable galoissche Erweiterung über k , so heißt ein Zwischenkörper V von K/k verzweigt, wenn der Durchschnitt von V mit einem beliebigen Teilkörper L von K/k endlichen Grades über k (L heißt endlicher Zwischenkörper von K/k) stets im obigen Sinne ein u -V. K. ist. Die kanonische Menge $U(K/k)$ von K/k ist definiert als die Vereinigungsmenge der kanonischen Mengen $U(L/k)$ und der kanonische Wert $u(K/k)$ als das Supremum der kanonischen Werte $u(L/k)$, wo L alle endlichen galoisschen Zwischenkörper (e. g. Z. K.) von K/k durchläuft. Durchläuft L alle e. g. Z. K. von K/k , so ist für einen reellen Parameter u ($-1 \leq u \leq \infty$) der Körper $U_{K/k}(u)$ als die Vereinigungsmenge aller u -V. K. $U_{L/k}(u)$ definiert; $U_{K/k}(u)$ heißt ein u -V. K. 1. Art. Ferner bezeichnet $S(K/k)$ die Gesamtheit der Grenzwerte aller monoton nicht-aufsteigenden Folgen aus der kanonischen Menge $U(K/k)$ und $S^*(K/k)$ die Gesamtheit der Grenzwerte aller monoton echt absteigenden Folgen aus $U(K/k)$. Ist u ($-1 \leq u \leq \infty$) der Grenzwert einer monoton echt absteigenden Folge $\{u_n; n = 1, 2, \dots\}$, so ist für einen e. g. Z. K. L von K/k $U_{L/k}^*(u)$ als der Durchschnitt aller u_n -V. K. $U_{L/k}(u_n)$ definiert; $U_{K/k}^*(u)$ bezeichnet die Vereinigungsmenge aller $U_{L/k}^*(u)$, wo L alle e. g. Z. K. von K/k durchläuft, und heißt ein u -V. K. 2. Art. Es gilt dann: A) i) Ist K/k verzweigt, so ist jeder u -V. K. 1. Art mit $u \in S(K/k)$ stets von einem beliebigen u -V. K. 2. Art mit $u^* \in S^*(K/k)$ verschieden. Insbesondere stimmt für das Infimum u_0 von $U(K/k)$ der u_0 -V. K. 1. Art mit dem Trägheitskörper von K/k überein. ii) Außer den in i) genannten V. K. 1. und 2. Art existiert kein von K verschiedener V. K. von K/k . B) i) Ein $U_{K/k}(u)$ ($U_{K/k}^*(u)$) ist die Vereinigungsmenge aller e. g. Z. K. L mit den kanonischen Werten $u(L/k) < u$ ($u(L/k) \leq u$). ii) $U_{K/k}(u)$ ($U_{K/k}^*(u)$) ist der maximal galoissche Zwischenkörper Ω von K/k mit der kanonischen Menge $U(\Omega/k) \subseteq (-1, u)$ ($U(\Omega/k) \subseteq (-1, u]$). Ist L ein beliebiger e. g. Z. K. von K/k und e die Verzweigungsordnung von L nach k , so ist $d(L/k) = d/e$ gesetzt, wo d den Exponenten der Differenten von L/k in bezug auf den Primteiler von p in L bezeichnet; das Supremum $d(K/k)$ der $d(L/k)$ aller e. g. Z. K. L von K/k heißt der p -Index der Differenten von K/k . Dann gilt: i) $d(K/k) < \infty$ ist gleichbedeutend mit $u(K/k) < \infty$. ii) Für $-1 \leq u < \infty$ ist $n_{K/k}(u)^{-1} = (K : U_{K/k}(u))^{-1}$ eine von links stetige,

monoton aufsteigende Funktion. Wenn $u(K/k) < \infty$ ist, dann gilt $d(K/k) = \int_{-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n_{K/k}(u)}\right) du$.

iii) Ist $n_{K/k}(u) = \infty$ für $0 \leq u < u(K/k)$, so ist $d(K/k) = u(K/k) + 1$. — Um den Führer von K/k zu definieren, soll die Galoisgruppe $G_{K/k}$ von K/k als eine topologische Gruppe im Krullschen Sinne aufgefaßt werden. Für einen reellen Parameter u ($-1 \leq u \leq \infty$) ist die u -Verzweigungsgruppe von K/k als die projektive Grenzgruppe der u -Verzweigungsgruppen aller e. g. Z. K. von K/k definiert. Nun sei $h(\tau)$ eine komplexwertige stetige Funktion auf $G_{K/k}$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt: i) $h(\tau)$ ist eine Klassenfunktion von $G_{K/k}$. ii) Für ein Element σ aus einer λ -Verzweigungsgruppe (λ ist hinreichend groß) von K/k und für ein Element $\tau \in G_{K/k}$ gilt $h(\tau) = h(\tau \sigma)$. Ferner sei $h^*(\tau) = h(1) - h(\tau)$ gesetzt. Dann ist der Führer $F(h, K/k)$

für $h(\tau)$ durch das Integral $\int_{-1}^{\infty} f(h^*, u) du$ definiert, wo $f(h^*, u) = \int_{U(u)} h^*(\tau) d\mu_u(\tau)$ ist und $d\mu_u(\tau)$ das Haarsche Maß der u -Verzweigungsgruppe $U(u)$ von K/k mit $\mu(U(u)) = 1$ bezeichnet.

Die Hauptergebnisse sind die folgenden: i) $F(h_1 + h_2, K/k) = F(h_1, K/k) + F(h_2, K/k)$. ii) Ist K' ein galoisscher Zwischenkörper von K/k und $G_{K'/k}$ die K' zugeordnete Untergruppe von $G_{K/k}$, so ist $F(h, K/k) = F(h, K'/k)$, wenn h als eine Klassenfunktion auf der Faktorgruppe $G_{K/k}/G_{K'/k}$ definiert ist. iii) Ist L ein e. g. Z. K. von K/k und $h(\tau) = \chi(\tau)$ [$\chi(\tau)$ ist ein Charakter der Galoisgruppe $G_{L/k}$ von L/k], so stimmt $F(h, L/k)$ mit dem p -Exponenten des Artinschen Führers von L/k überein. Ist Ω ein endlicher Zwischenkörper von K/k und $\psi(\tau)$ eine Klassenfunktion von $G_{K/\Omega}$, so gilt: $F(h\psi, K/k) = n\psi(1)d(\Omega/k) + fF(\psi, K/k)$, wo f den Restklassengrad und n den Grad

von Ω nach k bezeichnet. Dabei ist $h\psi(\tau) = \sum_{j=1}^r \psi(\tau_j \tau \tau_j^{-1})$ mit $\psi(\tau) = 0$ für $\tau \in G_{K/\Omega}$ gesetzt, wo $\{\tau_j, j = 1, 2, \dots, r\}$ ein volles Vertretersystem der Rechtsnebengruppe von $G_{K/k}$ nach $G_{K/\Omega}$ bezeichnet.

M. Moriya.

Rédei, Ladislaus: Bedingtes Artinsches Symbol mit Anwendung in der Körpertheorie. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 1—28 und russ. Zusammenfassg. 28—29 (1953).

In dieser grundlegenden Arbeit wird ein allgemeiner, wesentlich invarianter Algorithmus zur konstruktiven Beherrschung der Struktur von Klassengruppen in algebraischen Zahlkörpern und zur Konstruktion der zugeordneten Klassenkörper entwickelt. Von der Begründung der Klassenkörpertheorie über einem algebraischen Zahlkörper Ω her ist man gewohnt, mit einer Kongruenzdivisorengruppe H in Ω auch die Struktur der durch H als Hauptklasse bestimmten Kongruenzklassengruppe \mathfrak{H} in Ω als bekannt anzusehen und den Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie (schärfer das Artinsche Reziprozitätsgesetz) so aufzufassen, daß dadurch die zunächst unbekannte algebraische (und schärfer auch die arithmetische) Struktur der Galoisgruppe \mathfrak{G} des Klassenkörpers Ω_H vermöge der bekannten algebraischen (und schärfer auch der arithmetischen) Struktur von \mathfrak{H} beschrieben wird. Vom konstruktiven Standpunkt aus ist jedoch bei gegebenem H (etwa als absolute Hauptklasse von Ω) keineswegs auch die Struktur von \mathfrak{H} bekannt. Zu ihrer Bestimmung kann man sich den Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie in umgekehrter Richtung zunutze machen, indem man nämlich den Klassenkörper Ω_H auf Kummer'scher Grundlage konstruiert und daraus die Struktur seiner Galoisgruppe \mathfrak{G} und damit die von \mathfrak{H} abliest. Diese Auffassung legt Verf. hier und in der anschließenden Arbeit zugrunde. Ohne wesentliche Einschränkung wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{H} eine l -Klassengruppe (l Primzahl) ist. Die Struktur von \mathfrak{H} wird dann durch die Anzahlen e_v der durch l^v teilbaren l -Potenzinvarianten von \mathfrak{H} beschrieben, die eine absteigende Folge $e_1 \geq \dots \geq e_n > 0$ endlicher Länge n bilden. Zur Bestimmung dieser Strukturinvarianten e_v wird ein auf das Artinsymbol gegründeter Algorithmus entwickelt, der zu seiner konstruktiven Durchführung in Elementarschritten lediglich die Konstruktion zyklischer Klassenkörper vom Primzahlgrad l über bereits konstruierten Grundkörpern erfordert, und dieser Algorithmus wird auch zu einer Konstruktion des Klassenkörpers Ω_H selbst auf der gleichen Grundlage ausgebaut. — Im einzelnen geht Verf. folgendermaßen vor. Bezeichnungen: Es bezeichne A die Klassen aus \mathfrak{H} vom Exponenten l . Sie bilden eine Untergruppe $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ von der Ordnung l^{e_1} . Aus ihr entsteht die absteigende Untergruppenkette $\mathfrak{A}_v = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{H}^{l^{v-1}}$ mit den Ordnungen l^{e_v} . Dual zu den A bezeichne K die zyklischen Teilkörper von Ω_H vom Grade l über Ω . Ihr Kompositum ist, dual zu $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$, ein Körper $\Pi = \Pi_1$ vom Grade l^{e_1} über Ω . Ferner bezeichne K_v für jede Stufe $v = 1, \dots, n$ die zyklischen Teilkörper von Ω_H vom Grade l^v über Ω ; jeder von ihnen enthält genau einen Körper K . Diejenigen K , die bei fester Stufe v in mindestens einem K_v enthalten sind, liefern durch Komposition, dual zu \mathfrak{A}_v , einen Teilkörper Π_v von Ω_H vom Grade l^{e_v} über Ω . Unter einem Basiskörpersystem von Π_v sei ein volles System über Ω unabhängiger $K \subseteq \Pi_v$ verstanden. Schließlich liefern bei fester Stufe v die K_v , mit $v' \leq v$ einen $\Pi_{v'}$ enthaltenden Teilkörper $\Omega_{v'}$ von Ω_H vom Grade $l^{e_{v'} \dots e_v}$ über Ω ; diese aufsteigende Körperkette Ω_v hat als Schlußkörper den gesuchten Klassenkörper $\Omega_H = \Omega_n$. Bedingtes Artinsymbol [siehe bereits die frühere Arb. des Verf., J. reine angew. Math. **186**, 80 — 90 (1944)]: Verf. definiert zunächst mittels der Artinsymbole (K, A) ein für seinen Algorithmus grundlegendes bedingtes (d. h. an Existenzvoraussetzungen gebundenes) Symbol $(K, A)_v$, wobei ihm die Dirichlet'sche Definition des biquadratischen Restsymbols $(a/p)_2$ im rationalen Zahlkörper als Vorbild dient: wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ und $(a/p)_2 = 1$ ist, wird $(a/p)_4 = 1$ oder -1 gesetzt, je nachdem $a \pmod{p}$ biquadratischer Rest oder Nichtrest ist. In Verallgemeinerung der leicht zu gebenden Beschreibung dieser speziellen Definition mittels des Artinsymbols im Gauß'schen Zahlkörper definiert Verf. allgemein: wenn $K \subseteq \Pi_v$ und für alle demnach vorhandenen $K_v \subseteq K$ die Ordnung l^δ ($\delta = 0$ oder 1) von (K, A) dieselbe ist, wird $(K, A)_v = (-1)^\delta$ gesetzt. Ref. zieht es der einfacheren Ausdrucksweise halber vor, den vom Verf. entwickelten Algorithmus mit der exponentiellen Schreibweise $[K, A]_v = \delta$ des so definierten bedingten Artinsymbols zu beschreiben. Verf. definiert übrigens sein Symbol analog allgemeiner auch für gewisse nicht in \mathfrak{A} enthaltene Klassen C aus \mathfrak{H} , nämlich für alle solchen, für welche die (K, C) durchweg dieselbe Ordnung l^δ haben, wobei an sich $\delta = 0, 1, \dots, v$ sein kann, aber speziell nur Klassen C mit $\delta = 0$ oder 1 betrachtet werden; doch wird diese allgemeinere Definition für die behandelten Aufgaben nicht benötigt. Existenzkriterien: Bei gegebenem K bezeichne h diejenige Untergruppe vom Index l in \mathfrak{H} , zu der K Klassenkörper ist. Dann ist die erste Existenzvoraussetzung für das Symbol $[K, A]_v$, nämlich $K \subseteq \Pi_v$, gleichbedeutend mit $h^{v-1} \subseteq \mathfrak{H}^{l^{v-1}}$ und, wenn dies erfüllt ist, die zweite Existenzvoraussetzung, die Konstanz der Ordnung (K, A) , gleichbedeutend mit $A \in \mathfrak{A}_v$; ist beides erfüllt, so ist $[K, A]_v = 0$ gleichbedeutend mit $A \in h^{v-1}$. Ferner gelten folgende rekursiven Kriterien. $K_v \subseteq K_{v+1}$ ist gleichbedeutend mit $(K_v, A) = 1$ für alle A , und $K \subseteq \Pi_{v+1}$ gleichbedeutend mit $K \subseteq \Pi_v$ und $[K, A]_v = 0$ für alle A aus dem Definitionsbereich dieses Symbols. $[K, A]_{v+1}$ ist genau dann definiert, wenn erstens $K \subseteq \Pi_{v+1}$, zweitens $[K, A]_v$ definiert, drittens $[K', A]_v = 0$ für alle K' aus dem Definitionsbereich dieses Symbols ist. Produktregeln: Für $A = 1$ ist $[K, A]_v = 1$. Für $A \neq 1$ hängt $[K, A]_v$ nur vom dem durch A erzeugten Zyklus $\{A\}$ der Ordnung l ab. In dem aus zwei unabhängigen $A^{(1)}, A^{(2)}$ erzeugten Bizeklus $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ gibt es $l-1$ verschiedene Zyklen $\{A\}$ der Ordnung l . Ist $[K, A]_v$ für mindestens zwei von ihnen definiert, so für alle $l-1$, und es ist entweder für alle $l-1$ Zyklen $\{A\}$ oder nur für einen einzigen $[K, A]_v = 0$. Eine dazu duale Regel gilt hinsichtlich der Abhängigkeit von K , wobei der

aus zwei über Ω unabhängigen $K^{(1)}, K^{(2)}$ erzeugte bzyklische Körper $K^{(1)} K^{(2)}$ und seine $l + 1$ verschiedenen zyklischen Teilkörper K die Rollen von $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ und der $\{A\}$ übernehmen. Der Ableitungsalgorithmus: Es sei a_v ein System von Klassen A und t_v ein System von Körpern K derart, daß die bedingten Artinsymbole $[K/A]_v$ einer festen Stufe v sämtlich definiert sind, und es werde aus diesen Symbolen durch Anordnung in Zeilen nach den A und Spalten nach den K die Matrix $M_v = [t_v/a_v]_v$ gebildet. Sind $A^{(1)}, A^{(2)}$ unabhängige Klassen aus a_v und wird in M_v der Zyklus $\{A^{(1)}\}$ durch einen der $l - 1$ von $\{A^{(1)}\}$ und $\{A^{(2)}\}$ verschiedenen Zyklen $\{A\}$ aus $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ ersetzt, so wird von einer elementaren Zeilentransformation von M_v geredet. Dual dazu wird analog eine elementare Spaltentransformation von M_v erklärt. Nach den Produktregeln läßt sich die Matrix M_v durch elementare Zeilen- und Spaltentransformationen sowie Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf eine Diagonalmatrix reduzieren, in deren Diagonale zuerst Nullen und dann Einsen stehen. Dieser Prozeß wird Ausreduktion von M_v genannt; sie ist auf mannigfache Art möglich. In jeder so entstehenden ausreduzierten Matrix streiche man die den Diagonalgliedern 1 entsprechenden Zeilen und Spalten und erhöhe in der verbleibenden Matrix die Stufe r der Symbole auf $v + 1$. Wenn das bei jeder Art der Ausreduktion durchweg auf definierte Symbole der Stufe $r - 1$ führt, heißt die Matrix M_v ableitbar und jede durch die hervorgehobenen drei Prozesse gelieferte Matrix M_{v+1} eine Ableitung von M_v . Wenn die Matrix M_v ableitbar ist und jede ihrer Ableitungen M_{v+1} wieder ableitbar ist, heißt M_v zweimal ableitbar, usw. — Hauptsatz: Es werde $a = a_1$ als ein Erzeugendensystem von $A = A_1$ gewählt, bestehend aus e_1 unabhängigen und $r \geq 0$ weiteren Klassen A . Für $r = 0$ ist a eine Basis von \mathfrak{A} ; für die Anwendungen, insbesondere die in der anschließenden Arbeit, ist es jedoch von entscheidender Bedeutung, auch den Fall $r > 0$ einer abundanten Erzeugung von \mathfrak{A} zuzulassen, weil ja eine Basis von \mathfrak{A} nicht von vornherein konstruktiv bekannt ist. Es werde ferner $\mathfrak{t} = t_1$ als ein Basiskörpersystem von $\Pi = \Pi_1$ gewählt, bestehend aus e_1 über Ω unabhängigen Körpern K . Da für die Stufe $v = 1$ das bedingte Artinsymbol an keine Existenzvoraussetzung gebunden ist, ist dann die Matrix $M = [t/a]_1$ vom Typus $(e_1 + r) \times e_1$ definiert. Der Hauptsatz sagt aus, daß $M = M_1$ unbeschränkt ableitbar ist, und daß jede Ableitungsfolge M_v die Typenfolge $(e_v + r) \times e_v$, insbesondere also die Spaltenanzahlfolge e_v hat. Überdies bilden die Nenner und Zähler der Symbole in den e_v ersten Zeilen bzw. den e_v Spalten einer v -ten Ableitung $M_v = [t/a_v]_v$ eine Basis von \mathfrak{A}_v bzw. ein Basiskörpersystem von Π_v . Speziell im Falle $r = 0$ einer Basis a von \mathfrak{A} liegt die Ableitungsfolge M_v bis auf elementare Transformationen und Vertauschungen fest; in diesem Sinne ist der Ableitungsalgorithmus im Falle $r = 0$ wesentlich invariant. Allgemein werden nach Ausreduktion der letzten von Null verschiedenen Ableitung M_n die Nenner der Symbole in den letzten r Zeilen alle gleich 1. Dies liefert bei Anwendung des Algorithmus mit einem $r > 0$ nicht-triviale Klassenrelationen in Ω ; in der anschließenden Arbeit ergibt sich mit $r = 1$ so das genaue Lösbarkeitskriterium für die Pellsche Gleichung mit -1 . — Der Beweis des Hauptsatzes ergibt sich ohne große Mühe aus den zuvor angegebenen Existenzkriterien und Regeln für das bedingte Artinsymbol. Der Ableitungsalgorithmus liefert nach dem Hauptsatz ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der Strukturinvarianten e_v der l -Kongruenzklassengruppe \mathfrak{H} zu einer gegebenen l -Kongruenzdivisorengruppe H in Ω . Wie man sich leicht klar-macht, sind zur konstruktiven Durchführung dieses Verfahrens lediglich Konstruktionen zyklischer Klassenkörper vom Grade l zu gegebenen Kongruenzdivisorengruppen vom Index l in bereits konstruierten Grundkörpern erforderlich. Verf. zeigt überdies, wie sein Algorithmus durch Heranziehen der gewöhnlichen neben den bedingten Artinsymbolen zu einer schrittweisen Bestimmung der aufsteigenden Körperkette Ω_v und damit des Klassenkörpers $\Omega_n = \Omega_H$ ausgebaut werden kann, und zwar kommt man dabei mit der Mindestanzahl $e_1 + \dots + e_n$ von Konstruktionen zyklischer Klassenkörper vom Grade l aus. Wie die Durchführung dieser elementaren Konstruktionsschritte auf Kummerscher Grundlage anzusetzen ist, wird im zweiten Teil der anschließenden Arbeit für den Spezialfall der 2-Ringklassenkörper über einem quadratischen Zahlkörper Ω ausführlich dargelegt.

H. Hasse.

Rédei, Ladislaus: Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 31–86 (1953).

Verf. wendet die in vorstehender Arbeit entwickelte allgemeine Methode auf den Spezialfall eines quadratischen Zahlkörpers Ω und der Primzahl $l = 2$ an, und zwar betrachtet er in Ω speziell die 2-Ringklassengruppe \mathfrak{H} im engeren Sinne zu gegebenem ganzrationalen m als Führer. Die 2-Ringhauptklasse H besteht dabei aus allen diejenigen zu m primen Divisoren von Ω , für die eine Potenz mit ungeradem Exponenten divisorgleich einer normpositiven Zahl aus Ω mit rationalem Rest mod. m ist. Verf. macht die wesentliche Einschränkung, daß der Führer m von H nicht durch 2 teilbar ist, weil ihm der Fall einer durch 2 teilbaren m für eine erste Darbietung seiner Ergebnisse zu kompliziert erscheint. Er setzt ferner m als quadatfrei und zur Diskriminante d von Ω prim voraus; diese Einschränkung ist unwesentlich, da die gleich anzugebenden vier behandelten Probleme bei der Auffüllung von m durch Primteiler von m oder d invariant sind. — Problem I: Bestimmung der Struktur von \mathfrak{H} , beschrieben durch die Anzahlen e_v der durch 2^v teilbaren 2-Potenzinvarianten von \mathfrak{H} . — Problem II–IV: Entscheidung über die

ganzzahlige Lösbarkeit der diophantischen Gleichungen (II) $\tilde{\epsilon}'m'^2x'^2 - \tilde{\epsilon}''m''^2x''^2 = 2^{2t-1}$ mit $(m'x', m''x'', z) = 1$ und $2 \nmid z$, (III) $\tilde{\epsilon}'m'^2x'^2 - \tilde{\epsilon}''m''^2x''^2 = 1$, (IV) $\tilde{\epsilon}m^2y^2 - x^2 = 1$ für $d \neq 0$ (Pellsche Gleichung mit -1). Dabei bedeutet $\tilde{\epsilon}$ in (IV) den quadratfreien Kern von d , und es sind (II), (III) für jede D -Zerfällung $S = (\tilde{\epsilon}', m'; \tilde{\epsilon}'', m'')$ zu verstehen, wo $D = dm^2$ die Diskriminante des zugrunde gelegten Zahlrings mod. m in Ω bedeutet. Eine solche D -Zerfällung legt Verf. folgendermaßen fest. Es sei $\tilde{\epsilon}'$, $\tilde{\epsilon}''$ ein geordnetes rationales Zahlpaar mit $\tilde{\epsilon}' \neq 0$, und zwar seien $\tilde{\epsilon}'$, $\tilde{\epsilon}''$ entweder ganz mit $\tilde{\epsilon}'\tilde{\epsilon}'' = \tilde{\epsilon}$ oder (sofern $\tilde{\epsilon} = 1 \pmod{4}$ ist) auch nur $2\tilde{\epsilon}'$, $2\tilde{\epsilon}''$ ganz mit $4\tilde{\epsilon}'\tilde{\epsilon}'' = \tilde{\epsilon}$; und es sei m' , m'' ein geordnetes ganzzahliges Zahlpaar mit $m'm'' = m$, wobei (durch Vorzeichenfestlegung) m' , $m'' = 1 \pmod{4}$ normiert seien. Diese D -Zerfällungen S bilden bei gliedweiser Multiplikation der ersten Komponentenpaare $\tilde{\epsilon}'$, m' im Sinne \circledast (Vernachlässigung quadratischer Faktoren) eine abelsche Gruppe \mathfrak{Z} vom t -gliedrigen Typus $(2, \dots, 2)$, wo t die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Ringdiskriminante $D = dm^2$ ist. Einselement von \mathfrak{Z} ist die triviale D -Zerfällung $E = (1, 1; 1, 1)$, für $d \neq 0$ tritt außerdem noch die in (IV) vorliegende triviale D -Zerfällung $E = (\tilde{\epsilon}, m; 1, 1)$ auf, die bei Multiplikation mit einer beliebigen D -Zerfällung deren beide Komponentenpaare vertauscht. — Lösung von I: Der in vorstehender Arbeit entwickelte Ableitungsalgorithmus wird mit den folgendenmaßen bestimmten Ausgangsbildungen $f = f_1$ und $a = a_1$ angesetzt (Bezeichnungen aus vorstehendem Referat). Für $2 \nmid d$ sei $p_0 = 2$, für $2 \mid d$ dagegen p_0 irgendein fester Primteiler von d . Durchläuft dann p die $t-1$ von p_0 verschiedenen Primteiler von D in der Normierung $p \equiv 1 \pmod{4}$, so bilden die $t-1$ Körper $K = \Omega(\sqrt[p]{p})$ ein Basiskörpersystem \mathfrak{f} von Π . Zu jeder D -Zerfällung $S = (\tilde{\epsilon}', m'; \tilde{\epsilon}'', m'')$ wähle man ferner zwei ganzzahlige x' (prim zu m'), x'' (prim zu m'') derart, daß $\tilde{\epsilon}'m'^2x'^2 - \tilde{\epsilon}''m''^2x''^2$ positiv, ganz und ungerade ausfällt. Dann bilden die 2^t ganzen, zu 2 und m primen Zahlen $\xi = x'm' \in \{\tilde{\epsilon}' + x''m'' \in \tilde{\epsilon}''\}$ ein über Ω algebraisches Zahlvertretersystem für die 2-Ringklassen \mathcal{A} vom Exponenten 2, bei dem jede dieser Ringklassen genau zweimal vorkommt, und sie liefern genauer einen $(2, 1)$ -Homomorphismus der D -Zerfällungsgruppe \mathfrak{Z} auf die Gruppe \mathfrak{A} der 2-Ringklassen vom Exponenten 2, die demnach (wie bekannt) die Ordnung 2^{t-1} hat. Einer t -gliedrigen Basis \mathfrak{s} von \mathfrak{Z} entspricht so ein t -gliedriges abundantes Erzeugendensystem \mathfrak{a} von \mathfrak{A} . Die Anwendung des Algorithmus auf die Matrix $M = \begin{bmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{a} \end{bmatrix}_t$ mit $e_1 = t-1$ Spalten und $e_1 + 1 = t$ Zeilen ergibt eine Ableitungsfolge $M_p = \begin{bmatrix} \mathfrak{f}_p \\ \mathfrak{a}_p \end{bmatrix}_p$ mit jeweils e_p Spalten und $e_p + 1$ Zeilen. Die so erhaltene Lösung des Problems liefert dann wie folgt auch die Lösungen der Probleme II–IV. — Lösung von II: Bezeichne \mathfrak{S}_r die den lösbaren Gleichungen (II) für die einzelnen Stufen r entsprechende absteigende Untergruppenkette von $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1$. Der Ableitungsalgorithmus ergibt eine Basis \mathfrak{s}_r von \mathfrak{Z}_r als das (vollständige) Urbild bei obigem $(2, 1)$ -Homomorphismus zum Nennersystem \mathfrak{a}_r in den ersten e_r Zeilen von M_p (wenn man M_p als bereits ausgedünzt versteht), wobei \mathfrak{s}_r seinerseits eine Basis der Untergruppe \mathfrak{A}_r von $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ darstellt. Demnach hat \mathfrak{Z}_r die Ordnung 2^{e_r-1} . Insbesondere endet die Kette \mathfrak{S}_r , dem Abschluß $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{A}_{n+2} = \dots = 1$ entsprechend, mit einer festen Untergruppe $\mathfrak{S}_{n+1} = \mathfrak{S}_{n+2} = \dots = \mathfrak{S}_\infty$ der Ordnung 2. — Lösung von III: Die Schlußgruppe \mathfrak{Z}_∞ besteht aus der trivialen D -Zerfällung E und einer weiteren S_∞ , die nach Abschluß des Algorithmus bekannt ist. Die Gleichung (III) ist dann genau für diese beiden D -Zerfällungen E, S_∞ lösbar. — Lösung von IV: Als notwendiges und hinreichendes Lösbarkeitskriterium für die Gleichung (IV) stellt sich die Übereinstimmung $S_{\infty} = E$ der eben genannten D -Zerfällung S_∞ mit der für $d > 0$ vorhandenen weiteren trivialen D -Zerfällung E heraus. — Die bisher für Spezialfälle bekannten notwendigen oder hinreichenden oder vollständigen Kriterien für die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung mit -1 ordnen sich diesem allgemeinen Lösbarkeitskriterium unter. Verf. führt dies im einzelnen aus, um damit klarzumachen, daß durch seinen Algorithmus die alte Frage nach einem vollständigen Lösbarkeitskriterium abschließend beantwortet wird. Daß diese endgültige Antwort rekursive Gestalt hat, liegt nach seinen Ausführungen in der Natur der Sache. Die erhaltenen Ergebnisse lehren nämlich, daß die vollständige Entscheidung über die Lösbarkeit von (IV) mit der Kenntnis der vollen Folge e_r ($r = 1, \dots, n$) der Strukturinvarianten von \mathfrak{S} äquivalent ist. Ist (IV) lösbar, so stellt sich das erst bei Forttreiben des Algorithmus bis zur Schlußstufe $r = n$ heraus. Ist jedoch (IV) unlösbar, so kann dies bereits bei einer früheren Stufe $r = n$ erkanntlich werden, und so entstehen die seit langem bekannten und die in neuerer Zeit durch Verf. u. a. hinzugefügten notwendigen Kriterien für Spezialfälle als bereits bei den Stufen $r = 1, 2, 3$ erkenntliche Unlösbarkeiten. — Für die konstruktive Durchführung dieser im ersten Teil der Arbeit gegebenen Lösung der miteinander eng zusammenhängenden Probleme I–IV wird, wie schon im vorstehenden Referat gesagt, eine Konstruktion des 2-Ringklassenkörpers Ω_d auf Kummerischer Grundlage in Elementarschritten vom Grade 2 gebraucht. Eine solche Konstruktion gibt Verf. in dem umfangreichen zweiten Teil der Arbeit in zwei Sätzen, deren Formulierung sich über mehrere Seiten erstreckt. Dabei stützt er sich auf die früher von Reichardt (dies. Zbl. 7, 396) für den Spezialfall $m = 1$ erhaltenen Ergebnisse über die Struktur der 2-Klassengruppe in Ω . — Verf. kündigt in der Arbeit an, daß er mit seiner Methode die

Existenz unendlich vieler Ringdiskriminanten $D (> 0$ und < 0) mit vorgeschriebenem Anfangsstück e_1, \dots, e_k der Strukturinvariantenfolge e_v der 2-Ringklassengruppe \mathfrak{H} nachweisen und deren asymptotische Verteilung bestimmen kann; darauf will er an anderer Stelle zurückkommen. — Ref. erlaubt sich, folgende methodische Bemerkung zu machen. Das mit Hilfe der D -Zerfällungen konstruierte Zahlvertreterssystem $\xi = x' m' \sqrt{d'} + x'' m'' \sqrt{d''}$ für die Klassen A aus \mathfrak{A} erscheint unorganisch gewählt, weil seine Zahlen nicht durchweg dem Geschlechterkörper Π des Ringklassenkörpers Ω_H angehören. Auch erscheint es unorganisch, neben dem naturgemäß auftretenden Zahlring $[\Omega]_m$ im Falle $d \equiv 1 \pmod{4}$ auch noch seinen Durchschnitt mit $[\Omega]_2$ in die Betrachtung einzuführen, um die allgemeine Darstellung $(a + b\sqrt{d})/2$ mit $a \equiv Db \pmod{2}$, $b \equiv 0 \pmod{m}$ der Zahlen aus $[\Omega]_m$ durch die vom Nenner 2 freie $a + b\sqrt{d}$ mit $b \equiv 0 \pmod{m}$ ersetzen zu können. Im Sinne einer organischen Gestaltung der Lösung der Probleme I–IV wäre es vielmehr erwünscht, garnicht mit dem quadratischen Kern d nebst den ganz- oder halbzahligen d', d'' zu arbeiten, sondern sich auch für das Zahlvertreterssystem ξ auf die geschlechtertheoretischen D -Zerfällungen $(d', m'; d'', m'')$ zu stützen, bei denen d', d'' quadratische Körperdiskriminanten mit $d' d'' = d$ sind. Im Falle $d \equiv -4d_0$ mit $d_0 \equiv 1 \pmod{4}$ ist $(-4, d_0)$ eine spezielle solche d -Zerfällung, den im Geschlechterkörper enthaltenen Radikalen $\sqrt{-4} = 2i = (1 + i)^2$ und $\sqrt{d_0}$ entsprechend. Soweit Ref. sieht, kommt man mit einem im angegebenen Sinne organischen Vertreterssystem der Form $\xi = (x' m' \sqrt{d'} + x'' m'' \sqrt{d''})/2$ nebst im genannten Falle $\xi/\sqrt{-4} = \xi/(1 + i)$ genau so gut aus wie mit dem vom Verf. benutzten unorganischen. Diese Bemerkung dürfte insbesondere auch zur Beseitigung der dem Verf. entgegengetretenen besonderen Komplikationen im hier nicht behandelten Falle eines durch 2 teilbaren Führers m dienlich sein.

H. Hasse.

Lamprecht, Erich: Über s -Differenzen und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen. Arch. der Math. 4, 412–424 (1953).

Es handelt sich um eine Weiterführung der Differenten- und Differentialtheorie, wie sie von C. Chevalley in seinem Buch „Introduction to the theory of algebraic functions of one variable“ (New York 1951) entwickelt wird. Die Differente einer algebraischen Erweiterung A endlichen Grades über einem algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen K wird dort in üblicher Weise unter Verwendung der Spur eingeführt. Da die Spur bei einer inseparablen Erweiterung die Nullabbildung darstellt, hat man bei dieser Einführung der Differente und den damit zusammenhängenden Begriffen Separabilität vorauszusetzen. Hier wird gezeigt, daß die Theorie auch ohne jegliche Separabilitätsforderung aufgebaut werden kann, wenn man die Spur von A/K durch eine „echte“ lineare Funktion $s[\xi]$, ($\xi \in A$) von A/K (d. h. eine operatorhomomorphe Abbildung des K -Moduls A auf den K -Modul K) ersetzt. Analog zur Definition der üblichen Differente gewinnt man dann die s -Differente. Da alle echten linearen Funktionen aus einer festen $s[\xi]$ in der Form $s[a\xi]$, ($a \in A$, fest) gewonnen werden können, bilden alle zu A/K gehörenden s -Differenzen eine Divisorenklasse. Nach einigen Vorbemerkungen über lineare Funktionen (vgl. E. Lamprecht, dies. Zbl. 51, 265) wird zunächst die lokale und sodann die globale s -Differentheorie entwickelt. Ferner wird der Begriff der Cospur eines Differentials für echte lineare Abbildungen eingeführt und der Zusammenhang zwischen s -Differente und Differentialen untersucht. Die Einführung der Begriffe und die Beweise knüpfen an den bei Chevalley behandelten „klassischen“ Fall an.

F. Kasch.

Roquette, Peter: Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Arch. der Math. 4, 6–16 (1953).

Roquette, Peter: Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts. J. reine angew. Math. 191, 199–252 (1953).

Die erste dieser beiden Arbeiten gibt eine kurze Zusammenfassung, die zweite eine ausführliche Darstellung eines rein arithmetischen Beweises für die Riemannsche Vermutung in einem Kongruenzfunktionenkörper K_0/Ω_0 vom Transzendenzgrad 1 mit beliebigem Geschlecht $g \geq 1$, also der Tatsache, daß die Nullstellen in q' der K_0 zugeordneten Zetafunktion $\zeta(s)$ sämtlich den Betrag $1/q$ haben, wo q die Elementanzahl des Konstantenkörpers Ω_0 ist. Nachdem der Spezialfall $g = 1$ bereits 1933/34 von Ref. erledigt war, gab 1948 erstmalig A. Weil (dies. Zbl. 36, 160) einen Beweis für den allgemeinen Fall $g \geq 1$. Dieser Beweis verwendet weitgehend die von A. Weil [Foundations of algebraic geometry, New York 1946] gegebene Begründung der algebraischen Geometrie und insbesondere die dort entwickelte, umfangreiche und komplizierte Theorie der Durchschnittsprodukte algebraischer Mannigfaltigkeiten. Verf. gibt hier einen Beweis, der sich lediglich auf die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 stützt, in die ja die Fragestellung gehört, und der sich daher gegenüber dem Weilschen Beweis auch durch die birationale Invarianz der benutzten Begriffsbildungen auszeichnet. — Zunächst wird eine Theorie der Differenten und Diskriminanten von Isomorphismensystemen für einen algebraischen Funktionenkörper K/Ω vom Transzendenzgrad 1 mit algebraisch-

abgeschlossenem Konstantenkörper entwickelt. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differenzen- und Diskriminantentheorie in der Richtung, daß nicht nur speziell volle Isomorphismensysteme von K in bezug auf einen Teilkörper von endlichem Index betrachtet werden, sondern ganz beliebige endliche Systeme von Isomorphismen von K/Ω in die algebraisch-abgeschlossene Hülle irgendeines anderen algebraischen Funktionenkörpers K'/Ω vom Transzendenzgrad 1. Mittels des Riemann-Rochschen Satzes wird eine nicht-triviale Abschätzung des Diskriminantengrades für ein besonderes Voraussetzungen genügendes solches Isomorphismensystem gegeben. Sie bildet die Quelle, aus der später die mit der Riemannschen Vermutung äquivalente Ungleichung fließt. — Nach Rekapitulation und Ausbau der im wesentlichen bereits durch Deuring (dies. Zbl. 16, 346) bekannten Theorie der Divisoren und ihrer Klassen eines Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ wird diese durch eine Theorie der Divisorenreste und der mit ihrer Hilfe definierten Restprodukte $a \times b$ teilerfremder Divisoren a, b von Δ/Ω entscheidend fortgeführt. Diese Theorie stellt eine wesentliche Verallgemeinerung der von Deuring (l. c. und dies. Zbl. 24, 13) gegebenen arithmetischen Theorie der Korrespondenzen von K/Ω in K'/Ω dar; letztere entspricht dem Spezialfall, daß der zweite Faktor b des Restprodukts ein K' -konstanter Divisor von Δ/Ω ist, d. h. aus einem Divisor von K/Ω durch Konstantenerweiterung auf K' entspringt. Das Restprodukt im allgemeinen Falle zweier nicht-konstanter Divisoren a, b von Δ/Ω ist eine wesentlich der arithmetischen Theorie für Transzendenzgrad 2 angehörige Bildung. Trotzdem gelingt seine Definition in durchaus naturgemäßer Weise durch Produktbildung über lokale größte gemeinsame Teiler auf dem Boden der arithmetischen Theorie für Transzendenzgrad 1, und es stellt sich dann eine Beziehung zu den zuvor behandelten verallgemeinerten Differenzen heraus, die nach dem Muster des Teilersatzes der gewöhnlichen Differenzentheorie durch einen analogen Prozeß definiert sind. — Nach dem Vorbild von A. Weil (l. c.) wird sodann durch Gradbildung im Restprodukt nach dem Schema

$$\sigma(a, b) = \text{gr}_K(a) \text{gr}_{K'}(b) + \text{gr}_{K'}(a) \text{gr}_K(b) - \text{gr}(a \times b)$$

eine Metrik σ in der Gruppe der größeren Divisorenklassen von Δ/Ω (Hauptklasse erzeugt durch die K -konstanten und K' -konstanten Divisoren) definiert. Mittels der genannten Diskriminantengradabschätzung ergibt sich der Hauptsatz, daß diese Weilsche Metrik σ positiv-definit ist. — Schließlich wird aus diesem Hauptsatz die Riemannsche Vermutung für einen Kongruenzfunktionenkörper K_0/Ω_0 in der folgenden, einfachen und durchsichtigen Weise gefolgt. Sei K/Ω die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung zu K_0/Ω_0 und $\Delta = K \times K'$ mit einem von K/Ω unabhängigen, zu K/Ω durch ι isomorphen K'/Ω . In der Schwarzschen Ungleichung $\sigma(a, b)^2 \leq \sigma(a, a) \sigma(b, b)$ für die Weilsche Metrik wähle man speziell a und b als die Primdivisoren von Δ/K' mit den Restabbildungen $K \rightarrow K/\iota = K'$ bzw. $K_0 \rightarrow K/\iota$. Durch Bestimmung der obigen Grade für diese Divisoren a, b ergibt sich dann die mit der Riemannschen Vermutung äquivalente Ungleichung $(N - (q + 1))^2 \leq 4q^2 q$, wo N die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K_0/Ω_0 ist.

H. Hasse.

Zahlentheorie:

Fadini, Angelo: Elementi di aritmetica nelle classi modulo n . Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 153—170 (1953).

Etude élémentaire de faits bien connus [voir p. ex.: Hasse, Zahlentheorie, Berlin, 1949 (es Zbl. 35, 20), § 4].

G. Ancochea.

Moessner, Alfred: Einige zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 129—131 und serbische Zusammenfassung, 132 (1953).

Duparc, H. J. A., C. G. Lekkerkerker and W. Peremans: Reduced sequences of integers and pseudo-random numbers. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1953 — 002, 15 p. (1953).

Vorl. betrachten die beiden Folgen u_0, u_1, \dots von nichtnegativen ganzen Zahlen: I. $u_0 = b$, $u_{n+1} = a u_n$; a, b = natürliche Zahlen; $n = 0, 1, 2, \dots$ II. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ (Folge von Fibonacci). — m sei eine natürliche Zahl [im Fall I sei $(a, m) = 1$]. Die kleinsten nichtnegativen Reste (mod m) der Zahlen u_0, u_1, \dots bilden eine periodische Folge. Die Periodenlänge sei $l(m)$. Diese $l(m)$ bilden den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchungen. Allgemeinen Betrachtungen sind eine Reihe von numerischen Beispielen beigelegt.

H. J. Kanold.

Pérez-Cacho, L.: Über die Funktion $F(x)$. (Ganzes von x .) Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 13, 188—195 (1953) [Spanisch].

Verf. knüpft an seine frühere Arbeit über den gleichen Gegenstand (dies. Zbl. 46, 269) an und führt die elementaren Betrachtungen über $E(x) = [x]$ weiter. Zusätzlich wird noch die Funktion $q(n)$, die Anzahl der ungeraden Zahlen der Folge $\left[\frac{n}{1}\right], \left[\frac{n}{2}\right], \dots, \left[\frac{n}{n}\right]$ behandelt.

H. Ostmann.

Nicol, Charles A.: On restricted partitions and a generalization of the Euler φ number and the Moebius function. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 963—968 (1953).

Gewisse Teile der klassischen Partitionentheorie führen auf die Betrachtung einer Funktion, die gleichwertig mit $\Phi(k, n) = \varphi(n) \mu(n/(k, n)) / \varphi(n/(k, n))$ ist (k, n positiv ganz, $\varphi(n)$ Eulersche Funktion, $\mu(n)$ Möbiusfunktion, $(k, n) = \text{g. g. T.}$). Verf. kündigt ohne Beweis Sätze über $\Phi(k, n)$ an, die zum Teil Relationen der Eulerschen und der Möbiusschen Funktion vereinigen; hierbei beachte man, daß $\Phi(k, n) = \varphi(n)$ für $(k, n) = n$ und $\Phi(k, n) = \mu(n)$ für $(k, n) = 1$ ist.

H. Ostmann.

Bruijn, N. G. de and W. M. Zaring: On invariants of g. c. d. algorithms. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 105—112 (1953).

Verf. greifen eine von Goodman-Zaring (dies. Zbl. 46, 40) behandelte Fragestellung auf. In Verallgemeinerung des geläufigen Euklidischen Algorithmus bzw. des Alg. nach kleinstem Absolutrest versteht man unter einem „Alg. S “ folgendes. Es sei S eine Teilmenge der rationalen Zahlen des (offenen) Intervalls $(-1, +1)$ derart, daß für beliebige rationale r die Kongruenz $x \equiv r \pmod{1}$ genau eine Lösung $x \in S$ besitzt. Alg. S bedeute dann das System

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 q_1 + \varepsilon_1 a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= a_n q_{n-1} + \varepsilon_{n-1} a_{n+1} \\ a_n &= a_{n+1} q_n \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > 0, \\ &\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_{n-1} = \pm 1, \\ &\frac{\varepsilon_{i+1} a_{i+2}}{a_{i+1}} \in S \text{ für } i = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned} \right)$$

(so daß a_{n+1} der g. g. T. von a_1, a_2 ist). Verf. studieren im Vergleich mit beliebigem S die Längen (= Anzahl der Systemgleichungen) der 4 speziellen Algorithmen: $S_1 \subset [0, 1)$ (Eukl. Alg.), $S_2 \subset (-1/2, +1/2)$ (Division nach kl. Absolutrest), $S_3 \subset [0, -1)$ (Antieukl. Alg.), $S_4 \subset (-1, -1/2]$ (Division nach größtem Absolutrest).

H. Ostmann.

Ansari, A. R.: A theorem on matrices analogous to Fermat's theorem. Proc. nat. Inst. Sci. India 19, 465—467 (1953).

The author proves by induction the following result: Let p be a prime, α any positive integer. If B is a square matrix of order n satisfying $B^2 \equiv I \pmod{2p}$, then $B^{2p^{\alpha-1}} \equiv I \pmod{2p^{\alpha}}$.

L. K. Hua.

Riesz, Marcel: Sur le lemme de Zolotareff et sur la loi de réciprocité des restes quadratiques. Math. Scandinav. 1, 159—169 (1953).

Dirichlet hat in einer Note über das quadratische Reziprozitätsgesetz den ersten Gaußschen Beweis deshalb als besonders bemerkenswert bezeichnet, weil dieser sich ausschließlich im Gedankenkreis der quadratischen Kongruenzen bewegt. Einfacher und durchsichtiger ist zwar der dritte Gaußsche Beweis, vor allem in später von Eisenstein, Kronecker u. a. gegebenen Varianten; doch stützt sich dieser auf das Gaußsche Lemma, das seinerseits aus dem Eulerschen Kriterium gewonnen wird, und das letztere betrifft eine Kongruenz höheren Grades, erfüllt also nicht das Desideratum von Dirichlet. Verf. zeigt, daß man diesen von Dirichlet empfundenen Mangel beseitigen kann, indem man das Gaußsche Lemma aus dem Zolotareffschen Lemma herleitet. Bei diesem Vorgehen kann man überdies von vornherein den allgemeinen Fall behandeln, daß p, q ungerade teilerfremde beliebige Zahlen (statt nur Primzahlen) sind. Der vom Verf. dafür in klassisch-elementarer Ausdrucksweise entwickelte Gedankengang ist — hier der Kürze halber in modern-algebraischer Formelsprache ausgedrückt — folgender. Seien die Spaltenvektoren r und r_0 ein primes Restsystem bzw. Halbsystem mod. p . Nach Zolotareff bzw. Gauß erhält man (von der Wahl von r bzw. r_0 unabhängige) quadratische Charaktere der primen Restklassengruppe mod. p durch die Ansätze

$$\tau q = Q_p r \pmod{p}, \quad \left(\frac{q}{p}\right)_Z = |Q_p| = \text{sgn. } Q_p, \quad \tau_0 q = Q_{0p} r_0 \pmod{p}, \quad \left(\frac{q}{p}\right)_G = |Q_{0p}|_0 = \Gamma_p(q)$$

mit einer Permutationsmatrix Q_p bzw. monomialen Matrix Q_{0p} (aus Zahlen ± 1), wobei $|Q_p|$ die gewöhnliche Determinante (gleichzeitig das Permutationsvorzeichen) und $|Q_{0p}|_0$ das Produkt der Matrixelemente ± 1 (die Verlagerung von q mod. p in die Untergruppe $\equiv 1 \pmod{p}$) bezeichnet. Man zeigt dann: $1 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)_Z = \left(\frac{q}{p}\right)_G$, in dem man $r \equiv \begin{pmatrix} r_0 \\ -r_0 \end{pmatrix} \pmod{p}$ wählt; dann hat

man $\tau q = \begin{pmatrix} Q_{0p} \\ Q_{0p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ -r_0 \end{pmatrix} \pmod{p}$ und kann hieraus $Q_p = Q_{0p,0}$ folgern, indem man die Beiträge zu $|Q_p|$ der einzelnen Paare $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ aus τ betrachtet. 2. $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}_Z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}_J$ (Jacobisches Symbol), indem man die Substitution $\tau \rightarrow \tau q$ in die beiden involutorischen Substitutionen $\tau \rightarrow \tau^{-1}$ und $\tau^{-1} \rightarrow \tau q$ mit den Permutationsmatrizen J_1 bzw. J_q der Ordnung 2 zerlegt; durch Betrachtung der Zyklenzerlegungen von J_1, J_q findet man dann $Q_p = J_1 J_q = (-1)^{i_1 + i_q}$, wo i_1, i_q die Anzahlen der bei J_1, J_q invarianten Elemente, also die Lösungsanzahlen von $x^2 = 1$ bzw. $q \pmod{p}$ sind, für die man leicht $i_1 = i_q \pmod{2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}_J = 1$ beweist. 3. Das quadratische Reziprozitätsgesetz für p, q , indem man in geläufiger Weise die Kroneckersche Formel $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}_G = \operatorname{sgn.} \prod_{x,y \in \mathbb{Z}} \left(\frac{y}{p} - \frac{x}{p} \right)$ mit $x = 1, \dots, (p-1)/2$, $y = 1, \dots, (q-1)/2$ beweist.

H. Hasse.

Carlitz, L. and J. Riordan: Congruences for Eulerian numbers. Duke math. J. 20, 339–343 (1953).

Die Eulerschen Zahlen A_{ks} lassen sich definieren durch $x^k = \sum_{s=0}^k A_{ks} \binom{x+s-1}{k}$; $k > 0$ [vgl. J. Worpitzky, J. reine angew. Math. 94, 203–232 (1883)]. E. B. Shanks (dies. Zbl. 43, 12) verallgemeinerte diese Definition zu

$$\binom{x}{i}^k = \sum_{s=0}^{i+k-1} A_{ks}^{(i)} \binom{x+s-1}{ik}; \quad k > 0.$$

Verff. beweisen: Es sei p Primzahl, s eine feste natürliche Zahl. Ferner gelte $p^{j-1} < s < p^j$. Dann ist $A_{ks}^{(i)} = A_{k-s, s}^{(i)} \pmod{p^j}$ für $k \geq i$ und $b = p^{j-1} - 1 \pmod{p}$.
H. J. Kanold.

Carlitz, L.: A note on Bernoulli and Euler numbers of order $\pm p$. Proc. Amer. math. Soc. 4, 178–183 (1953).

Untersuchungen über die Bernoullischen Zahlen $B_m^{(k)}$ k -ter Ordnung und die mit den Eulerschen Zahlen k -ter Ordnung verwandten Zahlen $C_m^{(k)}$, definiert durch

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} B_m^{(k)}, \quad \left(\frac{2}{e^x + 1} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} C_m^{(k)}.$$

Verf. hatte früher (dies. Zbl. 46, 40; 50, 267) für Primzahlen $p > 3$ Kongruenzen für die $B_p^{(p)}$ hergeleitet. Jetzt beweist er bei Verschärfung gewisser Resultate von N. Nielsen (Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris 1923, pp. 292, 338) entsprechende Ergebnisse für die Zahlen $B_p^{(k-1)}, C_p^{(k-1)}, C_p^{(k-1)}$.
H.-E. Richert.

Carlitz, L.: Some congruences of Vandiver. Amer. J. Math. 75, 707–712 (1953).

Theorem: Let $\{a_i\}_m$ for $i = 1, \dots, k$ denote a sequence of integral numbers mod p , satisfying $a_i^{p^r} (a_i^{p^r} - a'_{i,p}) = 0 \pmod{p^r}$, where after expansion $a_i^{m+s(p-1)}$ is replaced by $a_{i,m-s(p-1)}$ and the $a'_{i,p}$ are integral mod p . Let $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ denote numbers, integral mod p , which satisfy $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0 \pmod{p^l}$. [In the text is here a misprint.] Let u_1, \dots, u_k be integers such that for $i = 1, \dots, k$ holds $p^{l-1}(p-1) | u_i$. Put $c_{i,p} = \prod_{j \neq i} a'_{j,p} u_j^{u_j(p-1)}$. Then

$$a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k} (\lambda_1 a_1^{u_1} c_{1,p} + \dots + \lambda_k a_k^{u_k} c_{k,p})^r = 0 \pmod{p^{r^l}, p^{m_1}, \dots, p^{m_k}},$$

where after expansion $a_i^{m_i + su_i}$ is replaced by $a_{i,m_i - su_i}$. — The applications refer to Euler numbers, Bernoulli numbers (Vandiver) and the coefficients of the power series for $\operatorname{sn} x$ and $x/\operatorname{sn} x$.

W. Verdenius.

Carlitz, L.: Some theorems on Kummer's congruences. Duke math. J. 20, 423–431 (1953).

Let p be a fixed prime and let $\{a_m\}$ be a sequence of rational numbers that are integral mod p . Let $\sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} a_{m+s(p-1)} a_p^{r-s} = 0 \pmod{p^r}$ for all $m, r \geq 1$. This is called Kummer's congruence for $\{a_m\}$. Theorems: (1) If $\{a_m\}$ and $\{b_m\}$ satisfy Kummer's congruence

then also $\{a_m b_m\}$ does. (2) Let $c_m^{(k)} = m^k a_m$, $k \geq 1$. If $\{a_m\}$ satisfies Kummer's congruence, then $\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c_{m+s(p-1)}^{(k)} a_p^{r-s} \equiv 0 \pmod{p^r}$. (3) Let $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m x^m}{m!}$, $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m x^m}{m!}$, $a_p \equiv b_p \pmod{p}$ and (*) $(D^p - a_p D) f(x) = p \sum_{m=0}^{\infty} A_m f^m(x)$ and a like formula

for $g(x)$, then $c_m = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} a_s b_{m-s}$ satisfies $\sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c_{m+s(p-1)}^{(k)} a_p^{r-s} \equiv 0 \pmod{p^r}$. — The proofs are based on some special identities involving binomial coefficients. — These theorems

are extended in various ways. E. g. if in (3) (*) is replaced by $f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m f^m(x)$ then the same congruence holds, but now mod p^{r_1} , where $r_1 = [\frac{1}{2}(r+1)]$. — (1) and (2) are applied to Euler, Bernoulli and Stirling numbers and to the coefficients of the Jacobi elliptic functions $\operatorname{sn} x$ and $x/\operatorname{sn} x$.
W. Verdenius.

Carlitz, L.: Kummer congruences and the Schur derivative. Amer. J. Math. **75**, 699—706 (1953).

Let p be a fixed prime and let $\{a_m\}$ be a sequence of rational integers mod p , $E a_m = a_{m+1}$ and suppose that $(E^{p-1} - a_p)^r a_m \equiv 0 \pmod{p^r}$ holds for all $m \geq r \geq 1$ (Kummer's congruence). Theorem: $(E^b - a_p^{b/(p-1)})^r a_m \equiv 0 \pmod{p^{re}}$ holds for all $m \geq r$, $e \geq 1$, $r \geq 1$, where $p^{e-1}(p-1) | b$. — Therefore, if $(E^{p^m(p-1)} - a_p^{p^m})^r a_{p^m} = p^{r(m+1)} Q_{m,r}$ it follows that $Q_{m,r}$ is integral mod p . The Schur derivative (cf. Carlitz, this Zbl. **50**, 38) is generalized by $\Delta a_{p^m} = (a_{p^{m+1}} - a_p^{p^m} a_{p^m}) / p^{m+1}$ and $\Delta^r a_{p^m} = (1^{r-1} a_{p^{m+1}} - a_p^{p^{m+r-1}} \Delta^{r-1} a_{p^m}) / p^{m+1}$. It is proved that $\Delta^r a_{p^m}$ is integral for $1 \leq r \leq p-1$, while $\Delta^p a_{p^m}$ has the denominator p , provided $Q_{m,p} \not\equiv 0 \pmod{p}$. For $1 \leq r \leq p$ holds

$$\Delta^r a_{p^m} \equiv a_p^{(e_r-r)p^m} Q_{m,r} \frac{\prod_{i=1}^r (p^i - 1)}{r! (p-1)^r} \pmod{p^m},$$

where $e_r = (p^r - 1)/(p - 1)$. — There are many applications made, especially to the coefficients of the Jacobi elliptic functions; e. g.: if k^2 is rational mod p and $\operatorname{sn}(x, k^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m x^m}{m!}$, then $\Delta^r a_{p^m}$ is integral mod p , for $1 \leq r \leq p-1$.
W. Verdenius.

Cohen, Eckford: Congruence representations in algebraic number fields. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 444—470 (1953).

The paper contains a study of congruences over an algebraic number field. Addition to the references given by the author, the reviewer adds the following two articles: C. L. Siegel, this Zbl. **16**, 12 and L. K. Hua, this Zbl. **42**, 43, which seem to be helpful to the reader who likes to study the paper.
L. K. Hua.

Erdős, P.: Arithmetical properties of polynomials. J. London math. Soc. **28**, 416—425 (1953).

Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganz-rationalen Koeffizienten, deren größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist. Der Grad von $f(x)$ sei $l \geq 3$ und der Koeffizient von x^l sei positiv. Es werde vorausgesetzt, daß $f(x)$ nicht durch die $(l-1)$ -te Potenz eines linearen Polynoms mit ganzen Koeffizienten teilbar ist. Verf. beweist, daß es dann unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt derart, daß $f(n)$ nicht durch eine $(l-1)$ -te Potenz teilbar ist. Falls l eine Potenz von 2 ist, wird dabei allerdings noch vorausgesetzt, daß eine positive ganze Zahl n mit $f(n) \not\equiv 0 \pmod{2^{l-1}}$ existiert. Im letzteren Falle gibt es unendlich viele positive ganze n mit $f(n) = 2^{l-1} u_n$, wo u_n ungerade und nicht durch eine $(l-1)$ -te Potenz teilbar ist.
H. D. Kloosterman.

Krupeck, Eleonore: Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte. Math. Z. **59**, 253—257 (1953).

Die Verf. löst das System multigrader Gleichungen $x_{i1}^m + \dots + x_{ik}^m = \dots = x_{i1}^m + \dots + x_{ik}^m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) für beliebig vorgeschriebene Werte von l und n mit paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen x_{ij} — dabei wird $k = 2^{l^n - 1}$

und zeigt damit folgenden Satz: Ist $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit reellen a_i und positivem a_n , so gibt es eine Zahl $s > 0$ derart, daß jede Zahl $z > 0$ dargestellt werden kann als $z = r \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots$ mit $0 < f(x_1) < f(x_2) < \dots$, $0 < x_1 < x_2 < \dots$, ganzen x_i und $0 \leq r < s$. R. Sprague.

Lech, Christer: A note on recurring series. Ark. Mat. 2, 417—421 (1953).

The author generalizes a result by Th. Skolem (this Zbl. 11, 392) and K. Mahler (this Zbl. 10, 390), and proves the following theorem: „In a field of characteristic 0, let c_v ($v = 0, 1, 2, \dots$) satisfy the recursive formula

$$c_v = \lambda_1 c_{v-1} + \lambda_2 c_{v-2} + \dots + \lambda_n c_{v-n} \quad (v = n+1, n+2, \dots).$$

If $c_v = 0$ for infinitely many v , then these vanishing c_v occur periodically in the sequence from a certain v onwards. The proof is similar to that of Mahler. The main difficulty arises in the case when the field generated by all c_v is transcendental over the rational field. K. Mahler.

Mordell, L. J.: On the integer solutions of the equation $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = n$. J. London math. Soc. 28, 500—510 (1953).

In this paper the author proves various theorems concerning the diophantine equation (1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = n$. There are for instance no integer solutions when $n \equiv 3 \pmod{4}$, $n \equiv 6 \pmod{8}$ and $n \equiv \pm 3 \pmod{9}$. A simple proof of Hurwitz's result on the non-existence of integer solutions with $xyz \neq 0$ when $n = 0$ is given. For $n = 1$ there are an infinity of integer solutions, and simple formulae give all solutions. This result is due essentially to P. Bachmann [Arch. Math. Phys., III. Ser. 24, 89—90 (1915)]. In case $n = 2^\alpha$, $\alpha > 0$, (1) has an infinity of integer solutions when α is odd, but only the solutions typified by $x = y = 0$ when α is even. There are an infinity of solutions of (1) when $n \neq 0$, if there is one, except possibly when $n = 4^\alpha p^{2\beta} q^{2\gamma} \dots$, where p, q, \dots are primes $\equiv 3 \pmod{4}$, and $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \dots$. Applying ideas of Cassels and Hurwitz (A. Hurwitz, Mathematische Werke, Bd. 2, Basel 1933, S. 410—421, this. Zbl. 7, 195), the author gives a method to find out whether solutions exist or not of the more general equation $x^2 + y^2 + z^2 - axyz = b$. W. Ljunggren.

Ljunggren, Wilhelm: On an improvement of a theorem of T. Nagell concerning the Diophantine equation $Ax^3 + By^3 = C$. Math. Scandinav. 1, 297—309 (1953).

T. Nagell zeigte in seiner Arbeit: Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 4, 209—270 (1925)]: Die diophantische Gleichung $Ax^3 + By^3 = C$, wobei $C = 1$ oder 3, $A = 1$, $B = 1$, falls $C = 1$, 3 $A B^2$, falls $C = 3$, hat höchstens eine ganzrationale Lösung. Ist x_1, y_1 die Lösung, so ist $z = C^{-1} (x_1^3 A + y_1^3 B)^3 = \xi^{2r}$, wo ξ die Grundeinheit im Körper $K(\sqrt[3]{A B^2})$ und $r = 0$, ganz. P. Haeggmark (dies. 38, 180) lieferte hierzu wertvolle Beiträge. Nun zeigt der Verf., daß $r = 1$ nicht möglich ist. Es ist also z die Grundeinheit ($r = 0$) oder das Quadrat dieser Einheit ($r = 1$). N. Hofreiter.

Franqui, Benito and Mariano Garcia: Some new multiply perfect numbers. Amer. math. Monthly 60, 459—462 (1953).

Verff. geben 63 mehrfach vollkommene Zahlen in ihrer Primzahlpotenzzersetzung an. Davon sind 4 auch von P. Poulet gefunden, aber nicht veröffentlicht worden. 21 stehen in einer Liste von A. L. Brown, die demnächst in Scripta math. erscheinen soll. H. J. Kanold.

Uhler, Horace S.: On the 16th and 17th perfect numbers. Scripta math. 19, 128—131 (1953).

$M_p = 2^p - 1$ ist Primzahl für $p = 2203$ und $p = 2281$. Daraus folgt: $v_{16} = 2^{2202} (2^{2203} - 1)$ und $v_{17} = 2^{2280} (2^{2281} - 1)$ sind vollkommene Zahlen. v_{16} und v_{17} werden als Zahlen im dekadischen System angegeben, v_{17} ist z. B. eine 1373stellige Zahl. M_{2281} ist die größte bekannte Primzahl. H. J. Kanold.

Kanold, Hans-Joachim: Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen. J. reine angew. Math. 192, 24—34 (1953).

It is well-known that any odd perfect number n must be of the form $n = p^\alpha \prod_{q=1}^r q_e^{2\beta_q}$, where p and q_e are different primes and $p - \alpha \equiv 1 \pmod{4}$. In this paper the author first proves the following theorem: If $(p-1, 2\beta_q+1) = 1$ and if a denotes the number of primes $q_e \equiv 1 \pmod{p}$, then $1 < a < r$ and

$$\alpha \leq \text{Min.} (a(a-2), [\frac{3}{4}a(a-1)]) \text{ if } p^{a-1} \nmid \prod_{i=0}^{2\beta_q} q_e^i, \quad q = 1, 2, \dots, r,$$

otherwise $\alpha \leq [\frac{1}{4}(a-1)(3a-2)]$. If $(q_1-1, \frac{1}{2}(\alpha+1)) = (q_1-1, 2\beta_q+1) = 1$ and if b denotes the number of primes $q_e \equiv 1 \pmod{q_1}$, $q_1 < q_e$, $q = 2, 3, \dots, r$, a similar, but more complicated theorem, is proved concerning b and $2\beta_1$. At last it is shown that $n \neq p^\alpha q_1^4 q_2^4 \prod_{q=3}^r q_e^2$ and $n \neq p^5 \prod_{s=1}^k q_s^2 \prod_{\lambda=k+1}^r q_\lambda^4$. In the proofs use is made of earlier results of the author (this Zbl. 24, 101; 41, 16; 47, 276) and of a theorem due to T. Nagell and the reviewer (this Zbl. 27, 157). W. Ljunggren.

Kanold, Hans-Joachim: Über befreundete Zahlen. II. Math. Nachr. 10, 99—111 (1953).

Let m_1 and m_2 be a pair of amicable numbers, $m_1 = \prod_{s=1}^k p_s^{\alpha_s}$, $m_2 = \prod_{\lambda=1}^l q_\lambda^{\beta_\lambda}$, where p and q denote primes. In an earlier paper (this Zbl. 50, 41) the author studied the case $k = 1$. In this second paper, concerning the same subject, five new theorems are derived. In the first three of them there are no restrictions on k and l . As an example we mention the result: If $k = l = 2$, then we must have $m_1 = m_2 = \text{an odd perfect number}$. W. Ljunggren.

Parthasarathy, M.: On the representation of an integer as the sum of three fourth powers. Proc. Amer. math. Soc. 4, 523—527 (1953).

Verf. beweist, daß die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl N als eine Summe von drei Biquadraten größer als $\exp(c \log N / \log \log N)$ ist (c ist eine gewisse von N unabhängige Konstante). H. D. Kloosterman.

Sandham, H. F.: A square as the sum of 7 squares. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 230—236 (1953).

In der Entwicklung

$$(1 + q^{1^2} + q^{(-1)^2} + \dots + q^{n^2} + q^{(-n)^2} + \dots)^a \\ = (1 + 2q^{1^2} + 2q^{2^2} + \dots + 2q^{n^2} + \dots)^a = \sum_{n=0}^{\infty} r_a(n) q^n,$$

in der offenbar $r_a(n)$ die Anzahl der Kompositionen von n der Gestalt $n = (\pm x_1)^2 + (\pm x_2)^2 + \dots + (\pm x_a)^2$ angibt, geht für $a = 3$ und $a = 5$ die Bestimmung von $r_3(m^2)$ und $r_5(m^2)$ bereits auf Hurwitz zurück:

$$r_3(m^2) = 6 \sum_{r=1(2)} \left\{ \sigma_1\left(\frac{m}{r}\right) - 2\sigma_1\left(\frac{m}{2r}\right) \right\} \mu(r) (r|4), \quad r_5(m^2) = 10 \sum_{r=1(2)} \sigma_3\left(\frac{m}{r}\right) r \mu(r).$$

Hierin ist $\mu(x)$ die Möbiusfunktion, $\sigma_a(x) = \sum_{d|x} d^a$ sowie (in des Verf. Bezeichnung)

$(r|4)$ der Koeffizient in $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r|4)}{r^2}$. [Es seien noch $\mu(x)$ und $\sigma_a(x)$ gleich Null für nicht ganzzahliges x .] Verf. leitet mit klassischen Verfahren

$$r_7(m^2) = 14 \sum_{r=1(2)} \left\{ \sigma_5\left(\frac{m}{r}\right) + 8\sigma_5\left(\frac{m}{2r}\right) \right\} r^2 \mu(r) (r|4)$$

her.

H. Ostmann.

Natucci, Alpinolo: *Ricerche sistematiche sull'ultimo teorema di Fermat.* Giorn. Mat. Battaglini **81** (V. Ser. **1**), 171—179 (1953).

Vandiver, H. S.: A supplementary note to a 1946 article on Fermat's last theorem. Amer. math. Monthly **60**, 164—167 (1953).

In einer früheren Arbeit [Amer. math. Monthly **53**, 555—578 (1946)] hat Verf. über den gegenwärtigen Stand, sowie über die historische Entwicklung des Fermatproblems berichtet. In Ergänzung hierzu referiert Verf. noch über einige Arbeiten, deren Erwähnung damals versehentlich unterblieben war. *H. Ostmann.*

Inkeri, K.: Abschätzungen für eventuelle Lösungen der Gleichung im Fermatschen Problem. Ann. Univ. Turku, Ser. A **16**, Nr. 1, 9 S. (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **30**, 113) hatte Verf. bez. $x^l + y^l = z^l$ $[(x, y, z) = 1, 0 < x < y < z, l \geq 3$ Primzahl] die Abschätzungen

$$x > (30 l^2 + 1)^{1/2} \left(\frac{1}{2} l^2 - 1 \right), \quad x < \frac{1}{2} l^{l-4}$$

bewiesen. Verf. gibt für den sogenannten 1. Fall (d. h. $l \mid x y z$) die Verbesserung

$$x < \frac{1}{2} l^{1/2} [2l \log 2 [(2l^3 + l) \log (2l \log 2)]^{1/2} - [(2l^3 - l) \log 3l]^{1/2}]$$

und für den 2. Fall ($l \nmid x y z$) $x > l^{3l-4}$, $z < \frac{1}{2} l^{l-1}$ (nach Obláth, dies. Zbl. **47**, 46, gilt schon $z > l^{3l-1}$). Als numerische Schranken erhält man aus obigen Abschätzungen unter Verwendung von $l \geq 253\,747\,889$ (im ersten Fall) bzw. $l \geq 619$ (im 2. Fall) $x > 10^{6 \cdot 10^9}$ bzw. $x > 10^{5359}$. *H. Ostmann.*

Meinardus, Günter: Über das Partitionenproblem eines reell-quadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. **126**, 343—361 (1953).

In einem reell-quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{d})$ der Diskriminante d sei $P(\mu)$ die Anzahl sämtlicher additiven Zerlegungen $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r$ der total-positiven ganzen Zahl μ in total-positive ganze Zahlen μ_i dieses Körpers. Verf. beweist:

$$P(\mu) = \exp \{3(N \zeta(3) d^{-1/2})^{1/3} + \chi_1 \log^2 N + \chi_2 \log N + \mathcal{O}(\lambda, N)\} \cdot (1 + O(N^{-1/21}))$$

für $N \rightarrow \infty$. Darin sind χ_1 und χ_2 reelle Konstanten; $\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion; $N = N(\mu)$; λ ist der Hecke'sche Größencharakter $\exp \{(\pi i \log \eta) \log(\mu' \mu)\}$, wo μ' die zu μ konjugierte Zahl und η die kleinste total-positive Einheit $\neq 1$ ist. Der Ausdruck $\mathcal{O}(\lambda, N)$ ist als Funktion von μ beschränkt und wird vom Verf. in Gestalt einer unendlichen Reihe gegeben. Das Resultat stellt eine erhebliche Verschärfung eines Resultats von Rademacher dar [Proc. internat. Congr. Math., Cambridge Mass. 1950, Vol. **1**, 356—362 (1952)]. *H. D. Kloosterman.*

Tong, Kwang-Chong: On divisor problems. J. Chinese math. Soc. **2**, 258—265 u. engl. Zusammenfassg. 266 (1953) [Chinesisch].

By the convexity of Lindelöf function $\mu(\sigma)$ in the Riemann zeta-function (cf. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford 1951, Chap. V., this Zbl. **42**, 79) the author proves that

$k = 4$	5	6	7	8	9	10	11 ...
$\alpha_k \leq 1/2$	4/7	5/8	71/107	41/59	31/43	26/35	19/25 ...
$\beta_k \leq 23/54$	1/2	35/62	11/18	149/230 ...			

where α_k and β_k (cf. Titchmarsh, loc. cit. Chap. XII) have its usual meaning in the divisor problem. *L. K. Hua.*

Horváth, J.: Primzahlen. IV. Revista Mat. element. **2**, 54—72 (1953) [Spanisch].

• **Landau, E.:** Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. With appendix by P. T. Bateman. 2 vol. New York: Chelsea Co. 1953. 1001 p. \$ 17,50 (Rep.).

Sathe, L. G.: On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. II. J. Indian math. Soc., n. Ser. **17**, 83—141 (1953).

Jetzt wird Σ_2 abgeschätzt (zur Bezeichnung vgl. Teil I, dies. Zbl. **50**, 271). Die Herleitung der benötigten Abschätzung ist äußerst verwickelt und mühsam, so daß für Einzelheiten auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß. *E. Hlawka.*

Neumann, J. von and H. H. Goldstine: A numerical study of a conjecture of Kummer. *Math. Tables Aids Comput.* **7**, 133—134 (1953).

Die Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{3}$ zerfallen in drei Klassen, je nachdem für die normierte Gaußsche Summe $\tau(\chi_p) = \sum_{x \bmod p} \chi_p(x) e^{(2\pi i/\mu)x}$ zu einem kubischen Charakter χ_p der primen Restklassengruppe $\bmod p$ der doppelte Realteil $\eta_p = \tau(\chi_p) + \tau(\bar{\chi}_p) = \sum_{y \bmod p} e^{(2\pi i/p)y^3}$ im Intervall

$$-2\sqrt{p} \cdots -\sqrt{p}, \quad -\sqrt{p} \cdots \sqrt{p}, \quad \sqrt{p} \cdots 2\sqrt{p}$$

liegt. Kummer vermutete, daß diese drei Primzahlklassen die Dichtigkeiten $1/6$, $1/3$, $1/2$ haben. Er fand nämlich durch numerische Berechnung von η_p für die 43 Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{3}$ unter 500 die relativen Häufigkeiten 0,1556, 0,3111, 0,5333. — Verff. haben die numerische Berechnung auf die 611 Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{3}$ unter 10000 ausgedehnt, nach einem von A. Selberg entworfenen Rechenprogramm, das einschließlich Kontrollen rund 15 Millionen Multiplikationen erforderte. Dabei ergaben sich die relativen Häufigkeiten 0,2258, 0,3290, 0,4452, die eine beträchtliche Abweichung von der Kummerschen Vermutung zeigen, vielmehr (Bemerkung von Gudrun Beyer) besser die Brüche $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$ approximieren. *H. Hasse.*

Vinogradov, I. M.: Verbesserung einer Abschätzung für die Summe der Werte $\chi(p+k)$. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 285—290 (1953) [Russisch].

Es sei $\chi \equiv 1$ ein Charakter modulo der Primzahl $q \geq c_0$ und k ganzzahlig mit $0 < k < c_0$, und p durchlaufe die Primzahlen. Es wird $S = \sum_{p \leq N} \chi(p+k)$ ab-

geschätzt, wobei das Wachstum von N, q der Bedingung $q^{3/4} \ll N \ll q^{5/4}$, oder also $q^{-1/2} \ll \Delta \ll 1$ mit $\Delta = N^{-1} q^{3/4}$ unterworfen ist. $A \ll B$ bedeutet $A = O(B)$. Die frühere [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 197—210 (1952)] Abschätzung $S \ll N^{1-\varepsilon} \Delta^{1/4}$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ wird durch geringe Abänderung der Methode (es werden dieselben Lemmata benutzt) zu $S \ll N^{1+\varepsilon} (\Delta^{1/3} + N^{-1/10})$ verschärft. Diese ist nicht-trivial für $\Delta \ll q^{-\varepsilon/9/4}$. *H. L. Schmid-G. Beyer.*

Rédei, L.: Die Existenz eines ungeraden quadratischen Nichtrestes $\bmod p$ im Intervall $1, \sqrt{p}$. *Acta Sci. math.* **15**, 12—19 (1953).

Verf. beweist den Satz: Für jede ungerade Primzahl $p \neq 3, 5, 7, 11, 13, 23, 59, 109, 131$ gibt es eine ungerade Primzahl $q < \sqrt{p}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Dieser Satz verschärft Aussagen, die in dieser Richtung von T. Nagell (dies. Zbl. **36**, 302) und anderen Autoren früher bewiesen wurden. Der Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$ erledigt sich sofort nach einem Satz von A. Thue (vgl. A. Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, Berlin 1939, insbesondere S. 45—46, dies. Zbl. **22**, 111). Die Fälle $p \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ werden gesondert behandelt, ohne Anwendung des oben erwähnten Satzes von Thue. *H. J. Kanold.*

Kneser, Martin: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmen-gen. *Math. Z.* **58**, 459—484 (1953).

Verf. erzielt in der vorliegenden Arbeit ein sehr wesentliches Resultat über die (Schnirelmann-)Summe von $n+1$ ($n \geq 1$) Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Nennt man eine Menge \mathfrak{A} rational, wenn die zugehörige dyadisch zu schreibende reelle Zahl $\rho(\mathfrak{A}) = e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ (d. h. $e_n = 1$ für $n \in \mathfrak{A}$, $= 0$ sonst) rational ist, so lautet der Hauptsatz: Es seien $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Hinreichend dafür, daß $\sum_{i=0}^n \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ rational ausfällt, ist

das Bestehen der Relation $\delta^*(\mathfrak{A}) = \lim_{x=1,2,\dots} A(x)/x < \lim_{x=1,2,\dots} (A_0(x) + A_1(x) + \dots + A_n(x))/x$

zwischen den asymptotischen Dichten. Überdies ist \mathfrak{A} nicht nur rational, sondern speziell noch Menge mit Relativnullen (d. h. es gibt Mengen $\mathfrak{B} \neq \{0\}$ mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$). — Die Rationalität von \mathfrak{A} zieht offenbar sofort die Existenz von $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x)/x$ nach sich. — Die scharfe Aussage obigen

Satzes gestattet Verf., Abschätzungen für $\delta^*\left(\sum_{i=0}^n \mathfrak{A}_i\right)$, die Ref. aus Abschätzungen der Anzahl-

funktion $A(x)$ im Fall $n = 1$ folgern konnte, für beliebiges $n \geq 1$ sicherzustellen. Ausgangspunkt hierfür ist die folgende Ergänzung obigen Satzes: Es sei $\delta^*(\mathfrak{A}) = \delta^*(\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n)$ und g die primitive Periode von $q(\mathfrak{A})$. Mit \mathfrak{A}^g (entsprechend \mathfrak{A}_i^g) bezeichne man die Gesamtheit aller ganzen Zahlen $x \neq 0$, die modulo g einer Zahl aus \mathfrak{A} kongruent sind. Dann stimmen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^g (auf Grund der Relativnullenexistenz) von einer Stelle an überein, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A^g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \delta^*(\mathfrak{A}_0^g, \dots, \mathfrak{A}_n^g) = \frac{r}{g} \cdot \delta^*(\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n) = \frac{r}{g} \quad (0 \leq r \leq n).$$

Die Beweise beruhen auf einer starken Ausnutzung der Methoden, die zum Beweis des bekannten (finiten) Dichtensatzes von H. B. Mann [Ann. of Math., II. Ser. **43**, 523—527 (1942)] und F. Dyson (J. London math. Soc. **20**, 8—14 (1945)], insbesondere in der durch J. v. d. Corput (dies. Zbl. **30**, 16, 17) beschriebenen Fassung geführt haben. — Unter den Abschätzungen, die Verf. gewinnt, seien die folgenden hervorgehoben. $\delta^*(\mathfrak{A}) \leq [(n+1) \cdot \delta^*(\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n)]^{-1}$ (ohne die eckige Klammer ist die Abschätzung trivial). — Enthält \mathfrak{A} mindestens k aufeinanderfolgende ganze Zahlen, aber nicht schon von einer Stelle an alle natürlichen Zahlen, so gilt $\delta^*(\mathfrak{A}) \leq (k/(k+n)) \delta^*(\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n)$. — Enthält \mathfrak{A}_i mindestens k_i aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ($i = 0, 1, \dots, n$), \mathfrak{A} aber nicht von einer Stelle an alle natürlichen Zahlen, so gilt $\delta^*(\mathfrak{A}) \leq \lim_{x=1,2,\dots} \sum_{i=0}^n \frac{k_i - z_i A_i(x)}{k_i x}$, $0 \leq z_i \leq k_i$ und $\sum_{i=0}^n z_i = n$. — Aus dem eingangs formulierten Satz folgt noch unmittelbar, daß in den letztgenannten Abschätzungen notwendig dann das „ \dots “ Zeichen steht, wenn die Größe rechter Hand jeweils irrational ist, womit eine frühere Vermutung des Ref. bewiesen ist. In Ergänzung hierzu gewinnt Verf. noch: Ist eine der beiden asymptotischen Dichten $\delta^*(\mathfrak{A}_1)$, $\delta^*(\mathfrak{A}_2)$ irrational, und ist $\delta^*(\mathfrak{A}_1) + \delta^*(\mathfrak{A}_2) = 1$, so folgt $\delta^*(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) = 1$ [ist lediglich $\delta^*(\mathfrak{A}_1) = \delta^*(\mathfrak{A}_2) = 1$, so geht schon auf I. Schur zurück, daß $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ von einer Stelle an alle natürlichen Zahlen enthält].

H. Ostmann.

Ayoub, R. G.: On the Waring-Siegel theorem. Canadian J. Math. **5**, 439—450 (1953).

Let F be a totally real algebraic extension of the rationals of degree n . It was established by C. L. Siegel that, for $s \geq kn$ ($2^{k-1} + n > 1$), an asymptotic formula for the number of ways to decompose a totally real integer r of F into a sum of s k -th powers of totally positive integers holds. Siegel's original method is the circle method of Hardy-Littlewood and Vinogradov with the aid of his original Farey dissection. The author improves Siegel's upper bound to $n(2^k + n) - 1$ by means of two tools of the reviewer: (i) the mean-value method and (ii) the estimation of the exponential sum over an algebraic field. Siegel conjectured that there might exist an upper bound which is independent of n . It is the opinion of the reviewer that by the full utilization of (i) and (ii), one may solve the problem of Siegel.

L. K. Hua.

Mordell, L. J.: Note on the linear symmetric congruence in n variables. Canadian J. Math. **5**, 433—438 (1953).

Von dem allgemeinen Problem, für ein ganzzahliges Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ in $n \geq 2$ Unbestimmten x_i die Lösungsanzahl $N_p(f)$ der Kongruenz $f \equiv 0 \pmod{p}$ (p Primzahl) asymptotisch in p abzuschätzen, ist bisher nur im Spezialfall $f = a_1 x_1^d + \dots + a_n x_n^d + a$ die in den Koeffizienten gleichmäßige Abschätzung $N_p(f) = p^{n-1} + O(p^{n-1/2})$ bekannt. Verf. betrachtet hier den Fall, daß $f = a_0 s_0 + a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$ linear in den symmetrischen Grundfunktionen s_i ($s_0 = 1$) der x_i ist. Er vermutet, daß dann ebenfalls die angegebene asymptotische Abschätzung gilt, sofern nur die Gleichung $f \equiv 0$ weder durch eine lineare geb. o. chene Substitution $x'_i = (A x_i + B)/(C x_i + D)$ in die Form $s_n + a s_0 = 0$, noch durch eine lineare ganze Substitution $x'_i = A x_i + B$ in eine der Formen $a s_n + b s_{n-1} = 0$, $s_{n-2} = 0, \dots, s_2 = 0$ überführbar ist. Er bestätigt diese Vermutung leicht für $n = 2, 3$ und durch mühsame Fallunterscheidungen auch für $n = 4$, hier gestützt auf die mit der Riemannschen Vermutung für elliptische Kongruenzfunktionskörper äquivalente Abschätzung $N_p(y^2 = f_4(x) \pmod{p}) = p + O(p^{1/2})$ für quadratfreie biquadratische Polynome $f_4(x)$.

H. Hasse.

Dufresnoy, J. et Ch. Pisot: Sur les dérivées successives d'un ensemble fermé d'entiers algébriques. Bull. Sci. math., II. Sér. **77**, 129—136 (1953).

Die Überlegungen einer kürzlich erschienenen Arbeit der Verff. (dies. Zbl. 51, 29) werden weitergeführt. Sei S die Menge aller ganzzahligen Zahlen, deren sämtliche Konjugierte im Einheitskreis liegen, so ist nach M. Salem die Menge S abgeschlossen und die abgeleiteten Mengen $S', S'', \dots, S^{(n)}, \dots$ sind nicht leer. Hier werden weitere Eigenschaften der Mengen $S^{(n)}$ angegeben, insbesondere wird gezeigt, daß das kleinste Element von $S^{(n)}$ größer als $n^{1/4}$ ist. *F. Kasch.*

Bambah, R. P.: On lattice coverings. Proc. nat. Inst. Sci. India 19, 447—459 (1953).

Ist K eine Menge, Γ ein Vektorgitter [sein Maß sei $m(\Gamma)$] im R_n , dann heißt Γ Überdeckungsgitter der Menge K , wenn die Vereinigungsmenge ΓK aller Bildmengen γK ($\gamma \in \Gamma$) der ganze R_n ist. Das $\sup m(\Gamma)$ erstreckt über alle Überdeckungsgitter von K heißt Überdeckungskonstante $c(K)$ (wenn K konvex, vgl. die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 35, 28). Verf. entwickelt nun die Theorie der $c(K)$, geleitet von der Theorie der Grenzdeterminante von K [vgl. die klassische Arbeit von K. Mahler, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 187, 151—187 (1946)], doch müssen die Beweise vielfach anders geführt werden. Γ heißt maximales Überdeckungsgitter von K , wenn $m(\Gamma) = c(K)$. Es wird nun gezeigt: Ist K beschränkt, abgeschlossen und besitzt K innere Punkte, dann besitzt K maximale Überdeckungsgitter. Ein Punkt des R_n heißt genau überdeckt von einem Gitter Γ , wenn er für kein γ aus Γ im Innern von γK liegt. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge K besitzt für jedes maximale Überdeckungsgitter von K genau überdeckte Punkte (welche natürlich Randpunkte von K sind) und ihre Menge liegt nicht in einer Hyperebene. Es sei nun K nicht beschränkt, aber abgeschlossen, besitze innere Punkte und sei im Lebesgueschen Sinne meßbar mit Maß $V(K)$, (welches auch ∞ sein kann). Es ist klar, daß $c(K) \leq V(K)$ ist. Ist $V(K) < \infty$, dann gibt es Gitter Γ mit $m(\Gamma) = c(K)$, so daß die Menge der Punkte des R_n , welche nicht in ΓK liegen, das Maß 0 hat. Verf. betrachtet nun Sternkörper K (beschränkt oder nicht) mit einem Mittelpunkt o und die Körper $K^{(t)}$ (Menge aller Punkte x von K mit $\sigma x \leq t$). Es gibt Sternkörper K mit $V(K) = \infty$ sowohl mit $c(K) < \infty$ als auch mit $c(K) = \infty$. Es ist $\sup V(K)/c(K) = \infty$ (erstreckt über alle beschränkten Sternkörper), was für die Menge der konvexen Körper nicht eintreten kann. Weiter wird gezeigt: $\lim_{t \rightarrow \infty} c(K^{(t)}) = c(K)$. Aus diesem Satz können die gleichen

Folgerungen gezogen werden, wie bei Mahler (loc. cit.) und H. Davenport und C. A. Rogers (vgl. dies. Zbl. 34, 176). Es besitzt z. B. für jedes $k > 0$, $\alpha \geq 1$ $|x| (k|x|^\alpha + |y|^\alpha)^{1/\alpha} \leq$ die gleiche Überdeckungskonstante wie $|x y| \leq 1$. *E. Hlawka.*

Cassels, J. W. S.: Yet another proof of Minkowski's theorem on the product of two inhomogeneous linear forms. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 365—366 (1953).

Ein kurzer Beweis für den wohlbekannten Satz 1: Wenn die zwei reellen Linearformen $\xi = \alpha x + \beta y + p$, $\eta = \gamma x + \delta y + q$ die Determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ haben, so hat $|\xi \eta| \leq \Delta/4$ eine Lösung in ganzen Zahlen x, y . Ferner wird bewiesen Satz 2: Wenn in Satz 1 α/β irrational und ε positiv ist, so gibt es unter den vorhergenannten Lösungen auch eine mit $|\xi| < \varepsilon$. Der Beweis geschieht mit Hilfe des einfachen Lemmas: Sind a, b, c, d reelle Zahlen mit $|ad - bc| \leq |d|/2$, $|cd| \leq |c|$, $c \neq 0$, so gibt es eine ganze Zahl x mit $|(a + cx)(b + dx)| \leq |d|/4$, $|a + cx| \leq |c|$. (Natürlich sind für x höchstens drei Werte möglich.) — Ref. teilt nicht die Ansicht des Verf., daß der sehr elegante zahlgeometrische Beweis von Sawyer (dies. Zbl. 34, 26) für Satz 1 unvollständig sei, da folgendes ohne Beweis klar ist: Wird in einer Ebene ein von zwei konjugierten Hyperbeln begrenztes geschlossenes Hyperbelkreuz K und ein Punktgitter \mathfrak{P} gegeben, von dem kein Punkt zu K gehört, so läßt sich ein (einfaches) Viereck \mathfrak{B} mit den Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 ($\in \mathfrak{P}$) angeben (von denen drei in einer Geraden liegen dürfen), so daß jeder der durch K bestimmten vier Quadranten einen der Punkte P_1, \dots, P_4 und \mathfrak{B} keinen Punkt von \mathfrak{P} außer P_1, \dots, P_4 enthält. *L. Rédei.*

Žmud', É. M.: Über ganzzahlige Transformationen der quadratischen Formen. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 287—344 (1953) [Russisch].

Der Verf. untersucht quadratische Formen mit ganzrationalen Koeffizienten und beliebiger Variablenzahl in ihrer Abhängigkeit von linearen Transformationen mit beliebiger Determinante, welche auf die Variablen ausgeübt werden. Das erste Kapitel stellt in Anlehnung an Minkowski die grundlegenden Begriffe und Bezeichnungen zusammen. Das zweite Kapitel bringt weitere Definitionen über lineare Transformationen. Kernformen, welche nicht unter einer Form mit kleinerer Diskriminante enthalten sind, werden hier einfach genannt. Kernformen in bezug auf die Primzahl p , welche nicht vermöge einer linearen Transformation mit der Determinante p unter einer anderen Form enthalten sind, heißen p -einfach. Eine Form, welche durch eine lineare Transformation mit der Determinante p erhalten wird, heißt p -erzeugbar. Es werden die Eigenschaften von p -erzeugbaren Geschlechtern bestimmt. Im dritten Kapitel werden die Bedingungen für p -Einfachheit und die Einfachheit eines Geschlechts entwickelt. Hier sind die Ausführungen des Ref. (Speiserfestschrift Zürich 1945, S. 87—104) zu vergleichen. Der Verf. hat übersehen, daß alle Kernformen mit 4 oder mehr Variablen halb genommene uneigentlich

primitive Formen sind. Die Minkowskische Art der Behandlung ist also unzureichend, sie erfaßt die wichtigsten Formen überhaupt nicht. Das vierte Kapitel befaßt sich mit dem Maß eines Geschlechts von positiven Formen und vergleicht es mit dem Maß eines p -erzeugbaren Geschlechts. Der Quotient beider Maßzahlen ist elementar bestimmbar. Daher kann die Maßformel für ein beliebiges Geschlecht auf die eines Geschlechts von Kernformen zurückgeführt werden.

H. Brandt.

Oppenheim, A.: One-sided inequalities for quadratic forms. II. Quaternary forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 417—429 (1953).

Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine indefinite quadratische Form mit der Determinante $-1 \neq 0$. Ferner sei $P_1(f)$ die untere Grenze der positiven Werte von f und $P_2(f) = P_1(-f)$. Es sollen $J_1 = P_1^{-1} |1|$ und $J_2 = P_2^{-1} |1|$ nach oben abgeschätzt werden. Für $n = 3$ siehe Davenport (dies. Zbl. 32, 404) und Oppenheim (Teil I dieser Arbeit, dies. Zbl. 50, 273). Verf. behandelt den Fall $n = 4$ und zeigt: I. Hat f die Signatur $s = 0$, so ist $J_1 = 16$ und $f \sim P_1(xy + zt)$ oder $J_1 = 81/16$ und $f \sim P_1(-x^2 + 4y^2 + 4zt)/3$ oder $J_1 = 4$ und $f \sim P_1(xy + 2zt)$ oder $P_1(xy + z^2 - t^2)$ oder $J_1 = 16/5$ und $f \sim P_1(xy + z^2 - zt - t^2)$ oder $J_1 = 256/81$. Gleiches gilt für J_2 . II. Hat f die Signatur $s = 2$, so ist $J_1 = 16/3$ und $f \sim P_1(x^2 + xy + y^2 + zt)$ oder $J_1 = 4$ und $f \sim P_1(x^2 + y^2 + zt)$ oder $J_1 < 2048/729$ und $J_2 = 256/27$ und $f \sim P_2(x^2 + xy + y^2 - 3zt)/2$ oder $J_2 = 7/6$. Für Formen mit $s = 2$ ist J_1 mit J_2 in II zu vertauschen. — Ist $f(x, y, z, t) \sim F(X, Y, Z, T)$, so heißt die binäre Form $F(X, Y, 0, 0)$ ein Abschnitt von f . Es sei M^2 die untere Grenze der Diskriminanten der indefiniten binären Abschnitte von f . Verf. führt den Nachweis von I und II zunächst für strenge Formen, das sind Formen mit $P_1 = P_2 = M$ und dann für Formen mit $P_1 = P_2 = M$. Die Beweismethoden sind nicht auf $n = 4$ beschränkt.

N. Hofreiter.

Mordell, L. J.: Note on Sawyer's paper „The product of two non-homogeneous linear forms“. J. London math. Soc. 28, 510—512 (1953).

Mordell macht auf eine unbewiesene Behauptung in dem geometrischen Beweis von Sawyer über das Produkt von zwei inhomogenen Linearformen (dies. Zbl. 34, 26) aufmerksam und gibt eine ausführliche Ergänzung.

N. Hofreiter.

Sawyer, D. B.: The minima of indefinite binary quadratic forms. J. London math. Soc. 28, 387—394 (1953).

Diese Arbeit stellt einen Beitrag zur Theorie der unsymmetrischen diophantischen Approximationen dar, worüber seit Segre [Duke math. J. 12, 337—365 (1945)] bereits mehrere Arbeiten erschienen sind. Ist $f(x, y)$ eine indefinite quadratische Form mit der Diskriminante D , so gibt es ganze Zahlen $x, y \neq 0, 0$, so daß $-\lambda \Phi_0(\lambda) = f(x, y)/|D|$ mit $\lambda = \lambda^{-1} \Phi_0(\lambda)$, wo $\lambda = 1$, $\Phi_0(\lambda) = (4 + \lambda^2)^{1/2}$. Dabei gilt stets das $-$ -Zeichen, außer λ^2 ist ganz und f ist äquivalent mit $C \cdot f_0(x, y)$, wo $f_0(x, y) = x^2 + \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2$. Nur für $\lambda = 1$ erhält man eine symmetrische Approximation und dann die bekannte Schranke $1 \leq \lambda \leq 5$. Ist λ^2 ganz und $f(x, y)$ nicht äquivalent mit $C \cdot f_0(x, y)$, so kann $\Phi_0(\lambda)$ durch $\Phi_1(\lambda) = (4 + (\lambda + \lambda^{-3})^2)^{1/2}$ ersetzt werden. Wieder gilt im allgemeinen das $-$ -Zeichen, außer wenn $\lambda = 1$ und f mit $C \cdot (x^2 + 2xy - y^2)$ äquivalent ist. Die Beweise sind zahlentheoretisch.

N. Hofreiter.

Descombes, Roger: Sur un problème d'approximation non homogène. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1401—1403 (1953).

Let s be a positive integer and for irrational ξ and integers a, b with $(a, b, s) = 1$ put (*) $H(\xi, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} |r(r\xi - a)|$ taken over integers r, u with $u = a, v = b(s)$. The upper bound of $H(\xi, a, b)$ over ξ is independent of a, b and is denoted by $H(s)$. If s is even, then $H(2) = 1$, $H(s) = s(s-2)/4$ ($s \geq 2$) and it is non-isolated. If s is odd, then $H(s)$ is isolated; the values for $s = 3, 5, 7, 9, 11$ are given and $H(s) = \frac{1}{4}(s^2 - 2s - 1)(1 - 2s)^{-1/2}$ for $s \geq 13$. The proofs depend on showing that for (*) one need consider only (u, v) related to the successive convergents in a certain way.

J. W. S. Cassels.

Descombes, Roger: Sur un théorème classique d'Hurwitz. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1460—1462 (1953).

For irrational ξ and integer s define $c_s(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} |q(q\xi - p)|^{-1}$ taken over integers p, q with $s \mid q$. Let c_s, γ_s be the upper bound of $c_s(\xi)$ and its greatest point

of accumulation respectively. Then $c_2 = \gamma_2 = 2$ but $c_s = 5^{1/2}$ for $s > 3$. For $s > 2$ the value of γ_s depends on the index j of the first term in the Fibonacci sequence $0, 1, 1, 2, \dots$ divisible by s . If j is even then $\gamma_s = 1 + 3 \cdot 5^{-1/2}$ and $c_s(\xi)$ takes no value between c_s and γ_s . If j is odd then γ_s is given by a complicated expression depending on j and there are infinitely many ξ with $c_s(\xi) > \gamma_s$. Proofs depend on considering best „ s -approximations“ p_n/q_n with $s \nmid q_n$ and such that $|q\xi - p| \geq |q_n\xi - p_n|$ if $|q| \leq |q_n|$ and $s \nmid q$. J. W. S. Cassels.

Szűsz, P.: Verschärfung eines Hardy-Littlewoodschen Satzes. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **4**, 115—118 (1953).

Verf. zeigt: Es sei ω irrational, k natürliche Zahl, ν reell, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ beliebige Zahlen und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Zahl m , welche nur von ε, k, ω abhängt, so daß folgendes gilt: Es gibt ein ganzes n mit $\nu \leq n \leq \nu + m$ und ganze Zahlen y_1, \dots, y_k , so daß $|\omega n^j - \alpha_j - y_j| < \varepsilon$ ($j = 1, \dots, k$) ist. Dieser Satz ist eine Verschärfung eines bekannten Satzes von Hardy-Littlewood (vgl. auch V. Bergström, dies. Zbl. **17**, 104). Der Beweis wird mit vollständiger Induktion nach k geführt. E. Hlawka.

Godwin, H. J.: On a theorem of Khintchine. Proc. London math. Soc., III. Ser. **3**, 211—221 (1953).

Let $k_0 = \inf_{\alpha} \sup_{\beta} \inf_{x > 0, y} x |\alpha x + \beta - y|$ where x, y are integers. Then it is shown that $68\,483 = 0,14078 \dots \leq k_0 < 0,2114$. The lower bound supersedes $k_0 > 3/32 = 0,09375$ due to Prasad (this Zbl. **43**, 276). The proof for the lower bound of k_0 depends on an elaborate prescription for constructing a β with $\inf x |\alpha x + \beta - y| \geq 68/483$, in the first place only for α which are rational and have a continued fraction expansion symmetric from the two ends. The proof of validity of the lower bound for all α requires a limiting process. The upper bound for k_0 follows from considering $\alpha = 653\,467/2107810$, a value found by trial and error. J. W. S. Cassels.

LeVeque, W. J.: On uniform distribution modulo a subdivision. Pacific J. Math. **3**, 757—771 (1953).

Es sei A eine Zerlegung des Intervalls $[0, \infty)$, gegeben durch eine Folge $0 = z_0 < z_1 < \dots$ mit $z_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Ist für ein x $z_{n-1} \leq x < z_n$, so werde gesetzt $\langle x \rangle_A = (x - z_{n-1})/(z_n - z_{n-1})$. Es sei nun $\{x_k\}$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen, $N(x)$ die Anzahl der $x_k \leq x$, $N(\alpha, x)$ die Anzahl der x_k mit $x_k \leq x$ und $\langle x_k \rangle_A < \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$). Strebt dann $N(x)/N(x) \rightarrow \alpha$ für jedes α , so nennt der Verf. die Folge $\{x_k\}$ gleichverteilt modulo A . Für $z_n = n$ erhält man die Gleichverteilung modulo 1. Es ist klar, daß man diese Verallgemeinerung auf den klassischen Begriff zurückführen kann. Ihre Bedeutung liegt auf technischem Gebiet. Verf. leitet zunächst Sätze über die Gleichverteilung mod. 1 her, welche Analoga zu dem bekannten Satz von Fejér sind. Der Hauptsatz der Arbeit ist ein metrischer Satz, welcher lautet: Es sei $f(x)$ eine monoton wachsende Funktion $\rightarrow \infty$ und $f'(x)$ monoton. Ist $\varphi(x)$ die inverse Funktion, so sei 1. $\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})$ nicht zunehmend und gehe $\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ 2. $\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1}) = O(\varphi^{-1}(z_n))$ 3. $f'(\varphi(z_n)) \sim f'(\varphi(z_{n-1}))$. Dann ist die Folge $\{f(k\theta)\}$ für fast alle $\theta > 0$ gleichverteilt modulo 1. Eine interessante Folgerung (vgl. den bekannten Satz von Koksma!): Die Folge $\{\alpha^k\}$ ist gleichverteilt mod. 1 für fast alle $\alpha > 1$, wenn $z_n = g(n)$, wo $g(x)$ monoton wachsend und eine monotone logarithmische Ableitung besitzt, so daß $g'(x)/g(x) = O(x^{-1/2})$. Verf. verwendet beim Beweis dieses Satzes seine Methode (vgl. dies. Zbl. **48**, 279). E. Hlawka.

LeVeque, W. J.: The distribution modulo 1 of trigonometric sequences. Duke math. J. **20**, 367—374 (1953).

Verf. leitet mit Hilfe seiner Methode (vgl. dies. Zbl. **48**, 279) weitere mengentheoretische Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung her. Es sei $\varphi(x)$ eine periodische Funktion mit einer Periode ω und besitze folgende Eigenschaften: 1. φ' besitze nur endlich viele Nullstellen in $(0, \omega)$, 2. φ', φ'' verschwinden nie zugleich, 3. φ', φ'' sind stetig, 4. $\psi = \varphi'$ erfülle ebenfalls die Eigenschaften 1, 2, 3. Es seien weiter zwei Folgen $\{u_n\}, \{v_n\}$ positiver Zahlen gegeben, wo $\{u_n\}$ lakunär (d. h. es gibt ein $\delta > 0$, so daß für alle n : $u_{n+1} > (1 + \delta) u_n$ ist) und $\{v_n\}$ nicht abnehmend ist. Dann ist für fast alle x aus $(0, \omega)$ die Folge $u_n \varphi(v_n x - \alpha) = v_n(x)$ (α Konstante) gleichverteilt mod 1 und

$$\sum_{n=1}^N \exp(2\pi i m v_n(x)) = O(N^{1/2} \log^{\frac{3}{2} + \varepsilon} N) \quad (\varepsilon > 0, \quad m \text{ ganz} \neq 0).$$

Wenn von der Folge $\{u_n\}$ nicht vorausgesetzt wird, daß sie lakunär ist, so kann der Verf. nicht soviel zeigen. Er beschränkt sich hier auf den Fall $q(x) = \cos x$ und auf Folgen der Gestalt $u_n = a n^j$, $v_n = b n^k$ (b, k natürliche Zahlen, a, j positive Zahlen mit $j \geq k$) bzw. $\{v_n\} = \{u_n\} =$ wachsende Folge natürlicher Zahlen. In diesen Fällen kann auch die Gleichverteilung der Folge $\{w_n\}$ mod 1 für fast alle x in $(0, 2\pi)$ gezeigt werden und eine Abschätzung für die dazugehörigen Weylschen Summen gegeben werden.

E. Hlawka.

Kuipers, L.: Continuous and discrete distribution modulo 1. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, **56**, 340—348 (1953).

Verf. beweist einige Sätze vom folgenden Typus: 1. Falls $f(t)$ eine für $t \geq 0$ differenzierbare Funktion und $t f'(t)$ beschränkt ist, so ist die Zahlenfolge $f(1), f(2), f(3), \dots$ nicht gleichverteilt mod 1. — 2. Falls $f(t)$ eine für $t \geq 1$ zweimal differenzierbare Funktion ist mit beschränkten Ableitungen $f'(t)$ und $f''(t)$ und für die $f'(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einen irrationalen Limes hat, so ist die Zahlenfolge $f(1), f(2), f(3), \dots$ gleichverteilt mod 1. — Er beweist auch, daß die Zahlenfolge $\{n \cdot \sin n$ ($n = 1, 2, \dots$) gleichverteilt mod 1, die Zahlenfolge $\cos(n + \log n)$ ($n = 1, 2, \dots$) dagegen nicht gleichverteilt mod 1 ist.

H. D. Kloosterman.

Kuipers, L.: Distribution modulo 1 (functions $f(t)$ with bounded $t f'(t)$). Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, **56**, 478—483 (1953).

Verf. beweist: Es sei $Q_\sigma: 0 < S_\sigma \leq t \leq T_\sigma$ eine Menge von Intervallen, wo $\sigma_0 \leq \sigma < \infty$ und S_σ und T_σ stetig von σ abhängen. Falls $\sigma \rightarrow \infty$ sei weiter $S_\sigma \rightarrow \infty$, $T_\sigma - S_\sigma \rightarrow \infty$, $T_\sigma/S_\sigma \rightarrow \lambda > 1$. Falls dann $f(t)$ eine für $t \geq 0$ differenzierbare Funktion mit beschränktem $t f'(t)$ ist, so ist die Zahlenfolge $f(1), f(2), \dots$ in den Intervallen Q_σ nicht gleichverteilt mod 1. — Er beweist überdies einen ähnlichen Satz für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

H. D. Kloosterman.

Korobov, N. M.: Mehrdimensionale Aufgaben der Verteilung von Bruchteilen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **17**, 389—400 (1953) [Russisch].

Let the equation $t^n = a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ with integral coefficients and $a_n \neq 0$ have roots $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfying $\lambda = \lambda_1 > 1$, $\theta = \max(|\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) < 1$. Let $f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \neq 0$ have integral coefficients. The difference equation $\varphi(x) = a_1 \varphi(x-1) + \dots + a_n \varphi(x-n)$, together with given integral values $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$, defines a recursive sequence of integers $\varphi(x)$, $x = 1, 2, 3, \dots$. Let p be a sufficiently large prime; denote by $\tau > 0$ an integer such that $p \tau, \varphi(x + \tau) \equiv \varphi(x) \pmod{p}$ for $x = 1, 2, 3, \dots$ and by N the number of integers x for which $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{p}$, $x = 1, 2, \dots, \tau$; and let $a, 0, r \geq 1$, be arbitrary integers. Then a constant $C = 0$ depending only on a, m , and the a 's and the b 's, exists such that

$$\left| \sum_{x=1}^{\tau p} \exp \left(2\pi i \frac{\varphi(x) f(a+x)}{p(\lambda^x - 1)} \right) \right| < C r \{N p + \tau + p \log(a + r \tau)\}.$$

The author uses this estimate to construct sequences of points in s -dimensions, like $(\lambda^x \lambda^x f_1(x), \dots, \lambda^x \lambda^x f_s(x))$ or $(\lambda_1^x \lambda^x f_1(x), \dots, \lambda_s^x \lambda^x f_s(x))$, that are uniformly distributed (mod 1); the λ 's are given explicitly in form of series. This generalizes earlier results of the author [Uspechi mat. Nauk **6**, Nr. 4 (44), 151—152 (1951); Trudy mat. Inst. Steklov. **38**, 87—96 (1951); this Zbl. **46**, 47].

K. Mahler.

Cassels, J. W. S.: A new inequality with application to the theory of Diophantine approximation. Math. Ann. **126**, 108—118 (1953).

Es handelt sich hier um die quantitative Seite der Gleichverteilungstheorie. Ist q eine Folge von reellen Zahlen c_1, c_2, \dots, c_r , so sei $F(\alpha, \beta, q) = F(\alpha, \beta)$ für $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ die Anzahl der Lösungen von $\alpha < \{c_1 x\} < \beta$ ($\{x\} = \beta$), $x = 1, 2, \dots, L$; $\{x\}$ = Bruchteil von x . Weiter sei $R(\alpha, q) = R(\alpha)$ für $0 \leq \alpha < 1$ gleich α ($F(0, \alpha)$ L und werde über das Intervall $(0, 1)$ mit der Periode 1 periodisch fortgesetzt. Dann ist die Diskrepanz $D(q)$ definiert durch

$$\max_{\alpha, \beta} |(\beta - \alpha) - F(\alpha, \beta)/L| = \max_{\alpha, \beta} |R(\beta) - R(\alpha)|.$$

Nun sei φ eine Folge a_1, \dots, a_N und φ^* die Folge b_1, b_2, \dots, b_{N^*} der Differenzen der a_j . Dann wurde von van der Corput und Pisot (vgl. dies. Zbl. **21**, 297), in Verschärfung einer Abschätzung von Vinogradov, gezeigt: $D_1 = 1, D_2^{1/2} \exp(A_2 \log D_2^{1/2})$, wo $D_1 = D(q)$, $D_2 = D(\varphi^*)$ und A_1, A_2 Konstante sind. Verl. gelingt es nun zu zeigen: Es gibt eine Funktion $\gamma(D_2)$, so daß (1)

$$D_1 < \gamma(D_2) D_2^{1/2} (1 + |\log D_2|),$$

wo $\gamma(D_2) = A$ (A absolute Konstante) und $\lim_{D_2 \rightarrow +\infty} \gamma(D_2) = 0$. Es wird weiter gezeigt, daß die Abschätzung (1) scharf ist. Genauer: Ist q (D_2) eine beliebige Funktion von D_2 , welche beliebig

langsam gegen 0 mit D_2 geht, dann gibt es stets Folgen q , so daß $D_1 \leq \varphi(D_2) D_2^{1/2} (1 + |\log D_2|)$ nicht gilt. Durch diesen Satz ist in diesem Fragenkreis ein gewisser Abschluß erreicht. Um die Schärfe dieses Satzes darzutun, zeigt der Verf., wie es aus (1) sofort gelingt herzuleiten, ohne tieferliegende zahlentheoretische Hilfsmittel zu benützen, daß für genügend große Primzahlen p die Anzahl ihrer quadratischen Reste $< x$ (wo $x < p$) $x/2 + O(p^{1/2} \log p)$ ist. Wegen der Wichtigkeit von (1), soll auf den Gedankengang kurz eingegangen werden. Ausgegangen wird von der Identität

$$(2) \quad \int_0^1 (R(x + \delta; \varphi) - R(x, \varphi))^2 dx = \int_0^{|\delta|} (R(-x, \varphi^*) - R(x, \varphi^*)) dx$$

($|\delta| = \min_n |n - \delta|$; n durchläuft alle ganzen Zahlen) gültig für alle δ . Aus (2) folgt, daß die linke Seite in (2) $\leq |\delta| D(\varphi^*)$ ist. Nach Definition von D_1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen α, β mit $\alpha < \beta < \alpha + 1$, so daß $\Delta = R(\beta, \varphi) - R(\alpha, \varphi) > D - \varepsilon$ ist. Es wird nun gesetzt $f_1(x) = R(x + \alpha, \varphi) - R(x, \varphi)$ für $0 \leq x \leq k$, $k = \beta - \alpha$. Nun wird folgender Satz angewendet, der auch für sich von Interesse ist: Sind λ, k reelle Zahlen mit $k \geq \lambda > 0$, $f(x)$ eine reelle integrable Funktion in $0 \leq x \leq k$, so daß $f(0) = 0$, $f(k) = \Delta$, $f(y) - f(x) \leq y - x$, wenn $0 \leq x \leq y \leq k$ ist. Es sei

$$\Phi(z) = \iint_{\substack{0 \leq x, y \leq k \\ |x - y| \leq z}} (f(y) - f(x))^2 dx dy, \quad M(f) = \max_{0 < z \leq k} (\Delta z)^{-2} \Phi(z).$$

Es sei weiter $M(k, \lambda) = \inf M(f)$ erstreckt über alle f , welche die obigen Beziehungen erfüllen. Dann ist $M(k, \lambda) = \lambda(k - \lambda)^{-2} (1 - \log k/\lambda)^{-2}$ mit einer Funktion $\lambda(k)$ mit $\lambda(k) \geq \lambda > 0$ (λ absolute Konstante) und $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) \geq 1,4e^2$. Es gibt weiter eine absolute Konstante B und eine Funktion f aus der obigen Funktionenklasse, so daß $M(f) \leq B(1 + \log k/\lambda)^{-2}$. Aus (2) folgt, daß $f_1(x)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und $\Phi(z) \leq z^2 D_2$ ist. Daraus folgt dann (1).

E. Hlawka.

Analysis.

• Abdelhay, J.: Vorlesungen über mathematische Analysis. Bd. I. 2. Aufl. Rio de Janeiro: Universidade do Brasil 1953. XVI, 232 S. [Portugiesisch].

• Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. — Teil III. (Teubners Mathematische Leitfäden. Band 23.) 6. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 242 S. 166 Abb. DM 8,20.

Table des matières: I. Surfaces gauches et coordonnées curvilignes dans l'espace. II. Intégrales curvilignes dans l'espace. Intégrales doubles et multiples. III. Equations différentielles avec variables réelles. — Cette nouvelle édition a été remaniée par les soins de I. Szabó, auteur du vol. VI paru récemment. L'exposé est classique, ce qui est naturel étant donnés les besoins des lecteurs auxquels il s'adresse: il est assez condensé, mais toujours clair et complet. A côté de nombreuses applications intéressantes, du domaine du physicien et de l'ingénieur, qui constituent sa plus grande originalité, l'ouvrage propose un choix excellent de 79 problèmes.

Ch. Blanc.

• Sjöstrand, Olof: Differential- und Integralrechnung für das technische Studium. Göteborg: Gumperts Verlag 1953. 211 S. kr. 16,— [Schwedisch].

• Thomas jr., George B.: Calculus. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1953. 614 p. \$ 6.50.

Conçu comme une initiation aux techniques élémentaires du calcul différentiel et intégral, cet ouvrage semble particulièrement adapté à un lecteur travaillant seul, et partant des connaissances de l'enseignement secondaire. On y rencontre des qualités rarement réunies: 1° la précision est nettement plus grande que dans les cours analogues; 2° chaque notion ou définition nouvelle est largement commentée avec de nombreux exemples d'un caractère pratique ou technique; les principales difficultés auxquelles elle peut donner lieu sont signalées sans escamotage; les points de vue physique et mathématique sont nettement séparés; 3° les figures sont nombreuses, soignées et suggestives; 4° de nombreux exercices, souvent concrets, sont traités avec beaucoup de détails; d'autres, au nombre d'environ 1700, sont proposés, et leurs résultats indiqués pour la moitié d'entre eux. — Les matières traitées sont nécessairement assez restreintes, mais leur choix est judicieux. En résumé, un livre excellent, et susceptible de fournir une base des plus solides. Voici quelques détails sur le contenu: la notion de fonction est tout d'abord introduite avec de nombreux exemples; puis la différentielle pour une variable est l'objet d'un soin parti-

culier. La continuité uniforme est définie. — On montre que l'aire d'une courbe, d'une part est liée à la notion de primitive, et d'autre part est une limite de sommes. L'intégrale de Riemann est alors définie, et son existence est démontrée pour une fonction continue. Les applications de l'intégrale sont très détaillées: en ce qui concerne les volumes, il est prouvé rigoureusement que l'erreur tend vers zéro. Un chapitre spécial traite des applications à la mécanique, y compris le calcul des pressions hydrostatiques. Le logarithme est défini par une intégrale, l'exponentielle comme fonction inverse, et l'équation différentielle $dx/dt = kx$ est étudiée à ce propos. Les fonctions hyperboliques sont plus développées qu'à l'ordinaire. Les techniques d'intégration insistent beaucoup plus sur les fonctions trigonométriques et hyperboliques que sur les fractions rationnelles. Le terme d'intégrale impropre est utilisé dans un sens plus général que d'habitude. Au cours des chapitres suivants, signalons la différentiation des vecteurs, appliquée à la courbure et à l'accélération. Après la définition des produits scalaire et vectoriel, le produit „dyadique“ est nommé sans être défini. Les équations des droites et plans sont fort bien traitées en une page seulement. — A propos des fonctions de plusieurs variables, une importance particulière est accordée à la dérivée directionnelle: celle-ci est utilisée pour introduire le plan tangent et le gradient. La différentielle totale et l'intégrale curviligne sont étudiées sommairement, mais d'une manière précise. Pour l'intégrale double, les résultats relatifs à l'itération des intégrations et au changement de variables sont indiqués sans démonstration. — L'ordre adopté pour les séries est original: exemples, origines, utilisation pour les équations différentielles, séries de puissances (sans démonstrations), série et formule de Taylor, formes indéterminées, séries numériques et étude simplifiée de leur convergence. — L'ouvrage se termine par un examen assez rapide des équations différentielles du premier ordre et des équations linéaires à coefficients constants.

R. de Possel.

● Batuner, L. M. und M. E. Pozin: *Mathematische Methoden in der chemischen Technik*. Moskau-Leningrad: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für chemische Literatur 1953. 448 S. R. 13,— [Russisch].

Das Buch ist für Ingenieurchemiker und einschlägige höhere Lehranstalten bestimmt und setzt sich zum Ziel, die Methoden für die Lösung chemischer und chemisch-technischer Aufgaben mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik zu lehren. Die Verf. sind nicht Mathematiker, sondern Chemiker, und sie wollen kein Lehrbuch der Mathematik bieten. Es soll vielmehr den Chemikern die Leistungsfähigkeit des mathematischen Apparates für die Lösung der in der Praxis auftretenden Aufgaben aus der Chemie, der physikalischen Chemie und der chemischen Thermodynamik und Kinetik aufzeigen. Dazu werden mehr als 150 typische Aufgaben aus diesen Gebieten, wie sie im Labor oder im Betrieb vorkommen, gelöst und erläutert. An passenden Stellen werden auch die wichtigsten Grundlagen der höheren Mathematik in dem Umfang, wie sie der Chemiker anwenden kann und kennen soll, ohne weitgehende Ansprüche auf mathematische Strenge kurz dargelegt. Die Gliederung des Buches sei durch die folgenden Stichworte angedeutet; es stehen jedoch stets die Anwendungen im Vordergrund: Differential- und Integralrechnung, Aufstellung und Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, Elemente der Vektoranalysis, partielle Ableitungen, unendliche Reihen, die einfachsten partiellen Differentialgleichungen, Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse, statistische Methoden, empirische Formeln, mathematische Näherungsmethoden. Ein Anhang bringt Tabellen der Γ -Funktion, der Besselschen Funktionen und des Fehlerintegrals. Die Verff. bleiben durchwegs im Bereiche der leichter verständlichen mathematischen Theorien und vermeiden schwierige und umständliche Methoden, deren Anwendung tiefergehende mathematische Kenntnisse erfordert. Das Buch kann durch die gelungene Auswahl des Stoffes und seiner klaren und leichtverständlichen Darstellung weiten Kreisen von Chemikern Nutzen bringen.

W. Schmid.

● Courant, R. and D. Hilbert: *Methods of mathematical physics. Vol. I. Translated and revised from the German original. First english ed.* New York: Interscience Publishers 1953. XV, 561 p. \$ 9,50.

Monna, A. F.: *Betrachtungen über die reellen Zahlen*. Euclides, Groningen 28, 142—155 (1953) [Holländisch].

Erläuterungen zu der Bourbakischen Definition des Logarithmus (N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. I: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III, Chap. V, § 4*, dies. Zbl. 30, 241.

H. D. Kloosterman.

Mengenlehre:

Osborn, Roger: *A consideration of the null class*. *Math. Mag.* 26, 175—182 (1953).

A brief survey of the history of the null class and of various comments relating to it.

J. C. Shepherdson.

Suetuna, Zyoiti: Über die Grundlagen der Mathematik. III. Proc. Japan Acad. 29, 91—95 (1953).

[Teil II, Proc. Japan Acad. 27, 389—392 (1951)]. Umriss einer Mengenlehre, die an eine Menge die in einem schwer verständlichen Deutsch formulierten Anforderungen stellt, aus denen sich ergibt, daß von den Zermelo-Fraenkel-Axiomen zwar das Bestimmtheits-, das Paarungs-, das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom gelten, aber im allgemeinen Falle weder das Aussonderungs- noch das Potenzmengen- noch das Ersetzungsaxiom. Es fallen also im allgemeinen Falle die Axiome heraus, mit deren Hilfe sich aus gegebenen Mengen wesentlich neue Mengen erzeugen lassen.

Heinrich Scholz.

Cuesta, N.: Deduktive Ordnungsmodelle. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 13, 211—223 (1953) [Spanisch].

L'A. considère un ensemble partiellement ordonné quelconque E . Etant donnés des éléments a, b de E , le symbole $a < b$ est appelé „proposition“, vraie si l'on a $a < b$ dans E , „fausset“ dans le cas contraire. La transitivité — $a < b$ et $b < c$ entraînent $a < c$ — est appelée la „démonstration“ de $a < c$ à partir des „prémisses“ $a < b$ et $b < c$. La proposition $a < b$ est dite „axiome“ quand il n'existe aucun élément x de E tel que $a < x < b$. D'autres définitions sont encore données. L'A. semble considérer implicitement que toute théorie mathématique peut être ramenée à un tel modèle, puisqu'il cite le théorème de Fermat et le problème du continu. Cependant aucune indication ne figure sur la façon de faire rentrer dans ce cadre une théorie quelconque. Aucun théorème n'est démontré. Il n'y a aucune référence.

R. de Possel.

• Gödel, K.: The consistency of the continuum hypothesis. (Ann. of Math. Studies. No. 3.) 3rd ed. Princeton: Princeton University Press 1953. 77 p.

Fodor, G.: An assertion which is equivalent to the generalized continuum hypothesis. Acta Sci. math. 15, 77—78 (1953).

Verf. beweist folgenden Satz: Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese ist mit der nachstehenden Hypothese äquivalent: Sei E eine Menge der Mächtigkeit 2^{\aleph_x} und B bedeute die Menge aller aus zwei Elementen bestehenden Teilmengen von E . Dann gibt es eine eindeutige Abbildung T von B in E , so daß 1. $T\{x, y\}$ entweder $= x$ oder $= y$ ist für jedes $\{x, y\} \in B$ und 2. für jede Teilmenge E_1 von E , deren Mächtigkeit $> \aleph_x$ ist, die Vereinigungsmenge der Urbildmengen $T^{-1}x$, $x \in E_1$, gleich E ist.

W. Neumer.

Ginsburg, S.: On the distinct sums of λ -type transfinite series obtained by permuting the elements of a fixed λ -type series. Fundamenta Math. 39, 131—132 (1953).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Sierpinski (dies. Zbl. 39, 279) beweist Verf.: Sei ω_ρ , $\rho > 0$, eine reguläre Anfangszahl und $\sum_{\xi < \omega_\rho} a_\xi$ eine ω_ρ -Summe von

Ordnungszahlen. N sei die Anzahl der verschiedenen Werte $\sum_{\xi < \omega_\rho} b_\xi$, wenn die Folge (b_ξ) eine beliebige Permutation der Folge (a_ξ) ist. Dann gilt $N \leq \sum_{\xi < \omega_\rho} \aleph_\rho^{\aleph_\xi}$.

Im Fall $\rho = x + 1$ gibt es eine ω_{x+1} -Reihe, so daß die zugehörige Kardinalzahl $N = \aleph_{x+1}$ wird. — Wenn die Folge (a_ξ) , $\xi < \omega_\rho$, ω_ρ regulär, nicht abnimmt, so ist das zu $\sum_{\xi < \omega_\rho} a_\xi$ gehörige $N = 1$.

W. Neumer.

Ginsburg, Seymour: A class of everywhere branching sets. Duke math. J. 20, 521—526 (1953).

An ordered set S has sufficiently many non-cofinal subsets [we say: S is antidirected — in connection with directed sets] if for no two-point subset $\{a, b\}$ of S the sets $\{x | x \geq a, x \in S\}$, $\{y | y \geq b, y \in S\}$ are cofinal. Any nonvoid $X \subseteq S$ is a maximal residual of S if it is a terminal portion of S and is contained in no greater terminal portion cofinal with X ; $F(S)$ denotes the

system of all such X 's ordered by the dual of the inclusion relation. If S is antidirected, it is totally branching [in the sense that each non-terminal point of S has 2 successors having no common successor; cf. M. M. Day, *Duke math. J.* **11**, 201—229 (1944); Kurepa, Thèse, Paris 1935 (this Zbl. **14**, 394), in particular p. 77; the adjective „non-terminal“ is unavoidable]; the converse does not hold. If S is ramified and everywhere [totally] branching, S contains a cofinal antidirected subset (Th. 1). If S is everywhere [totally] branching, $F(S)$ is antidirected (Th. 4). Each antidirected S is cofinally similar to $F(S)$ (Th. 5). If A, B are 2 cofinally similar, everywhere branching sets, $F(A), F(B)$ are isomorphic (Th. 2) [here „everywhere branching“ can be erased]. The paper terminates with two problems. G. Kurepa.

Jones, F. Burton: On certain well-ordered monotone collections of sets. *J. Elisha Mitchell sci. Soc.* **69**, 30—34 (1953).

The paper deals with an infinity lemma and reproves a proposition contained already in the reviewers Thèse (this Zbl. **14**, 314, especially p. 76 T. 2, p. 78 T. 4, p. 80 T. 5, § 9, 89—98 of the Thèse). The author gives a proof of the existence of what the reviewer calls the Aronszajn ramified table [— ordered set S so that for each $x \in S$ the set $(-, x)_S$ of all predecessors of x is a well ordered chain and that moreover S be non denumerable and that each chain as well as each row of S be $\leq \aleph_0$; the α -row of S is the set of all the $x \in S$ such that the order type of $(-, x)_S$ equals α . The existence of such an S is due to Aronszajn and Aronszajn's set was published in the reviewers Thèse, p. 96.; cf. also this Zbl. **20**, 108]. The author points out that he possessed the same proof already in 1933, when he tried to settle the still open problem: to know whether each normal space satisfying the Moore axioms 0 and 1 (cf. R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, New York 1932, this Zbl. **5**, 54) is metric. G. Kurepa.

Kurepa, Georges: Sur un principe de la théorie des espaces abstraits. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 655—657 (1953).

Es bedeute kM die Mächtigkeit einer Menge M , $s\aleph$ das Supremum aller $k\aleph$, wo \aleph ein disjunktes Teilsystem des Mengensystems \aleph ist. — Sei E ein abstrakter Raum, $G(E)$ das System seiner offenen Teilmengen und $sE = sG(E)$. — Verf. stellt folgende Hypothese $H(G)$ (von ihm Projektionsprinzip genannt) zur Diskussion: Für unendliche abstrakte Räume E gilt $sE^2 = sE(E^2 - E \times E)$. Für metrische Räume und total wohlgeordnete Mengen ist $H(G)$ beweisbar. Für die total geordneten Mengen fällt $H(G)$ zusammen mit der Hypothese $n(x) = \alpha$, wobei $n(x)$ für eine beliebige Ordnungszahl $\alpha \geq 0$ wie folgt definiert ist. Sei $C(x) = \{x, y, \dots\}$ die Menge aller Folgen $(\gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots)$ mit $\gamma_n = \omega_{\alpha + n}$, $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$, und es gelte $x \leq y$ genau dann, wenn x ein Abschnitt von y ist. Man setze $s_{n(x)} = \sup kX$, unter X eine Teilmenge von $C(x)$ verstanden, welche nur Ketten oder Gegenketten der Mächtigkeit \aleph_α umfaßt (Kette = total geordnete Teilmenge, Gegenkette = Teilmenge aus paarweise unvergleichbaren Elementen). Es besteht nur die Möglichkeit $n(x) = \alpha$ oder $n(x) = \alpha + 1$. — Folgende Sätze werden ausgesprochen: Aus $s(E^n) = sE$ folgt $s(E^n) = sE$ für $1 \leq n < \omega$. — Zu jedem $\alpha \geq 0$ gibt es Mengensysteme $\aleph'_\alpha, \aleph''_\alpha$, so daß $s\aleph'_\alpha = \aleph_\alpha = s\aleph''_\alpha$ und $s(\aleph'_\alpha \times \aleph''_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$ ist. W. Neumer.

Denjoy, Arnaud: L'ordination des ensembles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1393—1396 (1953).

1. Sei im Intervall der reellen Zahlen $0 < x < 1$ eine höchstens abzählbare Folge von abzählbaren Mengen E_k ($1 \leq k \leq s < \omega$) gegeben; $\bigcup E_k$ soll überall dicht in $(0, 1)$ sein und zwischen je zwei Punkten von $E = \bigcup E_k$ soll von jedem E_k ein Punkt liegen. Dann besitzt die Menge der auf $(0, 1)$ definierten stetigen und wachsenden Funktionen $f(x)$, welche die Eigenschaft $f(x) \in E_k$ für $x \in E_k$ und alle k haben, die Mächtigkeit des Kontinuums. — 2. In der Menge der Ordnungszahlen $X < \Omega$ sei eine Funktion $x = f(X) \in X$ definiert. Dann gibt es ein x_0 , so daß $f(X) = x_0$ für un abzählbar viele X gilt. [Anmerkg. des Ref.: Dieser Satz ist, zum Teil wesentlich verallgemeinert, auch von anderen bewiesen worden; vgl. z. B. den ähnlichen Beweis von J. Novák, dies. Zbl. **39**, 245. Der Satz findet sich wohl zuerst bei Alexandroff und Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhdt. Nederl. Akad. Wet., Afd. Naturk., Sect. I **14**, Nr. 1 (1929)]. — Sei $e(a)$ die Menge aller X mit $f(X) = a$ und e die Menge aller a mit un abzählbarem $e(a)$. Dann enthält $\Gamma = \bigcup e(a), a \in e$, eine nicht abzählbare abgeschlossene Teilmenge. —

Wird für jede Limeszahl $X < \Omega$ eine wachsende Zahlenfolge $f_n(X) < X$, $n = 1, 2, \dots$, definiert und ist wie vorhin $V_n = \bigcup e_n(a)$, $a \in v_n$, so ist der Durchschnitt $V_\omega = \bigcap_n V_n$ un abzählbar.

W. Neumer.

● Luzin, N. N.: Vorlesungen über analytische Mengen und ihre Anwendungen. Unter Redaktion und mit einem Vorwort und Anmerkungen von L. V. Keldyš und P. S. Novikov. (Bibliothek der russischen Wissenschaft.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 359 S. R. 11,45 [Russisch].

L'Ouvrage constitue une adaptation du livre bien connu de Luzin: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (Paris 1930). Voici les différences principales entre les deux éditions: 1. L'ancienne Préface de Lebesgue est remplacée par celle des Rédacteurs (17 pp); 2. Les passages omis concernent surtout des considérations philosophiques d'une part et des renvois, citations — de Borel, Lebesgue — de l'autre; sont supprimés par exemple les pages 17—39, 300—302 de l'original; 3. Les deux premiers passages p. 214 sont remplacés par une étude d'un ensemble spatial universel de similitude, afin de combler une petite lacune dans la démonstration primitive du principe de la comparaison de cribles; 4. Au lieu de l'ancienne Note terminale de Sierpiński on a maintenant: la Note de l'A. [v. C. r. Acad. Sci., Paris 182, 1521—1522 (1926)] concernant une fonction arithmétique nonbaire, et un article de l'A. (v. ce Zbl. 9, 329); 5. Le livre se termine par 36 remarques faisant voir, partiellement, dans quelle mesure le sujet a augmenté et s'était développé depuis 1929. — Il est bien regrettable que le livre actuel, pas plus que l'original, ne contient un index alphabétique.

G. Kurepa.

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles analytiques linéaires. (Solution d'un problème de E. Marczewski.) Fundamenta Math. 40, 171 (1953).

Jede beschränkte, lineare, analytische Menge ist darstellbar als Orthogonalprojektion einer ebenen Menge $F = \bigcap H_n$ ($n = 1, 2, \dots$), wobei H_n die Vereinigung endlich vieler (i. a. nicht abgeschlossener) Rechtecke mit achsenparallelen Seiten ist.

G. Nöbeling.

Ljapunov, A. A.: Über die Trennbarkeit und Nicht-Trennbarkeit der R -Mengen. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 515—532 (1953) [Russisch].

As sequel to some of his previous papers (v. also this Zbl. 50, 55) and connected with researches of Luzin, Novikov etc. the author studies the questions of separation of various kinds of sets by means of sets of another kind and proves the corresponding theorems I, I', II, II', III—VII. As in very particular case of A -sets, one has 2 types of separation: the simple one (Luzin) and the multiple one (Novikov); in each of these cases one has to distinguish 2 types of separation, according as the intersection of the given sets to be separated is void or nonvoid [The terminology and notations are referred especially to the authors paper in Trudy mat. Inst. Steklov 40, 1—68 (1953)]. So e.g. for the simple separation one has the Luzin principles: 1. disjoint A -sets are B -separable (Type 1); 2. if X, Y are A -sets, then $X \cap Y, Y - X, X \cup Y$ are separable by B -sets (Type 2). — The corresponding propositions hold true for what the author calls the ordinary R_δ -operations (Th. I, II). So as a corollary to Th. II one has the fact that if $Z \in \{A, R_\delta, R_{\delta\delta}\}$, then any pair of disjoint Z -sets can be separated by means of BZ -sets (cf. Luzin, Ensembles analytiques, Paris 1930, p. 210 for $Z = A$). Let λ be a regular class of transfinite functions and Φ_λ a $\delta\lambda$ -function such that $\Xi(\lambda)$ be invariant in respect to all $\delta\lambda$ -functions $\Phi_{\lambda m}$; then for each sequence $\{E_n\}$ of $\Xi(\lambda)$ -sets, there exists a sequence $\{H_n\}$ of $C\Xi(\lambda)$ -sets satisfying $H_n \supseteq E_n - \Phi_{\lambda n}(\{E_m\}), \Phi_{\lambda n}(\{H_m\}) = 0$ (Th. III). The proof is based upon this lemma: Let $\{\beta'_n(x)\}$ be a sequence of transfinite functions and Φ_λ a $\delta\lambda$ -function: if $E_n = [\beta_n(x) = \omega_1]$, $Q_{nm} = [\beta_n(x) \leq \beta'_m(x)]$, $H_n = C\Phi_{\lambda n}(\{Q_{nm}\})$, then $H_n \supseteq E_n - \Phi_{\lambda n}(\{E_m\}), \Phi_{\lambda n}(\{H_m\}) = 0$. The Novikov's results concerning the existence of disjoint non B -separable CA -sets are reasonably extended to R -sets too, for both types of separation (cf. Th. V, VI, VII). Definition. Let $\lambda = \{\beta(x)\}$ be a class of transfinite functions (i. e. mappings of a space into the class of ordinals); then the class of the sets of the form $[\beta(x) = \omega_1]$ with $\beta - \lambda$ is designed by $\Xi(\lambda)$; λ is called regular, if $\beta_1, \beta_2 \in \lambda$ imply $[\beta_1(x) \geq \beta_2(x)] \in \Xi(\lambda)$. For a basis N of a $\delta\lambda$ -operation, N^n means the set of all the $\eta \in N$ such that $n \in \eta$.

G. Kurepa.

Ljapunov, A. A.: Über Kriterien des Ausartens für R -Mengen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 17, 563—578 (1953) [Russisch].

The paper gives proofs of several propositions some of which were announced earlier (this Zbl. 30, 242) and especially is concerned with the question to know in what measure the degeneracy criteria (Suslin, Luzin etc.) concerning A -sets to yield B -sets have analoga for R -sets. Contrarily to what happens with Suslin criterium, the Luzin unicity criterium is transferable (Th. 4). Therefore the „rigid“ bases N of $\delta\lambda$ -operations are studied [according to Ocan, Mat. Sbornik, n. Ser. 10(52), 151—164 (1942), N is rigid provided it contains no two distinct comparable

chains]. In § 2 one proves that (like A) R^s , R_r^s are δs -operations definable by means of rigid bases (not so are \lim , \lim), the consequence of which is a form of unicity statement. Given: rigid basis N , the sequence $\{E_n\}$ of sets; then a point x is called a N -unicity point of $\{E_n\}$ if there is a unique chain η of N so that $x \in \bigcap E_n (n \in \eta)$. Here is the analogous of Luzin's unicity statement: If $[N]$ is a rigid basis of R^s ; let $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \dots n_k}\}$ be a table or matrix of BR_{α} -sets (resp. $BR_{\alpha\beta}$ -sets); if $U = R_{[N]}(\{E_{n_1 \dots n_k}\})$ equals the set of the $[N]$ -unicity points relatively to \mathcal{E} , then U is a BR_{α} -set (resp. $BR_{\alpha\beta}$ -set) (Th. 4). The Gliwko's imbedding theorem [Mat. Sbornik 36, 138—142 (1929)] is extended as follows: Under the same suppositions there exists a set mapping $\mathcal{E}' = \{H_{n_1 \dots n_k}\}$ of BR_{α} -sets (resp. $BR_{\alpha\beta}$ -sets) so that $H_{n_1 \dots n_k} \supset E_{n_1 \dots n_k}$ and that each point of $R_{[N]}(\mathcal{E}')$ is a $[N]$ -unicity point of \mathcal{E}' (Th. 5). G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● Thielman, H. P.: Theory of functions of real variables. New York: Prentice-Hall Inc. 1953. 233 p.

Hewitt, Edwin: A note on measures in Boolean algebras. Duke math. J. 20, 253—256 (1953).

Jeder abstrakte Booleverband A läßt sich stets isomorph durch einen Körper K von Teilmengen einer Grundmenge Ω darstellen. Eine solche Darstellung ist nicht eindeutig bestimmt. Es gibt stets Darstellungen (perfekte Darstellungen), bei welchen Ω als ein kompakter Hausdorffscher Raum von der Dimension Null aufgefaßt werden kann und K aus allen Teilmengen von Ω besteht, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Solche Darstellungen erhält man z. B., wenn man als Grundraum Ω nach Stone die Gesamtheit aller Primideale in A oder nach Yosida-Hewitt (dies. Zbl. 46, 54) die Gesamtheit aller endlich additiven zweiwertigen Maße auf A mit Werten 0 und 1 wählt. Trägt A ein endlich additives Maß q , so wird dies bei perfekten Darstellungen mengentheoretisch abzählbar (σ)-additiv auf dem Darstellungskörper K . Ref. bemerkt, daß dies zuerst von Kakutani (dies. Zbl. 27, 111) bemerkt wurde. Die verbandstheoretische σ -Additivität eines Maßes q auf einem abstrakten Booleverband A (vgl. Kappos, dies. Zbl. 29, 19; 50, 57 und Sikorski, dies. Zbl. 41, 178) ist verschieden von der mengentheoretischen σ -Additivität eines Maßes auf einem Körper. Verf. zeigt nun, daß ein endlich additives Maß q auf A dann und nur dann verbandstheoretisch σ -additiv ist, wenn das induzierte Maß auf dem Darstellungskörper K bei jeder isomorphen Darstellung mengentheoretisch σ -additiv wird.

D. A. Kappos.

Maharam, Dorothy: The representation of abstract integrals. Trans. Amer. math. Soc. 75, 154—184 (1953).

F bedeute den Funktionenraum über einer Booleschen σ -Algebra E , konkret gegeben etwa durch den Raum der Klassen mod \mathfrak{N} gleicher, endlicher oder unendlicher, \mathfrak{B} -meßbarer reeller Funktionen, wenn E isomorph zu \mathfrak{B} \mathfrak{N} und \mathfrak{N} ein σ -Ideal im Booleschen Ring \mathfrak{B} aus Teilmengen des „Darstellungsraums“ S von E ist. Jedes System paarweise fremder, von Null verschiedener Elemente aus E sei höchstens abzählbar. Ein abstraktes F -Integral Φ über F ist eine bei passender Berücksichtigung unendlicher Werte lineare und abzählbar additive Abbildung aus F in einen gleichartigen Funktionenraum F' , die gewissen Endlichkeits- und Definitheitsforderungen genügt; u. a. soll aus $f \geq 0$ und $f \neq 0$ folgen $\Phi(f) \neq 0$ und $\Phi(f) \geq 0$, und es soll $\Phi(f)$ genau dann erklärt sein, wenn $\Phi(f^*) = \Phi(f)$ sinnvoll ist. Vermöge $\lambda(x) = \Phi(\chi(x))$, wobei $\chi(x)$ die charakteristische Funktion von $x \in E$ ist, induziert Φ ein „ F' -Maß“ λ über E , dessen Werte also Klassen reeller Funktionen sind. In dem grundlegenden Einbettungslemma werden eine Boolesche σ -Algebra E^* und ein F' -Maß λ^* über E^* derart konstruiert, daß E eine Unter algebra von E^* und λ^* eine „full-valued“ Erweiterung von λ wird, d. h. daß zu jedem $x \in E^*$ und $f' \in F'$ mit $0 \leq f' \leq \lambda^*(x)$ ein $y \in E^*$ mit $y \leq x$ und $\lambda^*(y) = f'$ existiert. E^* mit der Äquivalenzrelation „ $x \sim y$ genau dann, wenn $\lambda^*(x) = \lambda^*(y)$ “ bildet nun eine abstrakte Maßalgebra im Sinne der Verf. (vgl. dies. Zbl. 36, 314), und die in der zitierten Arbeit gegebene Darstellungstheorie für abstrakte Maßalgebren bildet den Ausgangspunkt einer Darstellungstheorie für F' -Maße und F' -Integrale. Als Hauptergebnis findet sich eine isomorphe Darstellung von E und Φ der folgenden Gestalt: E ist eine Unter algebra eines Hauptideals im direkten Produkt $(J, m) \times E'$, wobei (J, m) eine atomfreie Maßalgebra im gewöhnlichen Sinn mit einem σ -endlichen reellwertigen Maß m bildet; sind R und S' Darstellungsräume von J und E' im obigen Sinne, so gilt $\Phi(f)(s) = \int_R f(t, s) dm(t)$, wenn $s \in S'$. Ist λ „full-valued“, so läßt sich E sogar

als Hauptideal von $(J, m) \times E'$ wählen; es werden weiter Bedingungen über Φ aufgestellt, unter denen man durch „Verfeinerung“ von Φ oder Abspaltung von direkten Summanden von E ebenfalls zu diesem Fall gelangt. Daneben finden sich eine Reihe von Hilfssätzen über F' -Integrale, F' -Maße und abstrakte Maßalgebren, insbesondere über Zusammenhänge zwischen ihnen und über verschiedene Isomorphiebegriffe, sowie einige Beispiele.

K. Krickberg.

● **McShane, Edward J.: Order-preserving maps and integration processes.** (Annals of Mathematics Studies No. 31.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1953. VI, 136 S. \$ 2,75.

Die Daniellsche Konstruktion des Integrals, die in einer Ausdehnung eines elementaren Integrals durch eine geeignete hintereinander ausgeführte Bildung von oberen Grenzen der Integrale von Minoranten und unteren Grenzen der Integrale von Majoranten einer Funktion besteht und auf diese Weise ohne eine Norm in Funktionenräumen nur mit ordnungstheoretischen Begriffen auskommt, wird hier auf einen größeren Kreis ordnungstreuer Abbildungen halbgeordneter Mengen verallgemeinert, so daß sich eine ganze Reihe ähnlicher Prozesse als Spezialfälle erweist. Das 1. Kapitel enthält Grundbegriffe und Rechenregeln über halbgeordnete Mengen, u. a. den Begriff der „Verstärkung“ \succ einer Halbordnung \geq : aus $f \succ g$ folgt $f \geq g$, aus $f \geq g$ und $g \geq k$ (oder $f \geq g$ und $g \succ k$) folgt $f \geq k$, und zu jedem f, h, k mit $f \succ h$ und $f \succ k$ gibt es ein e mit $f \succ e$, $e \geq h$ und $e \geq k$ (und dual). Verschiedene Vollständigkeitsbegriffe für Teilmengen halbgeordneter Mengen werden verglichen; insbesondere heißt eine halbgeordnete Menge G Dedekind-vollständig, wenn jede hinsichtlich \geq gerichtete nicht leere majorisierte Teilmenge von G ein Supremum besitzt (und dual). Es folgen Konvergenzbegriffe für Moore-Smithsche Folgen in halbgeordneten Mengen, die zugehörigen Abgeschlossenheits- und Hüllenbegriffe und Stetigkeitsbegriffe für Abbildungen halbgeordneter Mengen in andere, auch im Zusammenhang mit Monotonieeigenschaften. Besonders behandelt werden halbgeordnete Mengen, in denen zugleich algebraische, mit der Halbordnung „verträgliche“ Operationen vorliegen (Gruppen, Vektorräume, multiplikative Systeme usw.). Das 2. Kapitel bringt den eigentlichen Ausdehnungsprozeß. F sei ein vollständiger und unendlich distributiver Verband und \succ eine Verstärkung von \geq in F , ferner G eine im Dedekindschen Sinne vollständige halbgeordnete Menge, in der mit dem Infimum auch immer das Supremum zweier Elemente existiert (und umgekehrt). I_0 , das ursprüngliche „Integral“, sei eine monoton wachsende Abbildung einer Teilmenge E von F in G , die außerdem eine gewisse Stetigkeitseigenschaft hat; E soll einer gewissen Majoranten- und Minorantenbedingung genügen und mit F durch eine Art Einschleppungsbedingung verbunden sein. Als U -Element u wird jedes Supremum einer hinsichtlich \succ gerichteten Teilmenge S von E bezeichnet. Wird $I_0(S)$ bei einem derartigen S majorisiert, so heißt u summierbar, und $I_1(u)$ wird definiert als das (von S unabhängige) Supremum von $I_0(S)$. Besitzt ein Element $f \in F$ summierbare U -Elemente als Majoranten, so haben deren I_1 -Integrale ein Infimum, das obere Integral $\bar{I}(f)$; analog ist das untere Integral $\underline{I}(f)$ erklärt und damit der Begriff der Summierbarkeit durch $I(f) = I(f) (= \bar{I}(f))$. — Unter der zusätzlichen Annahme, G bilde eine halbgeordnete kommutative Gruppe, sowie einer weiteren Stetigkeitsvoraussetzung über I_0 werden im 3. Kapitel elementare verbandstheoretische Regeln über U -Elemente (und die dualen L -Elemente) und über summierbare Elemente aufgestellt. Gewisse Abgeschlossenheitseigenschaften des Systems der summierbaren Elemente, die den Ausdehnungsprozeß rechtfertigen, kommen in Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze von Beppo Levi (monoton wachsende Folgen summierbarer Elemente), Lebesgue (majorisierte und minorisierte Konvergenz) und Fatou zum Ausdruck, deren Beweise zusätzliche Voraussetzungen erfordern. Es finden sich hinreichende Bedingungen dafür, daß I eine Erweiterung von I_0 darstellt. Die Meßbarkeit von f wird nach dem Vorgange von Stone durch die Summierbarkeit des „Mittels“ von f, f' und f'' für alle summierbaren f', f'' mit $f' \leq f''$ erklärt. — Die Grundlage für verschiedene Sätze über die Vertauschbarkeit von algebraischen Operationen mit der Integration und über das Erhaltenbleiben von Summierbarkeit und Meßbarkeit bei derartigen Operationen bildet im 4. Kapitel ein Theorem, das gewährleistet, daß sich eine solche Vertauschbarkeit unter gewissen Voraussetzungen vom ursprünglichen auf das erweiterte Integral überträgt. Hierin liegen zwei Systeme F, G, I_0 und F', G', I'_0 , eine Abbildung Φ_0 aus F' in F und eine Abbildung Γ aus G' in G mit $\Gamma(I'_0(e')) = I_0(\Phi_0(e'))$ vor, und Φ_0 wird einem entsprechenden Ausdehnungsprozeß unterworfen. Das 5. Kapitel behandelt reelle Funktionen mit Integralen, die in halbgeordneten reellen Vektorräumen liegen. Hierbei führen Sätze über meßbare Mengen, über den Zusammenhang der obigen Integralkonstruktion mit der Lebesgueschen und ein Satz vom Typ des Fubinischen über bloße Anwendungen der vorhergehenden Theorie hinaus. — Parallel zur Theorie der Kapitel 1—5 laufen entsprechende Betrachtungen, in denen gewisse Forderungen und Konstruktionen mit abzählbaren statt mit beliebigen Mengen operieren; insbesondere braucht F nur σ -vollständig zu sein und zur Definition der U - und L -Elemente und Konstruktion von I_1 werden nur abzählbare Teilmengen S von E verwendet. — Das 6. Kapitel bringt Anwendungen, zunächst reellwertige Maße in lokal-kompakten Räumen, die von einem System elementarer Mengen auf allgemeinere ausgedehnt werden; $f \succ g$ bedeutet, daß der offene Kern von f die abgeschlossene Hülle von g enthält, und die U -Elemente werden die offenen, die L -Elemente die kompakten Mengen. Es folgen drei Konstruktionen von Integralen reeller Funktionen in lokal-kompakten Räumen mit verschiedenen Ausgangsmengen E und verschiedenen Definitionen von \succ . Ein nicht mehr absolut konvergentes Integral, das die gewöhnlichen Erweiterungen des Riemannschen Integrals auf unbeschränkte Funktionen als Spezialfälle enthält, tritt im nächsten Beispiel auf: G besteht aus den im Bereich aller Teilintervalle eines Intervalls T additiven Intervall

funktionen, F aus den in T erklärten reellen Funktionen, wobei \geq dasselbe wie \leq bedeute, und E aus den endlichen, außer in einer abzählbaren Menge stetigen Funktionen e aus F , zu denen es eine stetige Intervallfunktion g aus G gibt, deren Ableitung überall außer in abzählbar vielen Punkten existiert und mit e zusammenfällt; g ist dann eindeutig bestimmt: $g = I_0(e)$. Die im Lebesgueschen Sinne summierbaren Funktionen f sind gerade diejenigen, für die $I(f)$ und 0 in G eine gemeinsame Majorante oder Minorante besitzen. I ist nicht allgemeiner als das Perronsche Integral; ob beide übereinstimmen, bleibt dahingestellt. Den Schluß bilden Spektraldarstellungen von beschränkten Hermiteschen Operatoren in Hilbertschen Räumen, von reellen halbgeordneten Vektorräumen mit Multiplikation und Einheit und von entsprechenden komplexen halbgeordneten Vektorräumen mit Multiplikation und Einheit, in denen eine Adjungiertheitsrelation vorliegt. F besteht hierbei aus reellen Funktionen über einem Intervall oder einem Produkt von Intervallen, G ist das System der beschränkten Hermiteschen Operatoren in dem betrachteten Hilbertschen Raum bzw. das betrachtete multiplikative System, und I_0 wird im Bereich gewisser Polynome definiert. Der Beweis der Spektraldarstellung multiplikativer Systeme hängt mit dem Bochner-Bernstein-Widderschen Satz über die Darstellung vollmonotoner Funktionen g in der Gestalt $g(x) = \int_0^\infty e^{-x't} \mu(dt)$ mit geeignetem Maß μ zusammen,

der sich ebenfalls auf die hier entwickelten Konstruktionen zurückführen läßt. *K. Krickeberg.*

Krickeberg, Klaus: Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen. Arch. der Math. 4, 432—436 (1953).

(1) Es sei m/z ein σ -endliches Maß, ferner $D \in z$ und $\bar{U}(f; D)$ bzw. $U(f; D)$ das obere bzw. das m -(Unterteilungs-) Integral (falls es existiert) von f über D . Dann gilt: (a) Existiert $\bar{U}(f; D)$, so existiert ein m -meßbares, über D integrierbares $f^* \geq f$ mit $\bar{U}(f; X) = U(f^*; X)$ für alle $X \in Dz$; dabei sind je zwei derartige f^* m -fast überall gleich; (b) jedes f^* (gemäß (a)) ist eine m -fast überall kleinste Funktion unter denjenigen m -meßbaren g , für die $f \leq g$ m -fast überall. Entsprechendes gilt für das untere m -Integral $U(f; D)$. — (2) Ohne die Vor. der σ -Endlichkeit von m/z ist (a) nicht allgemein richtig. Indes gilt für nicht σ -endliche m : wenigstens: Es ist $\bar{U}(c; M) = \bar{m}(M)$ und $U(c; M) = m(M)$, wobei c die charakteristische Funktion der nicht (notwendig) m -meßbaren Menge M , ferner \bar{m} bzw. m das äußere bzw. innere Maß bezeichnen. *Otto Haupt.*

Caccioppoli, Renato: Elementi di una teoria generale dell'integrazione k -dimensionale in uno spazio n -dimensionale. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 41—49 (1953).

Bericht über Arbeiten des Verf. [dies. Zbl. 48, 37; vgl. auch Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 629—634 (1952)].

K. Krickeberg.

Giorgi, Ennio De: Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 390—393 (1953).

Bezeichnungen: Es sei E_k der k -dimensionale euklidische Raum, $x = (x_1, \dots, x_k) \in E_k$ und $|x| = (\sum x_k^2)^{1/2}$; ferner bezeichne m das k -dimensionale Lebesguesche Maß. Unter Mengen bzw. Funktionen über E_k verstanden. Für Mengenfolgen $\{M_n\}$ wird $M = \lim M_n$ im Sinne der Nikodymschen Metrik erklärt, d. h. $m(M \setminus M_n) \rightarrow 0$. Jedes M ist Limes einer Folge polygonaler Mengen; dabei heißt eine Menge Q polygonal, wenn ihre Begrenzung Q_0 auf einer Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen liegt. Die charakteristische Funktion einer Menge M wird mit $c(x; M)$ bezeichnet. — Für polygonale Mengen M ist der „Perimeter“ $P(M)$, d. h. das $(k-1)$ -dimensionale Maß von M_0 gegeben durch $(P) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{E_k} \text{grad } W_\lambda c(x; M) dx_1 \cdots dx_k$, wobei

$$W_\lambda f(x) = \pi^{k/2} \int_{E_k} \exp(-\frac{|x-\xi|^2}{\lambda}) f(x+\lambda\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_k \text{ für } \lambda > 0 \text{ bei beschränktem } f. — \text{All-}$$

gemein definiert Verf. durch (P) den Perimeter $P(M)$ einer beliebigen Menge M . — Ergebnisse: (1) Ist $P(M) < +\infty$, so existiert genau ein Vektorfeld $F(X|M) = (F_1(X), \dots, F_k(X))$ mit folgenden Eigenschaften: (a) Es ist $F(X|M)$ für jede Menge X erklärt, σ -additiv und von endlicher Totalvariation; (b) für jedes stetige, stetig differenzierbare $g(x)$, welches nebst seinen partiellen Ableitungen (1. Ordnung) für $|x| \rightarrow +\infty$ mindestens wie $|x|^{-(k+1)}$ Null wird, gilt $\int_M \text{grad } g(x) dx_1 \cdots dx_k = \int_{E_k} g(x) dF$. (11) Existiert zu M ein $F(X|M)$ mit den Eigenschaften

(a), (b) wie in (I), so ist $P(M) < +\infty$, und $P(M)$ ist gleich der Totalvariation von F (in E_k). Daraus ergibt sich die Äquivalenz des Begriffes „Perimeter von M “ mit dem des $(k-1)$ -dimensionalen Maßes der orientierten Begrenzung von M im Sinne von Caecioppoli. — (III) Ist $P(M) < +\infty$, so gilt $\min(m(M), m(E_k - M)) \leq [P(M)]^{k/(k-1)}$. Ist ferner $F(X|M)$ das gemäß (I) zugehörige F , so gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\tilde{B}} \text{grad } W_\lambda c(X|M) dx_1 \cdots dx_k = F(B)$ für jedes B , für welches die Totalvariation von $F(X|M)$ auf B Null ist. — (IV) Ist $P(M_n) < a < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$, mit von n unabhängigem a und ist $M = \lim M_n$, wobei $P(M) < +\infty$, so gilt $\liminf P(M_n) \geq P(M)$, ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_k} g(x) dF(X|M_n) = \int_{E_k} g(x) dF(X|M)$ für alle stetigen $g(x)$ mit $g(x) \rightarrow 0$ für $|x_i| \rightarrow +\infty$. — (V) Ist $M = \lim M_n$ mit polygonalen M_n , so gilt $\lim P(M_n) = P(M)$. — Die Beweise sollen in einer anderen Arbeit veröffentlicht werden. Otto Haupt.

Young, L. C.: On the compactness and closure of surfaces of finite area, continuous or otherwise, and on generalized surfaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, II. Ser. **2**, 106—118 (1953).

A real vector function $x = f(w)$ [$x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$, $w = (u, v) \in R$, R the closed unit square] is said to be a generalized Dirichlet representation (N) [gen. D-rep. (N)] provided (i) $f(w)$ is AC on almost all straight lines $u = u_0$, or $v = v_0$; (ii) $f(w)$ is continuous on the boundary P of R ; (iii) $D[R, f] = 2^{-1}(R) \iint (f_u^2 + f_v^2) du dv < N$, where $D[R, f]$ is the Dirichlet integral relative to f , and f_u^2, f_v^2 denote the sum of the squares of the first partial derivatives of the n components of f . If f is continuous in R then f is said to be a special D-rep. (N). By $a[R, f]$ is denoted the classical area integral $a[R, f] = (R) \iint [f_u^2 + f_v^2]^{1/2} du dv$. The vector $x = f(w)$ can be thought of as the representation of a surface S in E_n not necessarily continuous. The present paper extends a previous research of the author (this Zbl. **31**, 388) concerning special D-rep. (N) to gen. D-rep. (N), and establishes a connection with the concept of generalized surfaces as defined previously by the author (this Zbl. **44**, 102). A sequence S of gen. D-rep. (N) $f(w)$ is said to be BL convergent toward a gen. D-rep. (N) $g(w)$ provided (i) there are two dense sets U, V of numbers u_0, v_0 such that S converges to g at each point (u_0, v_0) , $u_0 \in U, v_0 \in V$; (ii) the integrals of f_u^2, f_v^2 on every line $u = u_0, v = v_0$ are uniformly bounded; (iii) f itself is uniformly bounded on almost all straight lines parallel to the u and v axes. Finally, given any two gen. D-rep. (N), $f(w)$ and $h(w)$ the operation of replacing f by h is said to be an ε -modification provided there is an open set $W \subset R - P$ with $|W| < \varepsilon$, $a[W, h] < \varepsilon$, and $f = h$ in $R - W$. I. Given any sequence S of gen. D-rep. (N) uniformly convergent on P , there is a subsequence F of S which is BL convergent to a gen. D-rep. (N) $f(w)$, and there is also a sequence G of special D-rep. uniformly convergent to a special D-rep. (N) $g(w)$ such that (1) each element of G is a ε -modification of the corresponding element of F . (2) g is an ε -modification of f . A consequence of this statement is that if a generalized surface L has a rectifiable boundary curve and is „non degenerate“ in a convenient sense, then L has a „representation“ which is a gen. D-rep. $x = f(w), w \in R$. L. Cesari.

Cecconi, Jaurès: Sulla additività ciclica degli integrali sopra una superficie. *Rivista Mat. Univ. Parma* **4**, 43—67 (1953).

Let S be any continuous parametric (path) surface in E_3 , let $(T, Q): x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in Q$, be any representation of S on the closed unit square Q , and $[S]$ the set of points covered by S in E_3 . Let us suppose $L(S) < +\infty$, where $L(S)$ is the Lebesgue area of S . Let $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ be any continuous function of its six arguments, where (x, y, z) varies in any closed set $A \supset [S]$ and u_1, u_2, u_3 are real numbers, and let us suppose that

$$F(x, y, z, k u_1, k u_2, k u_3) = k F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$$

for every $k > 0$. Then a Weierstrass surface-integral $I(S)$ of the function F on the surface S is defined (L. Cesari, this Zbl. **29**, 291), is independent of the Fréchet representation (T, Q) of S , and reduces to the ordinary Lebesgue surface-integral every time $L(S)$ is given by the classical area integral. By making use of the topological operation of retraction it is known that the essential part of the surface S can be decomposed into its cyclic elements $S_i, i = 1, 2, \dots$, which are continuous non-degenerated (path) surfaces (open, or closed), and the equality holds $L(S) = \sum L(S_i)$ (T. Radó, this Zbl. **33**, 170) (cyclic additivity theorem for the Lebesgue area). In the present paper the author proves the basic equality $I(S) = \sum I(S_i)$, which can be called the cyclic additivity theorem for the integral $I(S)$. The present result seems to be one of the most advanced of surface area theory in the frame of modern calculus of variations where topological and analytical methods are deeply intertwined. [Other references on the integral $I(S)$: for lower semicontinuity, L. Cesari, this Zbl. **30**, 390, **37**, 174; for existence theorems of calculus of variations, J. M. Danskin, this Zbl. **48**, 81, A. G. Sigalov, this Zbl. **44**, 101, L. Cesari, this Zbl. **46**, 109; for the Stokes theorem, J. Cecconi, *Rivista Mat. Univ. Parma* **3**, 233—264 (1952), for the Gauss-Green theorem, J. Cecconi, this Zbl. **43**, 58]. L. Cesari.

Cecconi, Jaurès: Sull'approssimazione delle superficie di Fréchet. *Rivista Mat. Univ. Parma* **4**, 69—82 (1953).

Let $(T, Q): p \rightarrow p(w)$, $w \in Q$, denote any continuous mapping from the closed unit square Q of the w -plane E_2 into the Euclidean p -space E_3 , and let (T, Q^*) denote the mapping from the boundary Q^* of Q into E_3 defined by T . Then (T, Q) determines a continuous parametric Fréchet surface S , and (T, Q^*) a continuous parametric closed Fréchet curve which is denoted by ∂S , or boundary curve of S . Let $\|S, S'\|$ denote the Fréchet distance of two surfaces S, S' , and $L(S)$ the Lebesgue area of S . Then S is called a polyhedral surface if S has a representation, say (T, Q) , which is quasi linear in Q , i. e., there is a finite subdivision D of Q into triangles t such that T is linear on each $t \in D$; S is called a quasi-polyhedral surface if S has a representation, say (T, Q) , which is quasi linear on each closed polygonal region R interior to Q . In both cases the elementary area $a(S)$ of S can be defined as usual. The author proves the following main theorem: For any surface S of finite area $L(S)$ and for any $\varepsilon > 0$ there exists a quasi-polyhedral surface S' with $\partial S' = \partial S$, $\|S, S'\| < \varepsilon$, $|a(S') - L(S)| < \varepsilon$. The present theorem is of interest in calculus of variations and particularly in surface area theory. An application is given in another paper by the author (J. Cececoni, this Zbl. 50, 280). Previous results of A. Mambriani (this Zbl. 29, 353) and L. Cesari (this Zbl. 40, 176) are used in the proof. L. Cesari.

Ceconi, Jaurès: Un complemento al teorema di Stokes. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 23—37 (1953).

Sia S una superficie orientata di Fréchet del tipo della bicella $[T, Q]: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ quadrabile secondo Lebesgue e la cui linea contorno $\partial(S)$ sia rettificabile. L'A. dimostra la relazione di Stokes:

$$\iint_{(T, Q)} F_z(x, y, z) dz dx = \iint_{(T, Q)} F_y(x, y, z) dx dy = \int_{\partial(S)} F(x, y, z) dx$$

in ipotesi sulla funzione $F(x, y, z)$ molto più generali di quanto aveva egli supposto precedentemente [Riv. Mat. Univ. Parma 3, 233—264 (1952)]. Egli approfondisce la nozione di integrali curvilinei e superficiali per forme differenziali a coefficienti non continui. Uno studio analogo era stato iniziato da Baiada per gli integrali curvilinei di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente (questo Zbl. 31, 157). In questo lavoro l'A. mostra che tali integrali esistono anche quando i coefficienti delle forme sono soltanto approssimativamente continui in tutti i punti eccettuati al più quelli di un insieme del quale hanno misure nulle delle opportune proiezioni. G. Stampacchia.

Ceconi, Jaurès: Una osservazione sul teorema di Gauss-Green. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 50—51 (1953).

Mitteilung zweier in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 43, 58; 50, 280) bewiesenen Formulierungen des Gaußschen Integralsatzes und Bemerkung über die Notwendigkeit der Bedingung, der Rand des betrachteten Gebietes habe das dreidimensionale Maß Null. K. Krickeberg.

Ceconi, Jaurès: Confronto fra recenti definizioni di variazione totale per trasformazioni piane. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 10—19 (1953).

Es handelt sich um den Vergleich der Definition von Okamura (dies. Zbl. 45, 26) und der von Cesari und Rado, die sich bekanntlich als äquivalent erwiesen haben. (Vgl. Rado, dies. Zbl. 29, 350.) Es sei T eine stetige Transformation des Einheitsquadrates einer u, v -Ebene in eine x, y -Ebene. T sei von beschränkter Variation im Sinne von Okamura (BVO). Dann ist T auch von beschränkter Variation im Sinne von Cesari-Rado (BVC). Das kann man nicht umkehren, wie das Beispiel einer stetigen Abbildung T zeigt, bei welcher der Rand des Einheitsquadrates in eine geschlossene Jordankurve übergeht, deren Punkte eine Menge positiven Maßes bilden. So zeigt man auch, daß eine im Sinne von Cesari-Rado absolut stetige Transformation T nicht notwendig BVO ist. Aber: Eine reguläre Transformation T , welche den Rand des Quadrates in eine Menge vom Maß 0 überführt und BVC ist, ist auch BVO. Die durch $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ gegebene Transformation T heißt regulär, wenn zwei lineare, abzählbare, in $(0, 1)$ dichte Mengen (ξ_n) , (η_n) existieren, so daß jede der Kurven $x = x(\xi_n, v)$, $y = y(\xi_n, v)$, $x = x(u, \eta_n)$, $y = y(u, \eta_n)$, $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$, in der x, y -Ebene eine Punktmenge vom Maße 0 ist (Cesari, dies. Zbl. 26, 307). L. Schmetterer.

Karlin, Samuel: Extreme points of vector functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 603—610 (1953).

Es sei $L(\mu, \tilde{X})$ bzw. $M(\mu, \tilde{X})$ der Raum aller bezüglich μ \tilde{X} (= ein endliches Maß auf einem σ -Körper \tilde{X} von Teilmengen der Grundmenge X) integrierbaren bzw. wesentlich beschränkten meßbaren Funktionen auf X . Es bedeute $\otimes L^n$ bzw. $\otimes M^n$ das direkte Produkt von n L - bzw. M -Faktoren. $\otimes M^n$ kann als die Gesamtheit aller Vektoren $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$,

$x_i(t) \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, aufgefaßt werden. Es sei A eine beschränkte abgeschlossene und konvexe Teilmenge des n -dimensionalen Euklidischen Raumes; dann soll M_A aus allen $x \in \otimes M^n$ bestehen, deren Wertebereich fast in A liegt. Es sei B die Gesamtheit der extremen Punkte von A und B die abgeschlossene Hülle von B . Für $n \geq 3$ gilt nicht stets $B = B$. M_A ist konvex, beschränkt und in der schwachen *Topologie abgeschlossen. Da die Einheitskugel von $\otimes M^n$ bikompakt in der schwachen *Topologie ist, so ist es auch für M_A der Fall. Letzteres garantiert die Existenz von extremen Punkten in M_A . Die extremen Punkte von M_A sind in M_B enthalten. Verf. untersucht weiter die Frage der extremen Punkte von M_A , wenn μ_i atomare endliche Maße sind. Verf. erwähnt, daß viele der obigen Resultate im Falle von unendlichen direkten Produkten M^∞ gelten. Darüber beabsichtigt er in einer nächsten Arbeit zu berichten. Schließlich beschäftigt sich Verf. mit der Frage der extremen Punkte im Falle, daß die Maße positiv regulär sind und die Grundmenge X ein topologischer Raum ist.

D. A. Kappos.

Volkman, Bodo: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II, III. Math. Z. 59, 247—254, 259—270 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 51, 41). — II. Die Menge $\{0, 1, \dots, g-1\}$ ($g \geq 2$) werde so in $m (\geq 1)$ Mengen $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_m$ zerlegt, daß jede Ziffer j , $0 \leq j \leq g-1$, genau einem \mathfrak{G}_μ , $1 \leq \mu \leq m$, angehört. $A_\mu(q, n)$ bezeichne dann die Anzahl der e_i mit $i \leq n$ und $i \in \mathfrak{G}_\mu$ aus

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i}, \quad 0 \leq e_i < g, \quad \text{unendlich viele } e_i \neq 0, \quad 0 < q \leq 1.$$

Es gibt zu vorgegebenen Zahlen ζ_μ mit $0 \leq \zeta_\mu \leq 1$, $\sum_{\mu=1}^m \zeta_\mu = 1$, stets eine Menge

$G = G(\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$ von Zahlen q , für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_\mu(q, n)}{n} = \zeta_\mu$ für

$\mu = 1, \dots, m$ gilt. Bezeichnet w_μ die Anzahl der Elemente von \mathfrak{G}_μ , so beweist Verf. mit eigenen (dies. Zbl. 48, 34) und Methoden von Eggleston (dies. Zbl. 31, 208) für die gebrochene Hausdorffsche Dimension von G

$$\dim G = \left(\sum_{\mu=1}^m \zeta_\mu \log \frac{\zeta_\mu}{w_\mu} \right) \left/ \left(\log \frac{1}{g} \right) \right.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Eggleston (loc. cit.), wo der Fall $m = g, w_\mu = 1$ betrachtet wird. — III. Es handelt sich um Untersuchungen

über Mengen von Zahlen q ($0 < q < 1$), in deren g -adischer Entwicklung $q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i}$

eine vorgegebene Ziffernsequenz nicht auftritt. Ein Satz über die gebrochene Hausdorffsche Dimension einer solchen Menge verallgemeinert Ergebnisse von Best (dies. Zbl. 28, 351) und vom Verf. (dies. Zbl. 48, 34).

H.-E. Richert.

Mamuzić, Zlatko: La mesure (B) d'un groupe d'ensembles parfaits de points du segment $[0,1]$. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 5, Nr. 1/2, 31—43 und französ. Zusammenfassg. 43—45 (1953) [Serbo-kroatisch].

L'A. considère pour chaque $s \in \{1, 2, \dots, 8\}$ l'ensemble $P^{(s)}$ des nombres décimaux $\in [0, 1]$ représentables par des chiffres $0, 1, \dots, s$ et donne deux démonstrations que la mesure de $P^{(s)}$ est 0. (L'A. devrait consulter l'ouvrage de S. Piccard, ce Zbl. 27, 204, pour des considérations plus générales). G. Kurepa.

Mohr, Ernst: Beweis eines Satzes über Riemannsche Gebietsintegrale. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 391—392 (1953).

Dieser Beweis des Satzes über die Vertauschung von Riemannscher Integration und Grenzübergang bei gleichmäßig beschränkten Folgen von Funktionen mehrerer Variabler findet sich schon in Arbeiten von F. Hartogs [Math. Ann. 62, 4—7 (1906) und H. A. Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 54—60], E. Landau [Math. Z. 2, 350—351 (1918)] u. a.

K. Krickeberg.

Hukuhara, Masuo: Sur une généralisation d'un théorème de Kneser. Proc. Japan Acad. 29, 154—155 (1953).

Considérons l'inégalité différentielle (1) $[dy]dx - f(x, y) \leq F(x, y)$, où x est une variable réelle, F une fonction scalaire, tandis que y et f sont des vecteurs dans l'espace à n dimensions. Les fonctions f et F sont supposées être définies et bornées dans Ω : $0 \leq x \leq 1$, $y \leq \infty$, la première étant continue et la seconde semi-continue supérieurement. Une fonction continue $q(x)$ est dite solution de (1), lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x, \varphi(x)) \right| \leq F(x, \varphi(x)).$$

L'A. démontre le théorème suivant: Si A est un continu dans Ω , la famille de toutes les courbes-solutions de (1), passant par les points de A , est un continu dans l'espace de fonctions continues. Le théorème bien connu de Kneser en est une conséquence immédiate.

J. Szarski.

Hakala, Reino W.: On integration of functions of the form $e^{ax} f(x)$. Math. Mag. 27, 69—74 (1953).

Verf. wendet die Entwicklung

$$\int e^x f(x) dx = e^x (1 - d/dx + d^2/dx^2 - \dots) f(x)$$

auf die I -Funktion, auf $Ei(x)$, $II(x)$, $\int e^{ax} x^n dx$ sowie auf weitere elementare Integrale an.

W. Meyer zur Capellen.

Haslam-Jones, U. S.: On a generalized derivative. Quart. J. Math., Oxford II, Ser. 4, 190—197 (1953).

Soit $f(x)$ une fonction continue et $\chi(t)$ une fonction à variation bornée pour $-1 \leq t \leq 1$ telle que

$$\int_{-1}^1 t^r d\chi(t) = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad \int_{-1}^1 t^n d\chi(t) = n!.$$

L'expression $\Delta_n f(c) = \int_{-1}^1 f(c + ht) d\chi(t)$ s'annule pour les polynômes de degré $< n$ et peut être considérée comme une différence $n^{\text{ième}}$ de f , et $D_n f = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \Delta_n f$ comme une dérivée $n^{\text{ième}}$ généralisée. Le but du mémoire est de comparer cette dérivée à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de Peano $T_n f = a_n$ dans le développement limité

$$f(c+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + n! s(h) h^n.$$

Il est évident que si $T_n f$ existe, $D_n f$ existe et lui est égale (quelle que soit χ). L'A. démontre qu'il existe une $\chi(t)$ particulière, soit $\omega(t)$, telle que l'existence de $D_n f$ entraîne celle de $T_n f$, et par suite celle de $\Delta_n f$ (quelle que soit χ). Il recherche d'abord des conditions nécessaires pour qu' ω possède cette propriété: ces conditions portent sur les zéros de certaines intégrales définies et les discontinuités de certaines fonctions formées à partir de $\omega(t)$. Elles sont vérifiées de la manière la plus simple (polynôme de plus bas degré) en prenant: $\omega(t) = p(t)$ pour $-1 \leq t \leq 1$, $\omega(1) = 1 + p(1)$, avec $p'(t) = \frac{1}{2} [P_n''(t) + P_{n-1}''(t)]$, où $P_n(t)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre. L'A. vérifie alors que l'existence de $D_n f$ entraîne celle de $T_n f$.

R. de Possel.

Kuttner, B.: Some theorems on fractional derivatives. Proc. London math. Soc., III, Ser. 3, 480—497 (1953).

Soit $\Phi(x)$ une fonction de classe L définie dans $(0, 1)$. Soit $0 < k \leq 1$. Posons

$$I_k^+ \Phi = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^1 (x-t)^{k-1} \Phi(t) dt, \quad I_k^- \Phi = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_x^1 (x-t)^{k-1} \Phi(t) dt.$$

Désignons par D la dérivée première; les dérivées $k^{\text{èmes}}$ à droite et à gauche de f sont, par définition, $D_+^k f = D I_+^{1-k} f$, $D_-^k f = D I_-^{1-k} f$ pourvu que ces expressions existent. Supposons qu'on ait, pour presque tout x , $f(x) = I_+^k \Phi(x)$: on dit alors que f est une intégrale indéfinie $k^{\text{ième}}$ de Φ . En ce cas, on sait que $D_+^k f$ existe p. p. L'A. démontre les résultats suivants relatifs à $D^k f$: 1° En tout point où $\Phi(x) = D I_+^1 \Phi(x)$, donc presque partout, l'existence de $D^k f$ équivaut à celle de $\Psi = D \int_0^1 \Phi(u) \log |x-u| du$, et l'on a

$$(1) \quad D^k f = \sin \frac{\pi k}{2} \left[\Psi + \int_1^0 \Phi(u) \cdot S(1-u, 1-x) du - B \Phi \right],$$

$$\text{avec } S(u, x) = \frac{x^k - u^k}{x^k(x-u)}, \quad B = \int_0^1 \frac{z^{k-1} - z^{k-1}}{1-z} dz.$$

Un exemple montre que $D^k f$ peut alors n'exister nulle part. 2° L'A. dit que g appartient à la classe „Lip α “ dans (a, b) si $|g = |g(x) - g(x + h)| \leq A h^\alpha$ et à la classe „Lip (α, p) “ si $\int_{b-h}^b |g|^p dx \leq A h^{\alpha p}$. Si $\Phi \in \text{Lip}(\alpha, 1)$ dans $(0, 1)$, $D^k f$ existe p. p. et est donnée par (1) où Ψ est

remplacée par $\int_0^1 \frac{\Phi(t)}{x-t} dt$ (valeur principale). Si $\Phi \in \text{Lip } \alpha$ le résultat a lieu partout dans

l'intervalle ouvert $(0, 1)$, et $D^k f \in \text{Lip } \alpha$ dans tout intervalle strictement intérieur à $(0, 1)$. Si enfin $\Phi \in \text{Lip}(\alpha, p)$, des conditions plus compliquées portant en particulier sur α et p sont données pour que l'on ait $D^k f \in \text{Lip}(\alpha, p)$ dans $(0, 1)$ ou dans un intervalle strictement intérieur. Les conclusions s'étendent avec de légères modifications quand k n'est pas entre 0 et 1.

R. de Possel.

Lorch, Lee: Derivatives of infinite order. Pacific J. Math. 3, 773—788 (1953).

1. If $f(x)$ is analytic (or only quasi-analytic in the Denjoy-Carleman sense) in (a, b) and $f^{(n)}(x_0)$ is Borel (B)-summable to ke^{x_0} ($a < x_0 < b$), then $f^{(n)}(x)$ is uniformly B-summable to ke^x in (a, b) . In this case there exists an entire function $\Phi(x) = ke^x + o(e^x)$ such that $f(x) = \Phi(x)$ in (a, b) . The analogous result, where convergence replaces B-summability, has been established by Boas and Chandrasekharan (this Zbl. 31, 209). — 2. Let $\{\lambda_n\}$ be a sequence of constants, $\alpha > 0$ an integer and $(*) \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)/\lambda_n = g(x)$ dominatedly in (a, b) . (i) If $\lambda_{n-1}/\lambda_n \rightarrow 0$ then $g(x) = 0$ a. e. If $(*)$ holds uniformly, then $g(x) = 0$. (ii) If $\lambda_{n-1}/\lambda_n \rightarrow L \neq 0$, L finite, then $Lg^{(\alpha)}(x) = g(x)$. (iii) If λ_{n-1}/λ_n has an infinite limit-point, then $g(x)$ is a polynomial of degree $\leq \alpha - 1$. (iv) If λ_{n-1}/λ_n has at least two limit-points, of which at least one is finite, then $g(x) = 0$. This sharpens a part of results obtained for $\alpha = 1$ loc. cit.

J. Horváth.

Green, John W.: Support, convergence, and differentiability properties of generalized convex functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 391—396 (1953).

Let \mathfrak{F} be a family of real valued functions defined in the interval $I: a < x < b$, such that given two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) with $a < x_1 < x_2 < b$ there exists exactly one function $F \in \mathfrak{F}$ such that $F(x_1) = y_1$, $F(x_2) = y_2$. According to Beckenbach a function f is said to be sub- F if $f(x) \leq F_{12}(x)$, $x_1 < x < x_2$, $F_{12}(x)$ being the element of \mathfrak{F} determined by the points $(x_1, f(x_1))$ and $(x_2, f(x_2))$. A function $F \in \mathfrak{F}$ is said to be a support of f at x_0 provided $f(x) \leq F(x)$, $a < x < b$ and $F(x_0) = f(x_0)$. It is shown that f has a unique support at all but a countable set of points. Also that if a sequence $\{f_n\}$ of sub- F functions converges to a limit function f then f is sub- F and the convergence is uniform in every compact subinterval of I . Suppose now that f is sub- F and that the elements of \mathfrak{F} are continuously differentiable and such that if $F_n \rightarrow F$ then $F'_n \rightarrow F'$ uniformly in every compact subinterval of I . Among others the following results are then obtained: (1) f satisfies a Lipschitz condition in every compact interval J of I and thus is absolutely continuous in J ; (2) f has a derivative at all but a countable set of points; (3) if $\{f_n\}$ is a sequence of sub- F functions with limit f , $\lim f'_n(x) = f'(x)$ with exception of at most a countable set of points. Some supporting and differentiability results of the above type have been obtained by the reviewer (this Zbl. 39, 287). M. M. Peixoto.

Lekkerkerker, C. G.: A property of logarithmic concave functions. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 505—513, 514—521 (1953).

Während mit $f(x, t)$ auch $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ eine logarithmisch konvexe Funktion von x ist, gilt Entsprechendes für konkave Funktionen nicht. Verf. beweist aber folgenden Satz: $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien positive, fallende, logarithmisch konkave Funktionen im Bereich $x \geq 0$. Dann ist auch $\varphi_1(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \psi(t+x) dt$ eine solche Funktion. Ist überdies $\log \psi(x)$ in keinem Teilintervall linear, dann ist φ_1 sogar streng logarithmisch konkav. Zwei Anwendungen dieses Satzes betreffen die Iterationen $\varphi_{n+1}(x) = k \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) \varphi_n(t+x) dt$.

G. Aumann.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Mikeladze, Š. E.: Die Entwicklung der Differenz einer Funktion nach Differenzen ihrer Ableitung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **92**, 479–482 (1953) [Russisch].

In der Formel $\Delta^n f(a + \lambda h) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} f(a + (\lambda + r)h)$ ersetzt Verf. die Ausdrücke $f(a + (\lambda + r)h)$ mit Hilfe einer Interpolationsformel mit dem Restglied $\int_0^{\lambda+r} (\lambda + r - t)^{n-1} f^{(n)}(a + th) dt$ und entwickelt sodann die Integranden nach den Differenzen $\Delta^n f^{(n)}(a)$. Es entsteht eine Formel vom Typ

$$\Delta^n f(a + \lambda h) = h^n \sum_{q=0}^r A_{n,q} \Delta^q f^{(n)}(a) + R_{n,r}$$

mit angebbaren $A_{n,q}$ und $R_{n,r}$. Eine entsprechende Formel wird für die „zentralen“ Differenzen $\delta^{2n-1} f(a + h/2) = 1^{2n-1} f(a - (n-1)h)$ unter Benutzung der Besselschen bzw. der Stieltjesschen Interpolationsformel gewonnen. W. Hahn.

Korevaar, Jacob: Best L_1 approximation and the remainder in Littlewood's theorem. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 281–293 (1953).

Die Funktion $f(x)$ habe die folgenden Eigenschaften: 1. für $a \leq x \leq b$ existieren $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(m-1)}(x)$ und sind dort stetig; 2. $f^{(m)}(x)$ existiert für $a \leq x \leq b$ und ist dort stetig mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Sprungstellen; 3. auf jedem Teilintervall von $a \leq x \leq b$, auf dem die Funktion $f^{(m)}(x)$ stetig ist, genügt sie einer Lipschitz-Bedingung $|f^{(m)}(x_1) - f^{(m)}(x_2)| \leq A |x_1 - x_2|$. Verf. beweist, daß es Konstanten D_1 und D_2 gibt, derart, daß für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ ein Polynom $p_n(x) = \sum c_{nk} x^k$ existiert, das den Ungleichungen

$$\int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx < \frac{D_1}{(n+1)^{m+1}}, \quad |c_{nk}| < D_2^n \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

genügt. Die Konstanten D_1 und D_2 hängen nur von A , den oberen Grenzen von $|f^{(j)}(x)|$ ($j = 0, 1, \dots, m$) und der Menge der Sprungstellen von $f^{(m)}(x)$ ab. Dieser Satz (mit $m = 1$) wird benutzt zum Beweis der folgenden Behauptung: Es sei $a(t)$ auf jedem endlichen Intervall $(0, T)$ integrierbar, $|a(t)| \leq \frac{K_1}{t}$ ($t > 0$) und $\left| \int_0^\infty a(t) e^{-ut} dt \right| \leq K_2 u$ ($u > 0$). Dann gibt es

eine nur von den Konstanten K_1 und K_2 abhängige Konstante C , derart, daß $\int_0^T a(t) dt \leq C/\log T$ ($T > 1$). Diese Abschätzung ist eine best-mögliche. Durch Anwendung des allgemeineren oben genannten Satzes (mit beliebigem positivem ganzem m) folgt, daß $\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m a(t) dt \leq C_m/(\log T)^{m+1}$. H. D. Kloosterman.

Achiezer, N. I. und S. N. Bernštejn: Eine Verallgemeinerung eines Satzes über Gewichtsfunktionen und eine Anwendung auf das Momentenproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **92**, 1109–1112 (1953) [Russisch].

Eine für $x > 0$ positive, gerade, nichtabnehmende Funktion $\Phi(x)$ heißt Gewichtsfunktion, wenn für jede stetige Funktion $f(x)$ mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \Phi(x) = 0$ der Ausdruck $\inf f = P_{n,\Phi}$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, worin P ein beliebiges Polynom höchstens n -ten Grades und $\|g\|_\Phi = \sup_{-\alpha \leq x \leq \alpha} |g(x) \Phi(x)|$ die „Norm“ des Funktionenraumes $C_{\Phi,\infty}$ bedeutet. [Diese Definition ist völlig äquivalent mit der früher (dies. Zbl. **42**, 72) gegebenen.] In der Note wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bewiesen, daß $\Phi(x) > 1$ ($-\infty < x < +\infty$) Gewichtsfunktion ist: es muß eine Folge von für reelle x reellen Polynomen $R_{2n_i}(x)$ wachsender Grade $2n_i$ derart existieren, daß

$$0 < \sqrt{R_{2n_i}(x)} \leq \Phi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \text{ und } \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln R_{2n_i}(x)}{1+x^2} dx = \infty$$

ist. Die Bedingung ist schwächer als eine früher mitgeteilte (Bernštejn, dies. Zbl. 50, 70). Das Integral ist im wesentlichen der Logarithmus des Polynoms, das mit R_{2n_i} gerade die Nullstellen mit positiven Imaginärteilen gemeinsam hat, an der Stelle $x = -i$. — Als Anwendung ergibt sich ein Satz von M. Riesz über das Hamburgersehe Momentenproblem im Fall der Unbestimmtheit. *W. Hahn.*

Achiezer, N. I.: Über schwache Gewichtsfunktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 949—952 (1953) [Russisch].

Die Note bringt eine ähnliche Abschwächung der Bedingungen für schwache Gewichtsfunktionen, wie sie die vorstehend besprochene für gewöhnliche Gewichtsfunktionen gibt. [Bei der Definition der „ p -schwach-gewichtigen Funktion“ („ p -slabo vesovaja funkcija“) ist das Polynom P durch eine ganze Funktion H höchstens n -ten Grades und die Normbedingung durch $\|f - H\|_\Phi < \varepsilon$ zu ersetzen.] Der Satz lautet:

Wenn $\sup_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\ln |G(x)|}{1+x^2} dx = \infty$ ist, wobei $G(x)$ alle ganzen Funktionen des Grades $\leq p$ mit der Eigenschaft $0 < |G(x)| \leq \Phi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) durchläuft, so ist $\Phi(x)$ p -schwach-gewichtig. Mit einer Zusatzbedingung für $\Phi(x)$ gilt auch die Umkehrung. *W. Hahn.*

Videnskij, V. S.: Über die gewogene Annäherung auf der reellen Achse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 217—220 (1953) [Russisch].

Die Funktion $\Phi(x)$ heißt „Gewichtsfunktion bezüglich $\{x^{k_n}\}$ “ ($\Phi \in W\{k_n\}$), wenn in der Definition (vgl. die vorstehenden Referate) die approximierende Funktion P bzw. H die Gestalt $c_0 + c_1 x^{k_1} + \dots + c_n x^{k_n}$ hat. (Die gewöhnliche Gewichtsfunktion gehört also zu $W\{n\}$.) Verf. teilt, auf Resultaten von Mandelbroijt (dies. Zbl. 34, 368) fußend, eine Bedingung dafür mit, daß eine normal wachsende Funktion $(x\Phi'(x)/\Phi(x))$ monoton gegen unendlich zu $W\{k_n\}$ gehört, ferner zwei Sätze über das Wachstum ganzer Funktionen. *W. Hahn.*

Natanson, I. P.: Über die Entwicklung von Funktionen zweier Veränderlicher nach Orthogonalpolynomen der einfachsten Form. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1275—1277 (1953) [Russisch].

Es seien $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) die normierten Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $p(x)$ für $a \leq x \leq b$; entsprechend gehöre $\psi_n(y)$ zu $q(y)$ in $c \leq y \leq d$. Verf. bildet die „Orthogonalpolynome der einfachsten Form“ $\omega_{n,m}(x, y) = \varphi_n(x) \psi_m(y)$, die im Rechteck $R = (a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ zu $K(x, y) = p(x)q(y)$ gehören, und zu einer in R definierten Funktion $f(x, y)$ die „Fourierreihe“

$$\sum_{i,k} \left(\iint_R K(x, y) f(x, y) \omega_{i,k}(x, y) dx dy \right) \omega_{i,k}(x, y).$$

Er gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß $f(x, y)$ durch diese Reihe dargestellt wird: es ist Beschränktheit der Polynome (bez. n) und die Existenz dreier Integrale,

z. B. von $\int_a^b p(u) \left[\frac{f(u, y) - f(x, y)}{u - y} \right]^2 du$, zu fordern. — Im Beweis werden Doppelintegrale über R als iterierte Integrale berechnet; die hierzu an sich erforderlichen Zusatzvoraussetzungen über die Integranden werden nicht formuliert. *W. Hahn.*

Natanson, G. I.: Über die Summation von Reihen nach Jacobischen Polynomen nach einem Verfahren, das dem Verfahren von Bernštejn-Rogosinski analog ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 229—230 (1953) [Russisch].

Es sei $f(x)$ der Klasse $L^2_p(t)$ ($[-1, +1]$) angehörig, wobei $p(t) = (1-t)^\alpha \cdot (1+t)^\beta$ ($\alpha > -1, \beta > -1$). $f(x)$ sei nach Jacobischen Polynomen entwickelt, $S_n(x)$ bezeichne die n -te Partialsumme der Entwicklung. Ferner sei x_1 bzw. x_2 gleich $x \cos \alpha_n \pm \sqrt{1-x^2} \sin \alpha_n$ ($\alpha_n = \pi/(2n+1+\beta+\alpha)$). Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [S_n(x_1) + S_n(x_2)] = f(x).$$

Verf. teilt diesen Satz sowie zwei weitere über den Grad der Approximation ohne Beweis mit. Das durch die Limesformel begründete Summationsverfahren der Reihe für $f(x)$ läßt sich auch als Summationsverfahren durch Transformation mit der Matrix $(\cos \frac{1}{2} \pi \alpha_n / \alpha_k)$ kennzeichnen. W. Hahn.

Tsuchikura, Tamotsu: Absolute Cesàro summability of orthogonal series. Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 52—66 (1953).

In Teil 1 wird für ein Orthonormalsystem $\{q_n(x)\}$ in (a, b) die $[C, \lambda]$ -Summierbarkeit ($\lambda > 0$) einer Orthogonalreihe (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(x)$ untersucht. Sei $1 < p \leq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $\varepsilon > 0$. Unter den Annahmen (2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{1/p} (\log n)^{p-1+\varepsilon} < \infty$, bzw. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p (\log n)^{p+\varepsilon} < \infty$, bzw. (4) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p n^{p-1-\alpha p} (\log n)^{p-1+\varepsilon} < \infty$ ist (1) fast überall in (a, b) $[C, \lambda]$ -summierbar ($\lambda > q^{-1}$), bzw. $[C, q^{-1}]$ -summierbar, bzw. $[C, \lambda]$ -summierbar ($0 < \lambda < q^{-1}$). Diese Ergebnisse werden über eine allgemeine hinreichende [und für $q_n(x) = r_n(x)$ (Rademacher-Funktionen) auch notwendige] Bedingung für die $[C, \lambda]$ -Summierbarkeit von (1) gewonnen und enthalten für $p = q = 2$ Resultate von Wang über trigonometrische Reihen [Duke math. J. **9**, 567—572 (1942)]. Dort wurde auch gezeigt, daß $\varepsilon > 0$ nicht weggelassen werden kann in (2) und (4); Verf. zeigt dies für (2) und (3). — Teil 2 beschäftigt sich mit der $[C, \lambda]$ -Summierbarkeit der Fourierreihe (F. R.) einer Funktion $f(x)$. Ist $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$, so folgt die $[C, 1]$ -Summierbarkeit der F. R. von $f(x)$ an x_0 nicht aus lokalen Eigenschaften von $f(x)$ an x_0 (Bosanquet and Kestelman, dies. Zbl. **20**, 354). Verf. zeigt jedoch: Ist $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ ($p > 1$), so ist die lokale Voraussetzung

$$\int_0^t |f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)|^p du = O \left[t \left(\log \frac{1}{|t|} \right)^{-p-\varepsilon} \right] \quad (t \rightarrow 0)$$

hinreichend für die $[C, \lambda]$ -Summierbarkeit ($\lambda > p^{-1}$) der F. R. von $f(x)$ an der Stelle x_0 ; für $\alpha = 1$ enthält dies ein Resultat von Sunouchi (dies. Zbl. **41**, 390). D. Gaier.

Alexits, G.: Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **4**, 95—100 und russische Zusammenfassung, 101 (1953).

If the Fourier coefficients of a function $f \in L^2$ satisfy $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log k < \infty$, then it is well known that the Fourier series of f converges almost everywhere. It is now shown that this condition is equivalent to $\omega_2(\delta, f) = O(1/\lambda(1/\delta))$ where

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} (f(x+h) - f(x))^2 dx \right\}^{1/2}$$

is the quadratic modulus of continuity for f and $\lambda(x)$ is a positive non-decreasing function such that $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x/\lambda(x)} < \infty$. If the same condition holds for the modulus with respect to a subinterval $[a, b]$ of $[0, 2\pi]$, then the Fourier series converges almost everywhere in $[a, b]$. It should be noted that in this case f need not belong to L^2 . W. W. Rogosinski.

Izumi, Shin-ichi: Some trigonometrical series. V. Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 29—33 (1953).

[Parte IV: Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 18—21 (1953)]. L'A. collegandosi ad una precedente ricerca di T. Tsuchikura (questo Zbl. **44**, 51) dimostra che: i) se $f(x)$ è una funzione integrabile definita in $(0, 1)$; ii) se $f(x) = f(x+1)$ per x reale; iii) se

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{\sqrt{n} (\log n)^{\alpha}}$$

allora, detta $F_n(x)$ la n -esima somma di Riemann di $f(x)$, $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{k}{n}\right)$, se $\alpha < 1/2$ si ha quasi ovunque in $(0, 1)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \infty$; se $\alpha > 1/2$ si ha quasi ovunque in $(0, 1)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$; se $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(x)$ converge quasi ovunque; se $\alpha \leq 1$ la stessa serie diverge quasi ovunque. *G. Sansone.*

Sunouchi, Gen-ichiro: A Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere. *Kōdai math. Sem. Reports* **1**, 27–28 (1953).

A note to the effect that Kolmogoroff's example of an almost everywhere divergent Fourier series (compare Hardy-Rogosinski, *Fourier series*, Cambridge 1944, Theorem 80, p. 70–72) is, in fact, that of the Fourier series of the real part of the boundary values of a function $f(z)$, regular in $|z| < 1$ and with bounded means

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 \leq r < 1 \text{ [class } H].$$

W. W. Rogosinski.

Kac, M., W. L. Murdock and G. Szegő: On the eigen-values of certain Hermitian forms. *J. rat. Mech. Analysis* **2**, 767–800 (1953).

An extensive study of the asymptotic behaviour of the eigenvalues of certain Hermitian forms. The main results are as follows: I. Let (i) $f(x, \theta)$ be real, for $0 \leq x \leq 1$ and of period 2π in θ ; (ii) the complex Fourier coefficients $\psi_n(x)$ of $f(x, \theta)$ be continuous; and (iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max |\psi_n(x)| \leq M$.

Clearly, $\psi_{-n}(x) = \bar{\psi}_n(x)$ and $f(x, \theta)$ is continuous. Let $\lambda_v^{(n)}$, $v = 0, 1, \dots, n$, be the eigenvalues of the Hermitian matrix $A_n = [\psi_{\mu-\nu}^{(n)}(u+v)/(2n+2)]$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$, arranged in non-decreasing order, so that $|\lambda_v^{(n)}| \leq M$. The principal result is: If $F(\lambda)$ is Riemann-integrable for $|\lambda| \leq M$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 F(f(x, \theta)) dx d\theta.$$

If f is independent of x (when A_n is of „Toeplitz type“), this is an earlier result of Szegő [*Mat. természett. ert.* **35**, 185–222 (1927)]. Of the various interesting consequences we mention: If $\lambda_v^{(n)} \geq m > 0$ for all v and n , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A_n)^{1/(n+1)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \log f(x, \theta) dx d\theta \right\}.$$

II. Let $f(\theta) \sim (c_v)$ be real, continuous and of period 2π ; let $m = \min f(\theta)$ be attained only at $\theta_0 \pmod{2\pi}$; and let $f''(\theta)$ exist continuously near θ_0 and $f''(\theta_0) > 0$. If $\lambda_v^{(n)}$ are the eigenvalues of $T_n = (c_{\nu-\mu})$, arranged in non-decreasing order, then for fixed v , as $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_v^{(n)} - m \simeq f(\theta_0 + v\pi/n) - f(\theta_0) \simeq \left(\frac{1}{2}\right) f''(\theta_0) v^2 \pi^2 / n^2.$$

A similar result holds for $\lambda_{n+2-v}^{(n)}$ and $M = \max f(\theta)$. These are refinements of earlier results of Szegő: $\lambda_v^{(n)} \rightarrow m$, $\lambda_{n+2-v}^{(n)} \rightarrow M$. — III. The asymptotic distribution as $\alpha \rightarrow 0$ of the eigenvalues of certain integral equations, with kernels depending on the parameter α , is also studied.

W. W. Rogosinski.

Spezielle Funktionen:

• **Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi:** Higher transcendental functions. Vol. I. (Baten an Manuscript Project.) New York: McGraw-Hill Book Co. 1953. XXVI, 302 S. 49 s.

Dieser vorliegende erste Band eines drei Bände umfassenden Werkes bringt, auf sechs Kapitel verteilt, ausführliches Formelmateriale von einer Reihe für die Anwendungen der Mathematik auf Physik und Technik unentbehrlicher Funktionen. Auch die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der dabei berücksichtigten Funktionen werden aufgeführt. So finden sich z. B. in der Regel Angaben über die Verteilung der Singularitäten, die Größe der Residuen, die Lage der Nullstellen, die zuständigen asymptotischen Entwicklungen und a. m. Für einzelne weniger bekannte Formeln werden sogar die Ableitungen angegeben. Die Bezeichnung der Funktionen schließt sich selbstredend weitgehend dem allgemeinen Brauch an. Jedoch werden in einzelnen Fällen auch neue Bezeichnungen eingeführt und angewendet, wie z. B. bei der Funktion von Lerch und bei der konfluenten hypergeometrischen Funktion. An Inhalt und Reichhaltigkeit

des Formelmaterials läßt das Werk alles bisher in dieser Hinsicht Gebotene weit hinter sich. — Das erste Kapitel (54 Seiten) behandelt die Gamma-Funktion und die aus ihr abgeleiteten Funktionen wie die Beta-Funktion und die Psi-Funktion. Ferner findet man hier das wichtigste Formelmateriale aus der Theorie der Zeta-Funktion von Riemann, der verallgemeinerten Zeta-Funktion von Mellin und einer von Lerch eingeführten Funktion, die eine noch weitergehende Verallgemeinerung darstellt. Es werden weiterhin die Zahlen und Polynome von Bernoulli und Euler erwähnt und auch einige hierher gehörige Integrale vom Mellin-Barns-Typus aufgeführt. Es folgt dann im zweiten Kapitel (61 Seiten) die Besprechung der hypergeometrischen Funktion von Gauß. Im Hinblick auf ihre große Allgemeinheit wird im ersten Teil des Kapitels zunächst der Theorie dieser Funktion ein größerer Raum gewidmet. Es kommen dabei zur Sprache die Fragen der analytischen Fortsetzung, die entarteten Fälle, die asymptotischen Entwicklungen für große Parameterwerte, die Gleichung von Riemann, Fragen der konformen Abbildung und der Uniformisierung, die Schwarzsche Funktion und Sätze über die Nullstellenverteilung. Der zweite Teil bringt das zugehörige Formelmateriale: die Reihenentwicklungen, die Beziehungen zwischen verwandten Funktionen und die verschiedenartigsten Integraldarstellungen. Das dritte Kapitel geht auf die Funktionen Legendres ein, die ja bekanntlich Sonderfälle der hypergeometrischen Funktionen sind. Für beliebiges komplexes Argument werden die beiden Kugelfunktionen wie üblich mit P_n^m und Q_n^m bezeichnet, wobei P und Q schräg stehende Antiquabuchstaben sind. Für die Kugelfunktionen mit einem reellen Argument zwischen $-1 \dots +1$ werden dieselben Zeichen in senkrechter Stellung benutzt. Um diese Unterschiede zu bemerken, muß man allerdings sehr genau hinschauen. Die verschiedenen möglichen Darstellungen von P und Q durch Reihen sind sehr übersichtlich zusammengestellt. Bei jeder dieser Formeln wird unterschieden nach dem Faktor, der zu der Reihenentwicklung tritt, und der Reihenentwicklung selbst. Der Faktor steht auf der linken Seite und ihm gegenüber auf der rechten Seite in gleicher Höhe die damit zu multiplizierende hypergeometrische Reihe. Selbstverständlich werden auch hier die asymptotischen Entwicklungen von P und Q getrennt nach den drei Fällen großer Werte von z , μ und ν angegeben. Ferner sind hier zu finden die verschiedenen Additionstheoreme, sonstige Entwicklungen nach Kugel-Funktionen sowie mehrere sehr nützliche Tabellen, aus denen das Verhalten von P und Q an den singularen Stellen ± 1 und ∞ zu ersehen ist. Als besondere Fälle der Kugelfunktionen werden die Kugelfunktionen, die Ringfunktionen und die Funktionen Gegenbauers besprochen. Leider wird die etwas verzwickte liegende Frage nach der Lage der Nullstellen der Kugelfunktionen, je nachdem ob das Argument $\cos \theta$ oder $\zeta(z)$ ist, hier nicht näher erörtert. Die Kapitel IV und V behandeln Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Funktion von Gauß. Im Kapitel IV (17 Seiten) wird auf die ${}_n P_q$ -Funktionen eingegangen. Es werden angegeben die Differentialgleichung, die wenigen bisher bekannten Transformationsgleichungen sowie die wichtigsten Integraldarstellungen, die dafür gelten. Das Kapitel V (44 Seiten) behandelt als Verallgemeinerungen anderer Art die E -Funktion MacRoberts, die G -Funktionen Meijers sowie die hypergeometrischen Funktionen mehrerer Variablen. Das letzte sechste Kapitel (47 Seiten) bringt das wichtigste Formelmateriale aus der Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktion. Für die beiden linear unabhängigen Lösungen der zuständigen Differentialgleichung werden als Funktionszeichen nach dem Vorschlag von F. G. Tricomi die Buchstaben Φ und Ψ benutzt. Die von Whittaker eingeführten Funktionen $M_{k,m}(z)$ und $W_{k,m}(z)$ werden nur gelegentlich erwähnt. Sonst werden alle Formeln in den Funktionen Φ und Ψ ausgedrückt. Es werden die verschiedenen Integraldarstellungen für diese beiden Funktionen angegeben, sowie die Entwicklungen nach Laguerre-Polynomen und Bessel-Funktionen, die Laplace Transformierte, das asymptotische Verhalten der Funktionen für Argumente und Parameter, die Multiplikationstheoreme und Nullstellen. — Jedem der sechs Kapitel ist ein Literaturverzeichnis der einschlägigen Arbeiten angehängt. Ein Sachwortverzeichnis sowie eine Zusammenstellung der benutzten Funktionszeichen erleichtern dem Leser, sich schnell zurechtzufinden. Für den angewandten Mathematiker und den theoretischen Physiker stellt der vorliegende Band ein unentbehrliches und viel zeitraubendes Suchen ersparendes Hilfsmittel dar. Die sicherlich sehr mühevollen Arbeit, die bei der Zusammenstellung des Formelmaterials von den Sachbearbeitern aufgewendet werden mußte, verdient höchste Anerkennung.

H. Buchholz.

Aczél, J.: Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen“ orthogonalen Polynome. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 315–321 und russische Zusammenfassg. 321 (1953).

Es sei eine Folge von Pearson'schen Differentialgleichungen $Q_n(x) u_n'(x) = L_n(x) u_n(x)$ (Q_n, L_n Polynome von höchstens zweitem Grade) vorgelegt. Es sollen alle u_n ($n \geq 1$) mindestens zwei verschiedene endliche oder unendliche Nullstellen haben; schließlich sei $d^n u_n / dx^n = \text{Polynom } n\text{-ten Grades mal } p(x)$ mit von n unabhängigem $p(x)$. Dann bilden die R_n im wesentlichen ein System der klassischen Orthogonalpolynome. Der Beweis ist sehr einfach. Das Ergebnis läßt sich, wie Verf. selbst unter Hinweis auf die Literatur bemerkt, aus früheren Veröffentlichungen entnehmen, und zwar unter schwächeren Voraussetzungen.

W. Hahn.

Halphen, Étienne: Une remarquable identité. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1305—1306 (1953).

Beweis der Identität:

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} (\cos xz + \sin xz) z^{-1/2} dz = \int_0^{\infty} e^{-(z-x/2)^2} z^{-1/2} dz \quad (x \text{ reell})$$

und Hinweis auf eine Verallgemeinerung.

O. Volk.

Erdélyi, Arthur: Funzioni epicicloidali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 393—394 (1953).

L'A. esprime in termini finiti, per mezzo di funzioni di Bessel, le funzioni $E^{(k)}$ ed $E^{*(k)}$ introdotte da Agostinelli per la soluzione del problema dei valori al contorno relativo all'equazione differenziale a derivate parziali non separabile

$$u_{\varrho\varrho} + \varrho^{-1} u_{\varrho} + \varrho^{-2} u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 n^2 [a^2 + 2ab\varrho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + b^2\varrho^{2n-2}] u = 0,$$

che è la trasformata dell'equazione bidimensionale delle onde $u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0$, in una regione limitata dall'epicicloide $x = na \cos t + b \cos nt$, $y = na \sin t + b \sin nt$, (n intero, $0 < b < a$, t variabile fra 0 e 2π), mediante l'uso delle coordinate epicicloidali ϱ e φ definite dalle equazioni: $x = na\varrho \cos \varphi + b\varrho^n \cos n\varphi$, $y = na\varrho \sin \varphi + b\varrho^n \sin n\varphi$.

A. Pignedoli.

Dörr, Johannes: Unbestimmte Integrale über Produkte von Besselfunktionen mit Exponentialfunktionen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 353—354 (1953).

In der elektrischen Übertragungstechnik spielen Integrale der Form $Q_n(t, \beta) =$

$\int_0^t J_n(\tau) e^{i(t-\tau)\cos\beta} d\tau$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 80$ mit komplexen β -Werten für $0 \leq \operatorname{Re} \beta \leq \pi$ und $0 \leq t \leq n + 40$ eine Rolle. Es werden drei Reihenentwicklungen nach Besselfunktionen angegeben, die für numerische Rechnungen gut brauchbar sind. Für $\beta = 0$ bzw. $\beta = \pi$ erhält man als Spezialfall Kapteyns trigonometrisches Integral. Ein Beispiel beschließt die Arbeit.

H. Unger.

Brafman, Fred: A set of generating functions for Bessel polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 275—277 (1953).

Für die Funktionen $f_n^{(c)}(-n, c+n; -; x)$ wird gezeigt

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (c-\alpha)_n f_n^{(c)}(x)}{n!} t^n \sim {}_2F_0\left(\alpha, c-\alpha; -; \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2 - 4xt})\right) {}_2F_0\left(\alpha, c-\alpha; -; \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4xt})\right).$$

Die Entwicklung ist i. a. divergent und (1) ist nur formal so zu verstehen, daß die Koeffizienten gleicher Potenzen von t links und rechts gleich sind. In der Bezeichnung von Krall und Frink (dies. Zbl. **31**, 297) ist $f_n^{(a-1)}(-x/b) = y_n(x, a, b)$. K. Prachar.

Garabedian, P. R.: Orthogonal harmonic polynomials. Pacific J. Math. **3**, 585—603 (1953).

Es sei $x + iy = \varrho e^{i\Phi}$, $z + i\varrho = \cos(u - iv)$ bzw. $\varrho + iz = \sin(u + iv)$; $v = \text{const.}$ führt dann auf ein verlängertes bzw. abgeplattetes Sphäroid. Die Ausdrücke

$$(1) \quad \begin{aligned} &U_{n,h}(\varrho, z) \cos h\Phi, \quad U_{n,h}(\varrho, z) \sin h\Phi; \quad U_{n,h} = a_n P_n^h(\cos u) P_n^h(\zeta \sin v), \\ &V_{n,h}(\varrho, z) \cos h\Phi, \quad V_{n,h}(\varrho, z) \sin h\Phi; \quad V_{n,h} = a_n i^{n-h} P_n^h(\cos u) P_n^h(i \zeta \sin v), \\ &a_n = ((n-h)!/(n+h)!)^{1/2} \end{aligned}$$

sind harmonische Polynome in x, y, z vom Grade n . Verf. zeigt, daß diese Polynome im Innern eines verlängerten bzw. abgeplatteten Sphäroids D ein vollständiges Orthogonalsystem im Sinne des Dirichletschen Integrals

$$(f, g) = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy dz$$

bilden. Analoges gilt für die harmonischen Polynome, die man erhält, wenn man in (1) $U_{n,h}, V_{n,h}$ durch $X_{n,h} = \partial U_{n+1,h} / \partial z, Y_{n,h} = \partial V_{n+1,h} / \partial z$ ersetzt; man hat Orthogonalität im Innern eines Sphäroids D im Sinne des Skalarproduktes $[f, g] = \iiint_D f g \, dx \, dy \, dz$ bzw. auf einem Sphäroid S im Sinne des Skalarproduktes $\{f, g\} = \iint_S f g \, |1 - (z + i \varrho)^2|^{1/2} \, d\sigma$. Anwendung zur Berechnung der Kernfunktionen und der Greenschen Funktionen der Laplaceschen und biharmonischen Gleichung für ein Sphäroid.

O. Volk.

Siegel, K. M., J. W. Crispin, R. E. Kleinman and H. E. Hunter: Note on the zeros of $(dP_m^1(x)/dx)|_{x=x_0}$. J. Math. Physics 32, 193—196 (1953).

Die Verff. bauen eine früher entwickelte Methode aus [s. K. M. Siegel, J. W. Crispin, R. E. Kleinman und H. E. Hunter, dies. Zbl. 48, 48, sowie UMM-82, Studies in Radar Cross Sections—II, Willow Run Research Center, Univ. Michigan, April 1951]. Es wird eine gut brauchbare Methode entwickelt, um praktisch ausreichende Näherungswerte für die Nullstellen m_i von $dP_m^1(x_0)/dx$ (bei festem x_0 zwischen -1 und $+1$) zu erhalten und um die Werte von $\int_{x_0}^1 [P_{m_i}^1(x)]^2 dx$ zu berechnen. Dabei ist $P_m^1(x)$ die erste zugeordnete Kugelfunktion. Tabellen für m_i mit $i = 1, 2, \dots, 15$ werden berechnet für $x_0 = \cos 165^\circ$. Die Genauigkeit der Tabellen und der Aufwand an Arbeit zu ihrer Berechnung werden diskutiert.

W. Magnus.

Vacca, Maria Teresa: Determinazione asintotica per $n \rightarrow \infty$ degli estremi relativi dell' n -esimo polinomio di Jacobi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 277—280 (1953).

G. Villari (dies. Zbl. 47, 307) und F. Tricomi (dies. Zbl. 50, 292) hatten das n -te Legendresche Polynom in der durch die Überschrift bezeichneten Richtung untersucht. Ihre Ergebnisse verallgemeinert Verf. hier wie folgt auf die Jacobischen Polynome

(1) $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = ((\alpha + 1)_n / n!) F(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; 2z / (2k + z))$, wo $x = 1 - 4z / (2k + z)$. Es seien $x_{r,n}$ ($r = 1, \dots, n-1$), $1 > x_{1,n} > \dots > x_{n-1,n} > -1$ die die genannten Äußerstwerte liefernden Werte von x , also die Nullstellen von $(d/dx) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} (n - \alpha - \beta - 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$. Sie stehen nach Tricomi [Commentarii math. Helvet. 25, 196—204 (1951)] zu den (von 0 aus gezählten) Nullstellen $j_{\alpha+1, r}$ der Besselschen Funktion (B. F.) $J_{\alpha+1}(z)$ in der Beziehung $x_{r,n} = 1 - \frac{1}{2} j_{\alpha+1, r}^2 / (n + \alpha + 2)^2 = O(n^{-1})$. Um zu $P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x_{r,n})$ überzugehen, zieht Verf. einen gleichfalls von Tricomi dort angegebenen Zusammenhang zwischen der in (1) auftretenden hypergeometrischen und den B. F. heran, aus dem hier $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n! [1 - (x - 3)/4]^{n-1} \exp[-\frac{1}{2} \xi (2(n + \beta) - \alpha + 1)] [\xi - \frac{1}{2} J_\alpha(\frac{1}{2} \xi)] + O(n^{-1})$ mit $\xi = 2[n + (\alpha + 1)/2][n + (\alpha + 1)/2 + \beta](1 - x)/(3 + x)$ folgt, und erzielt damit das Ergebnis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)}(x_{r,n})] = (\frac{1}{2} j_{\alpha+1, r})^{-\alpha} J_\alpha(j_{\alpha+1, r}).$$

Wegen $P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$ entsprechende Formel nahe $x = -1$.

L. Koschmieder.

Gatteschi, Luigi: Una proprietà degli estremi relativi dei polinomi di Jacobi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 398—400 (1953).

Bezeichnet man mit $\mu_{r,n}^{(\alpha, \beta)}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$) die Werte der Funktion

$$(\sin \frac{1}{2} \vartheta)^\alpha (\cos \frac{1}{2} \vartheta)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \vartheta) \quad (\alpha > -1)$$

an den Extremalstellen von $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($x = \cos \vartheta$), von rechts nach links gezählt, so ist bei festem r $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{r,n}^{(\alpha, \beta)} = J_\alpha(j_{r, \alpha+1})$, wobei $j_{r,k}$ die r -te Nullstelle der k -ten

Besselschen Funktion $J_k(x)$ bezeichnet. — Der Satz verallgemeinert eine Bemerkung von Villari (dies. Zbl. 47, 307) und eine Aussage von Vacca (vorsteh. Referat).

W. Hahn.

Palamà, Giuseppe: Sulla derivata erresima di classici polinomi rispetto ai parametri. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 401—409 (1953).

Verf. gibt eine neue Ableitung für eine früher [dies. Zbl. 17, 303; 18, 68; Boll. Un. mat. Ital. 17, 90—93 (1938); vgl. auch F. G. Tricomi, dies. Zbl. 46, 72; L. Toscano, dies. Zbl. 50, 292] gegebene Darstellung von $\partial^r L_n^{(\alpha)}(x)/\partial \alpha^r$ ($r \leq n$), sowie eine solche für $\partial^r P_n^{(\alpha)}(x)/\partial \alpha^r$; das Beweisverfahren läßt sich verallgemeinern. Es werden auch zwei Rekursionsformeln für $\partial L_n^{(\alpha)}(x)/\partial \alpha$ bezüglich α und n angegeben.

O. Volk.

Palamà, Giuseppe: Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati. Rivista Mat. Univ. Parma 4, 105—122 (1953).

Der erste Teil bringt Integraldarstellungen für $l_n^{(\alpha)}$ mit dem Argument x und x^2 , Integralbeziehungen zwischen $L_n^{(\alpha)}(x)$ und $L_n^{(\beta)}(x)$, Integraldarstellungen der Hermiteschen Polynome mittels der Laguerreschen ($x=0$) und Integrale, deren Integrand Produkte aus Laguerreschen Polynomen $L_n^{(\alpha)}(x)$ oder Hermiteschen Polynomen enthält. Der zweite Teil behandelt die den $l_n^{(\alpha)}(x)$ zugeordneten Polynome $P_n^{(\alpha)}(x)$, definiert durch $l_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma(\lambda+1) (2\pi)^{-1/2} (L_n^{(\alpha)}(x) I_\lambda(x) + P_n^{(\alpha)}(x) e^x x^{-\alpha})$,

$I_\alpha(x) = \int_0^x e^t t^{-\alpha-1} dt$, $n \geq 0$, $\lambda+1 < 0$, für welche Verf. in einer früheren Arbeit [Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 185—193 (1953)] eine dreigliedrige Rekursionsformel und andere Beziehungen abgeleitet hatte, welche auch für $S_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x)$ gelten. Die Anzahl der abgeleiteten Formeln, die auch Ableitungen und Integrale enthalten, ist groß.

O. Volk.

Janković, Zlatko: On solutions of Hermite's and Laguerre's differential equation. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 133—146 und serbische Zusammenfassg. 146—148 (1953).

Verf. leitet aus den entsprechenden Differentialgleichungen direkt verschiedene Eigenschaften ihrer Lösungen — Hermitesche und Laguerresche Polynome bzw. Funktionen zweiter Art — her. Seiner Ansicht, daß „es nicht bemerkt wurde, daß die h_n [Hermitesche Funktionen zweiter Art] denselben Rekursionsformeln genügen wie die H_n “ kann Ref. nicht zustimmen.

K. Prachar.

Carlitz, L.: The multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. Math. Mag. 27, 59—64 (1953).

Es sei die ganze Zahl $k > 1$, die Zahlen α_{kj} beliebig komplex mit $\sum_{j=1}^k \alpha_{kj} = 1$, die Zahlen β_{kj} voneinander verschieden ($j = 1, \dots, k$), ferner $|\lambda_k| \neq 1$. Dann ist eine Folge von Polynomen $f_m(x) = x^m + \dots$ durch

$$\sum_{r=1}^k \alpha_{kr} f_m(t + \beta_{kr}) = \lambda_k^{-m} f_m(\lambda_k t)$$

eindeutig erklärt, und zwar bilden die f_m eine Folge Appellscher Polynome. Spezialfälle sind die verallgemeinerten Bernoullischen und Eulerschen Polynome in der Erklärung von Nörlund; einige formale Eigenschaften dieser Bildungen lassen sich auf die f_m übertragen.

W. Hahn.

Chakrabarty, N. K.: On a generalisation of Bateman's k -function. Bull. Calcutta math. Soc. 45, 1—7 (1953).

Die verallgemeinerte Batemansche k -Funktion, die der Verf. betrachtet, ist durch die Gleichung

$$k'_n(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} 2^l \cos^l \varphi \cdot \cos(x \cdot \operatorname{tg} \varphi - n \varphi) \cdot d\varphi \quad (l > -1)$$

definiert. Es wird in der Arbeit eine große Zahl von Beziehungen zwischen dieser k -Funktion und anderen damit verwandten Funktionen aufgestellt. Es zeigt sich, daß sie u. a. auch darstellbar ist als Laguerre-Polynom. Daneben werden auch Integraldarstellungen und Reihenentwicklungen für die Funktion hergeleitet, zumeist unter Einsatz der Operatorenrechnung.
H. Buchholz.

Agarwal, Ratan Prakash: A propos d'une note de M. Pierre Humbert. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2031—2032 (1953).

Die Verallgemeinerung der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+(\beta-1)/\alpha}}{\Gamma(\alpha m + \beta)}$

genügt der symbolischen Relation $E_{\alpha, \beta}(t^x) = p^{x-\beta+1}(p^x - 1)$. Hieraus ergeben sich einige Integralrelationen für $E_{\alpha, \beta}$.
G. Doetsch.

Agarwal, R. P.: Some basic hypergeometric identities. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **67**, 186—202 (1953).

Verf. überträgt unter Benutzung einiger Ergebnisse von F. H. Jackson [Quart. J. Math., Oxford Ser. **13**, 69—82 (1942), **15**, 49—61 (1944)] einige für hypergeometrische Reihen bekannte Identitäten auf basische Reihen. Die erste Formel gibt die Entwicklung einer ${}_2\phi_1$ nach ${}_4\phi_3$. Die nächste Formelgruppe betrifft die Jacksonschen Analoga zu den vier Appellschen hypergeometrischen Reihen von zwei Veränderlichen, und zwar werden vier Entwicklungen „abnormer“ Funktionen in Doppelreihen von „normalen“ und vier Darstellungen „normaler“ Funktionen als Einfachreihen von „normalen“ abgeleitet (Beweismethode: Umordnung der Reihen.) Eine weitere (ohne Beweise mitgeteilte) Gruppe von acht Identitäten enthält Beziehungen zwischen den konfluenten Formen der Reihen. Zuletzt untersucht Verf. die Konvergenz der Entwicklungen und findet durch Aufstellung majorisierender Reihen Gebiete absoluter Konvergenz.
W. Hahn.

Bailey, W. N.: On the sum of a terminating ${}_3F_2$. I. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **4**, 237—240 (1953).

Bestimmung der Summen ${}_3F_2\left(1 + a - b, 1 + a - c\right) [\text{Dixon}] {}_3F_2\left(\frac{1}{2}(a + b + c), 2c\right) [\text{Watson}]$ und ${}_3F_2\left(\frac{a, 1-a, c}{e, 1+2e-e}\right) [\text{Whipple}]$ für $c = m$ bzw. $a = 2m$. Anwendung der Dixon-Watson-Whipple-Formeln zur Darstellung der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen mit zwei Variablen F_2, F_3 .
O. Volk.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -function. IV. V. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 187—193, 349—357 (1953).

Fortsetzungen M IV, V der gleichbenannten Arbeiten MI, II, III des Verf.: Berichte B I, II, III darüber in dies. Zbl. **48**, 307, 308; **50**, 294. Verf. stellt zunächst einen Hilfssatz auf: Unter den Annahmen B I(2) mit $1 \leq m \leq q$, kurz (1), und $m + n - p/2 - q/2 > 0$, $\zeta \neq 0$, $|\arg \zeta| < (m + n - p/2 - q/2)\pi$, B I(3) und $\text{Re}(a_j - d) < 1$ ist

$$\int_{\sigma}^{(1-\sigma)} G_{p,q}^{m,n} \left(\zeta v \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) (1-v)^{c-d-1} v^{-c} dv = - \frac{2\pi i}{\Gamma(1+d-c)} G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(\zeta \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, c \\ d, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right).$$

Wenn $\text{Re}(c-d) = 0$, so ist der Wert des \int_1^{∞} die G -Funktion rechts mal $\Gamma(c-d)$. Die Hilfsmittel zum Beweise sind B I(1) mit einer Streckung des Integrationsweges und Vertauschung der beiden auszuführenden Integrationen. Der Hilfssatz leistet einen wichtigen Beitrag zum Beweise des folgenden Hauptsatzes 4 (zweiten Entwicklungssatzes): Unter den Bedingungen (1) und $m + n - p/2 - q/2 - 1/2 \geq 0$, $l \geq 0$; $\text{Re}(a_j - d_h) < 1$ für $j = 1, \dots, n$; $h = 1, \dots, l$; B I(3); $\text{Re } \lambda > 1/2$ und $w \neq 0$, $|\arg w| < (m + n - p/2 - q/2 - 1/2)\pi$ ist

$$G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left(\lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_l \\ d_1, \dots, d_l, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) / \prod_{i=1}^l \Gamma(d_i) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_{l+1}\varphi_l \left(\begin{matrix} -r, d_1, \dots, d_l \\ c_1, \dots, c_l; 1/\lambda \end{matrix} \right) G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(w \left| \begin{matrix} 1-r, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right).$$

Dazu ergänzende Aussagen, z. B. für $q = p$. — Beweis ganz ähnlich dem des Hauptsatzes 3 in M III. — Die übliche Abkürzung $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_h = \Gamma(\alpha + h)/\Gamma(\alpha)$ [$h = 1, 2, \dots$] benutzend, beweist Verf. in MV folgenden Haupt- (dritten Entwicklungs-) Satz 5: Es seien μ, k, l, p, q solche ganze Zahlen, daß $\mu, k, l \geq 0$, $q \geq 1$, $0 \leq p \leq q$, $p + k \leq q + l$. Ist dann $p < q$, $p + k < q + l$, so gilt für alle ζ und λ

$$(1) = \prod_{j=1}^k (\gamma_j - \mu) \lambda^{\mu} x^{p+kq+l-1} \left(\begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_k; \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \delta_1, \dots, \delta_l; \lambda \zeta \end{matrix} \right) \\ + (-1)^{\mu} \sum_{r=0}^{\mu-1} (-1)^{r} k+1 q_l \left(\begin{matrix} -r, \gamma_1 - \mu, \dots, \gamma_k - \mu; \\ \delta_1 - \mu, \dots, \delta_l - \mu; \lambda \end{matrix} \right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{r!} x^{p+1q_q} \left(\begin{matrix} 1+\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, 1+\mu-r; \zeta \end{matrix} \right) \\ + (-1)^{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} k+1 q_l \left(\begin{matrix} -r-\mu, \gamma_1 - \mu, \dots, \gamma_k - \mu; \\ \delta_1 - \mu, \dots, \delta_l - \mu; \lambda \end{matrix} \right) (-\zeta)^r \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_{r+p+1q_q} \left(\begin{matrix} 1+r+\mu, \alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \\ \beta_1+r, \dots, \beta_{q-1}+r, 1+r; \zeta \end{matrix} \right).$$

Ergänzungssätze für $p + k = q + l$ und für $p = q$. — Im wichtigsten Sonderfalle $\mu = 0$ vereinfacht sich (1) zu

$$(2) = \prod_{j=1}^k (\gamma_j - \mu) \lambda^{\mu} x^{p+kq+l-1} \left(\begin{matrix} \gamma_1, \dots, \gamma_k; \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \delta_1, \dots, \delta_l; \lambda \zeta \end{matrix} \right) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} k+1 q_l \left(\begin{matrix} -r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \\ \delta_1, \dots, \delta_l; \lambda \end{matrix} \right) \frac{(-\zeta)^r}{r!} \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_{r+p+1q_q-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \\ \beta_1+r, \dots, \beta_{q-1}+r; \zeta \end{matrix} \right).$$

Verf. gibt eine Liste von Schriftumsstellen aus den Jahren 1913 bis 1936, an denen Entwicklungen der Art (1), (2) auftreten. — Er beweist (1) in zwei Schritten vollständiger Induktion, deren erster mit $k = 0$ von $l = n$ zu $l = n + 1$, und deren zweiter bei festem l von $k = m$ zu $k = m + 1$ führt. Dabei bedient er sich einiger von ihm am Anfang von MV hergeleiteter Hilfssätze, die sich namentlich auf Umrißintegration einer (mit Exponentieller und Potenz) vervielfachten φ -Funktion beziehen.

L. Koschmieder.

Funktionentheorie:

Peschl, Ernst und Friedhelm Erwe: Über die Norm regulärer Funktionenspalten. Arch. der Math. 4, 191—201 (1953).

Denote by $\mathfrak{F}_n(D)$ the family of all the real-valued functions $F(z)$ defined in a domain D in the complex z -plane such that $F(z)$ can be expressed in D as the norm $\sum_{i=1}^n f_i(z) \overline{f_i(z)}$ of an n -dimensional holomorphic vector $\bar{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$

whose Wronskian does not vanish in D . It is easily seen that for every function $F(z)$ belonging to $\mathfrak{F}_n(D)$, the following conditions are satisfied:

$$(1) \det. \{(\partial^i + j / \partial z^i \partial \bar{z}^j) F(z)\}_{i,j=0,\dots,r} > 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1), \quad = 0 \quad (r = n)$$

for all $z \in D$. The authors prove that for any simply connected domain D , every function $F(z)$ satisfying the above conditions (1) belongs to the family $\mathfrak{F}_n(D)$. They also give a counter-example in the case of a doubly connected domain. K. Noshiro.

Zin, Giovanni: Esistenza e rappresentazione di funzioni analitiche, le quali, su una curva di Jordan, si riducono a una funzione assegnata. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 365—405 (1953).

Verf. beschäftigt sich mit einer Art Randwertaufgabe in bezug auf analytische Funktionen. Ein beschränktes (abgeschlossenes) Gebiet D auf der z -Ebene sei durch eine rektifizierbare Jordankurve C begrenzt, längs deren eine integrierbare Funktion $\varphi(z)$ angegeben werde, die der Bedingung $\int_C \varphi(z) z^n dz = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) genügt. Dann wird gezeigt, daß die durch

$$f(z) = \varphi(z) \quad \text{für } z \in C \quad \text{und} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t) dt}{t-z} \quad \text{für } z \in D - C$$

definierte Funktion $f(z)$ an jedem Lipschitzschen Punkt von C stetig ist, wofern $\varphi(z)$ dort stetig ist. — Es sei C insbesondere eine Kurve, die aus einem rektifizierbaren und beide Punkte $z = \pm 1$ verbindenden Jordانبogen \widehat{C} sowie aus der die beiden Punkte verbindenden Strecke besteht. Falls eine auf D stetige und innerhalb D regulär analytische Funktion $f(z)$ existiert, die längs \widehat{C} mit einer angegebenen stetigen Funktion $g(z)$ zusammenfällt, so muß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x)$ auf $-1 \leq x \leq +1$ gleichmäßig $(C, 1)$ -summierbar sein und ferner muß deren $(C, 1)$ -Summe an $x = \pm 1$ die Werte

$g(\pm 1)$ besitzen, wo $P_n(x)$ das n -te Legendresche Polynom bedeutet und

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_C g(z) P_n(z) dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

hierbei ist das Integral in der Richtung von -1 nach $+1$ zu erstrecken. Umgekehrt, wenn die letztgenannte Bedingung erfüllt ist, dann gibt es eine (und nur eine) innerhalb D regulär analytische Funktion $f(z)$, die längs C mit $g(z)$ zusammenfällt und ferner an jedem Lipschitzschen Punkt stetig ist. An diese Resultate anschließend, liefert Verf. eine allgemeine Methode um die Funktion $f(z)$ mittels $g(z)$ explizit darzustellen. Zum Schluß wird ein Verfahren für die analytische Fortsetzung derjenigen Funktion festgestellt, die längs einer einfachen rektifizierbaren und offenen Kurve mit einer vorgegebenen stetigen Funktion übereinstimmt.

Y. Komatu.

Sunyer i Balaguer, F.: Values of entire functions represented by gap Dirichlet series. Proc. Amer. math. Soc. 4, 310—322 (1953).

The author extends to Dirichlet series a „general principle“ that frequently obtains in the case of Taylor series, viz., the disappearance of the possibility of the existence of exceptional cases if the series satisfies certain gap conditions. Let the sequence $\{\lambda_n\}$ satisfy $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, let $N(\lambda)$ be the greatest of the n such that $\lambda_n \leq \lambda$, and let the

density $D(\lambda) = N(\lambda)/\lambda$, mean density $\bar{D}(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^\lambda D(x) dx$, mean upper density $\bar{D}^* = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{D}(\lambda)$.

Again, let $f(s)$ be an entire function and let $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f(\sigma + it) = M(\sigma, f)$ 1. u. b. for any

real σ ; then $f(s)$ is said to be of (R) order ρ if $\rho = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 M(\sigma, f)}{\sigma}$ and of (R) proximate

order $\rho(\sigma)$ if $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\log M(\sigma, f)}{V(\sigma)} = 1$, where $V(\sigma) = e^{e^{\sigma-1}}$. For corresponding orders on the

horizontal strip Y defined by $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$, we use the notation $M(\sigma, Y, f)$ 1. u. b. $f(\sigma + it)$

in place of $M(\sigma, f)$; and we denote by $n(\sigma, Y, f)$ the number of zeros of $f(s)$ in the part $0 \leq \sigma \leq \sigma$

of the strip Y . Theorem I. Let $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ be a function represented by a Dirichlet

series convergent in the whole plane, of order ρ and proximate order $\rho(\sigma)$; given a strip Y of width $\pi \rho$, there exists a number $1 = 1(Y, \rho, h)$, such that if $D^* > 1$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$

$= h > 0$, then, for any given finite a without exception, $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{n(\sigma, Y, F - a)}{V(\sigma)} \geq B_0(Y, \rho, h) > 0$.

Theorem 2 gives an analogous result for functions of infinite (R) order, where a comparison function similar to those used by K. L. Hiong (this Zbl. 12, 264) is employed in place of the function V .

N. A. Bowen.

Sunyer i Balaguer, Ferran: Sur les directions de Borel-Valiron communes à une fonction entière, à ses dérivées et à ses intégrales successives. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2196—2198 (1953).

Results [H. Milloux, J. Analyse Math. 1, 244—300 (1951), Chap. II] obtained for the integral function of finite order ρ , proximate order $\rho(r)$, in respect to the totality of Borel-Valiron directions (B.V.), are here announced to remain valid for B.V. directions of maximum kind (B.V.)', and resulting relations between the latter directions and (i) the exceptional values of the function, (ii) the corresponding directions of the derivatives and of the integrals of the function, (iii) gaps in the Taylor series of the function, are stated. Typical theorems are: Theorem I. If $0 < \rho < \infty$, then (i) the function, its derivatives and its integrals have at least one common (B.V.)'; (ii) every (B.V.)' of the function is also a (B.V.)' of the integrals of the function. Theorem II. If $1 \leq \rho < \infty$, then the function, its derivatives and its integrals have at least two (B.V.)' in common; if there are only two, they make an angle π/ρ ; if more than two, they cannot be enclosed in an angle less than π/ρ . Theorem III. If $1 \leq \rho < \infty$, and the function, in common with its derivatives and integrals, possesses less than 2ρ (B.V.)', then, for every finite a and each integer

$k (\geq 0)$, we have $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, (f^{(k)} - a)^{-1})}{r^{\rho(r)}} \geq B(\rho) > 0$. This kind of result has been obtained

previously by using classical theorems but the $B(\rho)$ is in that case small when ρ is near an integer. Milloux has asked whether theorem III is also true when $0 < \rho < 1$. Theorem IV. Let the function be $f(z) = \sum a_n z^{\lambda_n}$ where the sequence $\{\lambda_n\}$ has upper mean density D^* . Then there is at least one (B.V.)' common to $f(z)$, its derivatives and its integrals in every angle of opening $> 2\pi \max(D^*, 1/2\rho)$.

N. A. Bowen.

Mejman, N. N.: Ergänzungen und Verbesserungen zu der Arbeit „Differentialungleichungen und gewisse Fragen der Verteilung der Nullstellen ganzer und eindeutiger analytischer Funktionen“. (Aus einem Brief an die Redaktion.) *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 6, 177—180 (1953) [Russisch].

An der im Titel zitierten Abhandlung (dies. Zbl. 47, 75) werden einige Unexaktheiten ausgemerzt und einige Sätze präzisiert und erweitert, unter besonderer Berücksichtigung verschiedener Resultate von B. Ja. Levin. *A. Ostrowski.*

Pontrjagin, L. S.: Über die Nullstellen gewisser elementarer transzendenter Funktionen. (Ergänzung.) *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 91, 1279—1280 (1953) [Russisch].

Verf. nennt eine Funktion $\hat{H}(z) = H(z)/l(z)$ ein „verallgemeinertes Quasipolynom“, wenn der Nenner $l(z)$ ein Polynom des Grades p in z und der Zähler ein (eigentliches) Quasipolynom in z , d. h. ein Polynom $h(z, e^z)$ in z und e^z ist. $\hat{H}(z)$ heißt „stabil“, wenn nur Nullstellen mit negativen Realteilen auftreten. Verf. verallgemeinert Resultate einer früheren Arbeit [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 6, 115—134 (1942)], auf die auch wegen der Beweise verwiesen wird, und gibt Kriterien für „Stabilität“ von $\hat{H}(z)$: das Zählerpolynom muß ein „Hauptglied“ haben — d. h. in $h(z, e^z)$ muß das Glied höchsten Grades gleichzeitig in z und in e^z vom höchsten Grade sein — und die durch $\hat{H}(iy) = F(y) + iG(y)$ definierten Funktionen müssen jede in dem Streifen $-2k\pi + \varepsilon \leq y \leq 2k\pi - \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots$) für hinreichend große k genau $4ks + r - p$ reelle Nullstellen haben, wobei die Nullstellen von F die von G trennen. (r und s sind die Grade von h in z bzw. e^z .)

W. Hahn.

Carlitz, L.: A functional equation for the Weierstrass ζ -function. *Math. Student* 21, 43—45 (1953).

Die Funktionalgleichung

$$[f(u) + f(v) - f(u+v)]^2 + f'(u) + f'(v) + f'(u+v) = 0$$

läßt neben den ∞^1 Polynomen $f^* = b - \frac{1}{3}b^2u$ nur ∞^2 meromorphe Lösungen

$f = \frac{\sigma'}{\sigma}(u; g_2, g_3)$ zu, wobei $f' = p(u; g_2, g_3)$ die doppelt periodische Grundfunktion bedeutet. Als meromorphe Lösungen φ der verwandten Identität

$$\{\partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2\} \ln [\varphi(u)\varphi(v)] + \varphi(u-iv)\varphi(u+iv)/\varphi^2(u)\varphi^2(v) = 0$$

finden sich ∞^4 ganze Funktionen $\varphi(u) = e^{a+bu^2}\sigma(u; g_2, g_3)$. *W. Maier.*

Rushforth, J. M.: A generalisation of Jacobi's fundamental formulae. *Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser.* 9, 17—19 (1953).

Aus $0 < \text{Im}(\tau)$ & $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(2xl + \tau l^2)} = \vartheta(x)$ & $n = 2, 3, \dots; h = 1, \dots, 2n$

$$\& \quad n(y_h + x_h) = \sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu \quad \& \quad x_\nu + \frac{h+k\tau}{n} = x_{\nu, h, k} \text{ folgt}$$

$$n \prod_{\nu=1}^{2n} \vartheta(y_\nu) = \sum_{h, k=0}^{n-1} e^{-(2\pi\nu/n)(h+k\tau/2n)} \prod_{\nu=1}^{2n} e^{(2\pi i k/n)x_{\nu, h, k}} \vartheta(x_{\nu, h, k}).$$

W. Maier.

Andersson, Bengt J.: A note on the constant of Koebe. *Ark. Mat.* 2, 415—416 (1953).

Verf. betrachtet die Funktionsklasse $w(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, die im Einheitskreis $\gamma: |z| < 1$ schlicht ist. $w(z)$ bildet γ auf ein offenes einfach zusammenhängendes Gebiet D_w ab. Für dieses Gebiet werden die beiden charakteristischen Größen

$$d_w = \frac{1}{|a_1|} \inf_{w \in D_w} |w| \quad \text{und} \quad M_w = \frac{1}{|a_1|} \sup_{w \in D_w} |w|$$

eingeführt. Nach Koebe ist $d_w \geq 1/4$. Diese Schranke ist die beste für $M_w \leq \infty$. Verf. führt eine interessante Abschätzung für d_w in Abhängigkeit von M_w ein, indem

er zeigt, daß für $M_w \leq M$

$$d_w \geq 2 M^2 [1 - 1/2 M - \sqrt{1 - 1/M}]$$

wird. Der Beweis, der bestimmte harmonische Funktionen benützt, stützt sich auf ein Lemma aus der Diss. von Beurling (dies. Zbl. 8, 318). *H. P. Künzi.*

Jenkins, James A.: Various remarks on univalent functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 595—599 (1953).

S sei die Klasse der in $|z| < 1$ schlichten Funktionen $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $P(a_2, \dots, a_n)$ ein sog. w -homogenes Polynom [d. h. es gilt

$$P(a_2 e^{i\theta}, \dots, a_n e^{i(n-1)\theta}) = e^{ik\theta} P(a_2, \dots, a_n), \quad k \neq 0;$$

die Argumente der linken Seite sind die Koeffizienten von $e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$]. Dann folgt nach einer Variationsmethode von Schaeffer und Spencer (Coefficient regions of schlicht functions, New York 1950) für ein $f(z) \in S$ für das P ein Maximum annimmt, eine Differentialgleichung, deren Integration indes meist sehr kompliziert ist. Verf. wirft die Frage nach denjenigen Fällen auf, in denen jene Differentialgleichung eine gewisse besonders einfache Gestalt zeigt, die auch ihre Integration einfach macht; er zeigt, daß man dann nur die auch mit „elementaren“ Methoden erreichbaren Resultate gewinnt, da P dann notwendig a_2 oder $a_2^2 - a_3$ oder eine Potenz dieser Ausdrücke ist. — Entsprechende Betrachtungen werden für die Klasse Σ der in $|z| > 1$ schlichten Funktionen $f(z) = z + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$ und die Klasse ihrer Umkehrungen durchgeführt; dabei zeigt Verf., daß ein Ergebnis von Springer (dies. Zbl. 42, 314), das dieser mittels der Variationsmethode gewonnen hat, sich auch elementar finden läßt, so daß obige negative Aussage für S auch für Σ zutrifft. *H. Grunsky.*

Robertson, M. S.: Multivalent star-like functions. Duke math. J. 20, 539—549 (1953).

Let $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ (with $a_0 = 0$ when $p = 1$) be regular and multivalently starlike of order p with respect to the origin in $|z| < 1$. It is proved that, for $n \geq p$,

$$|a_n| \leq \sum_{k=p}^n \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!(n-p-1)!(n-k)!} |a_k|,$$

and that these inequalities are sharp. The case $p = 1$ is well known, and the above result is obtained by induction. The restriction that $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-2} = 0$ seems to be essential for the proof. Without this restriction best possible estimates for the $|a_n|$, $n \geq p$, are only known in the case of real a_k (cf. A. W. Goodman and M. S. Robertson, this Zbl. 42, 313). *W. W. Rogosinski.*

Meschkowski, Herbert: Verzerrungssätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche. Compositio math. 11, 44—59 (1953).

Ist $f(z)$ eine in einem beschränkten Gebiet \mathfrak{B} der z -Ebene bis auf einen Pol mit Residuum 1 reguläre schlichte Funktion, so gibt es für jeden beliebigen inneren Punkt u Schranken für $|f'(u)|$, die zunächst durch geometrische Kennzeichnung der Schrankenfunktionen festgelegt sind (vgl. z. B. Rengel, dies. Zbl. 7, 21). Nur wenn \mathfrak{B} einfach zusammenhängend, etwa der Einheitskreis, ist, lassen sich diese Schranken bequem explizit angeben. Verf. drückt sie hier allgemein mittels der Funktionen eines vollständigen Orthogonalsystems zu \mathfrak{B} im Sinne Bergmanns aus. — Ferner wird ein bekannter Verzerrungssatz betreffend beschränkte schlichte Abbildungen von \mathfrak{B} [vgl. z. B. Rengel, loc. cit.] mit anderer Normierung der Funktionsklasse neu formuliert. *H. Grunsky.*

Nehari, Zeev: Some inequalities in the theory of functions. Trans. Amer. math. Soc. 75, 256—286 (1953).

L'A. se propose de montrer comment un grand nombre d'inégalités se déduisent aisément de la propriété de minimum de l'intégrale de Dirichlet. — 1. A cet effet, il démontre plusieurs théorèmes qui sont contenus dans l'énoncé suivant: soit R une surface de Riemann, D, D_1 des ensembles ouverts de R tels que $D \subset D_1$ et dont les frontières C, C_1 sont formées d'un nombre fini de courbes closes C^r, C_1^r ; soit $S(z)$ une „fonction des singularités“ harmonique sur D_1 sauf en un nombre fini de points singuliers dans D , uniforme dans $D_1 - D$, et p, p_1 des fonctions

resp. constantes sur chacune des C^n , C_1^n , et telles que $p + S$ et $p_1 + S$ soient resp. harmoniques dans D et D_1 ; on a alors

$$(1) \quad \int_C [(p + S) dp/dn + p dS/dn] ds \geq \int_{C_1} [(p_1 + S) dp_1/dn + p_1 dS/dn] ds,$$

les dérivées étant prises suivant la normale extérieure, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $p = p_1 + \text{const.}$ et aire $(D_1 - D) = 0$. Particularisons: 1° admettons que \bar{S} (conjuguée de S) soit uniforme dans $D_1 - D$; (1) donne (2) $\int_C (p + S) (dp/dn) ds \geq \int_{C_1} (p_1 + S) (dp_1/dn) ds$.

2° admettons $p = 0$ sur C et $p_1 = 0$ sur C_1 ; (1) donne (3) $\int_C S (dp/dn) ds \geq \int_{C_1} S (dp_1/dn) ds$;

ce résultat comprend le théorème I et le théorème IV avec $S = \Sigma S_\mu$, 3° si $S + \bar{p}$ et $S + p_1$ sont resp. uniformes le long de C et C_1 , (1) donne encore (3), ce qui comprend le théorème II. — 4° avec $D_1 = R$ supposée close, les seconds membres s'annulent, on a $p_1 + S = \text{const.}$, et (2) conduit au théorème III, alors que (3) conduit aux théorèmes IIIa et V, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $p + S = 0$ dans D , C se composant de fentes le long desquelles $S = \text{const.}$ — II. Citons quelques-unes des applications données par l'A. A. Coefficients des fonctions univalentes. a) Soit $f = \Sigma a_n z^n$ régulière pour $|z| < 1$ et vérifiant $|f(z)| < M$. L'A. obtient un système de conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les a_n pour que f soit univalente. Si $M \rightarrow \infty$ on retrouve les résultats de Grunsky relatifs au cas où f n'est pas supposée bornée. — b) Supposons $z + a_1/z + \dots$ univalente dans un domaine Δ contenant le point à l'infini. Le domaine de variation de $2a_3 + a_1^2$ est un disque, les points de sa frontière correspondant aux représentations sur le plan fendu le long d'arcs d'hyperboles équilatères. Si $\Delta = \{|z| < 1\}$, on a $|a_2| \leq 2/3$, résultat connu de Schiffer et Golusin. — B. Autres problèmes relatifs aux domaines à fentes. a) fentes vérifiant $\Re Q(1/z) = \text{const.}$, Q étant un polynôme; b) $t(z; \xi, \eta)$ étant la fonction harmonique sur R qui a mêmes singularités que $\log(|z - \xi|/|z - \eta|)$, fentes vérifiant $t(z; \xi, \eta) = 0$; c) fentes vérifiant $\Re \Sigma [a_n \log(z - \zeta_n)] = \text{const.}$ — III. D est une réunion de domaines D^n . — A. Inégalités relatives à deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ univalentes dans $|z| < 1$, vérifiant $|f| < 1$, $|g| < 1$, et dont les ensembles de valeurs ne se recouvrent pas. B. Inégalité relative aux fonctions de Green des domaines plans D^n , l'égalité ayant lieu quand

le plan est divisé par les courbes $\sum_{n=1}^m \alpha_n \log|z - \zeta_n| = 0$; l'A. en déduit de curieux résultats géométriques en admettant que les D^n sont égaux; cas des carrés, extension à des cubes. — IV. Dans le dernier paragraphe, l'A. démontre qu'on peut ajouter au second membre de (3)

$$[\mathfrak{D}_{D_1-D}(w)]^{-1} \left[\int_C (dS/dn) ds^2 \right],$$

\mathfrak{D} désignant l'intégrale de Dirichlet, et w étant la fonction harmonique égale à 1 sur C et à 0 sur C_1 . Il en déduit en particulier: A. Pour un domaine doublement connexe de module M , les rayons conformes r, R des deux composantes de la frontière vérifient $M \leq R/r$. — B. Si $w = F(z)$ représente $|z| < 1$ sur un domaine plan D contenu dans $|w| < 1$, avec $F(0) = 0$, l'A. donne une inégalité relative au module du domaine compris entre D et $|w| < 1$, l'égalité étant atteinte quand D a pour frontière une certaine courbe d'ordre 4. — C. Résolution d'un problème extrémal dont la donnée comprend une fonction arbitraire et dont la solution est une fente analytique. Cas particulier: on donne 4 points α_i ; trouver C_1 joignant α_1 et α_2 , C_2 joignant α_3 et α_4 telles que le module du domaine complémentaire de C_1 et C_2 soit maximum. La solution est

$$\log f(z) = c \int^z [II(z - \alpha_p)]^{-1/2} dz.$$

R. de Possel.

Shniad, H.: Convexity properties of integral means of analytic functions. Pacific J. Math. 3, 657—666 (1953).

Verf. beweist, daß die Integralmittel t -ter Ordnung $M_t(r; f) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^t d\theta \right)^{1/t}$

des absoluten Betrages einer für $|z| < R$ analytischen Funktion $f(z)$ auf den Kreisen $|z| = r$ ($0 \leq r < R$) [s. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities (Cambridge 1934, dies. Zbl. 10, 107), p. 143—144] für $t = 4$ immer konvexe Funktionen von r in dem Intervall

$[0, R)$ sind, und zwar zeigt er, daß, falls $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta$ nicht konvex in $r < R$ ist, $g(z)$

in seinem Analytizitätskreis genau eine Nullstelle hat und deshalb nie das Quadrat einer in $|z| < R$ analytischen Funktion sein kann. Dazu braucht Verf. die folgenden Lemmata:

1. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \leq \sqrt{B} M$, falls $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^2 \leq B$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = M < \infty$, $a_i > 0$ ist. [Druck-

fehler: die erste Formel auf S. 661 müßte $x_i^2 = B_n M_n a_i^2$ statt $B_n M_n a_i^2$ heißen].

$$2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{6n^2 - 9n + 2} < 0,09504. \quad 3. \sqrt{x} + \sqrt{0,04752 \sqrt{9x^2 - 10x + 1}} < \sqrt{2} - 1 \quad \text{für}$$

$0 \leq x \leq 1,9$. 4. Ist $f(z)$ eine in $t = 0$ verschwindende analytische Funktion, so ist $M_t(r, f)$ für jedes positive t konvex in r (s. E. F. Beckenbach, W. Gustin, H. Shniad, dies. Zbl. 32, 204). Andererseits zeigt Verf. durch das Beispiel $f(z) = [(1 - z)^2 (1 - 0,19z)]^{2/5,66}$, daß $M_{5,66}(r, f)$ ($0 \leq r < 1$) nicht mehr konvex sein muß (und ähnlich für jedes $M_t(r, f)$ mit $t \geq 5,66$), nicht einmal für Funktionen, die in ihrem Analytizitätskreis nirgends verschwinden. [Dagegen ist für solche Funktionen M_t bei jedem $0 < t \leq 2$ konvex, s. die unter 4) zitierte Arbeit.]

J. Aczél.

Stallmann, Friedemann: Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem. Math. Z. 59, 211—230 (1953).

Le quadrilatère curviligne D est constitué par l'intérieur d'un angle (ou par une bande), dont on a retiré un demi-cercle ayant pour base l'un des côtés de l'angle (ou de la bande). La fonction qui représente le demi-plan supérieur x sur D est considérée avec Klein (Ges. math. Abh., Bd. II, Berlin 1922, p. 540) comme le quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre. Après quelques considérations générales sur la représentation conforme d'un polygone d'arcs de cercles par cette méthode l'A. passe au cas du domaine D , ou plutôt du domaine D' obtenu en complétant D par une symétrie relative au demi-cercle. L'équation du second ordre est (affirme-t-il) une transformée simple de l'équation de Lamé. Dans le cas de l'angle de mesure δ , il obtient la fonction représentative sous la forme $w(x) = [(x - 1)(x + 1)]^{\frac{1}{2}} z(x) z(-x)$, $z(x)$ étant une solution régulière pour $x = -1$, et sans zéro pour $-1 < x < 1$, de l'équation

$$(1) \quad (x^2 - 1)(q x^2 - 1) z'' + 2[(x + \delta)(q x^2 - 1) + (1 - \delta)q x(x^2 - 1)] z' \\ + [q(1 - \delta)(2 - \delta)x^2 - q\delta(1 - \delta)x - \lambda] z = 0;$$

q et λ sont des constantes. Supposant q donné, il cherche à déterminer λ pour qu'une telle solution existe (problème de valeur propre). Pour cela il substitue dans (1) des développements en séries entières en q de la forme $\sum \lambda_p q^p$ et $\sum q^p z_p(x)$, et obtient des relations qui permettent de déterminer de proche en proche les z_p , les λ_p étant choisis de façon à vérifier les conditions ci-dessus. Les z_p sont alors des polynômes de degrés $2p$, et les séries convergent pour $|q|$ assez petit. L'A. dit qu'elles convergent peut-être pour $|q| < 1$. Il propose ensuite, comme procédé „pratique“, de développer directement $w(z)$ suivant les puissances de q et de x . Par substitution dans une équation déduite du principe de symétrie, il obtient des relations qui permettent, dit-il, de calculer de proche en proche les coefficients de la série double. La convergence en x est évidente, mais il n'est pas question de la convergence en q ! L'A. étudie ensuite le cas de la bande, pour lequel il se borne à la deuxième méthode. Les mêmes questions sont ensuite reprises de la même façon, mais avec une autre variable x qui décrit un rectangle quand x décrit le demi-plan (x étant fonction elliptique de v), ou avec la variable $u = \cos v$. Les formules obtenues sont analogues. — La détermination de q pour un domaine D donné n'est pas abordée.

R. de Possel.

Pfluger, Albert: Über das Typenproblem Riemannscher Flächen. Commentarii math. Helvet. 27, 346—356 (1953).

Dans le dernier chapitre de sa thèse (Harvard University 1951 et Trans. Amer. math. Soc. 73, 40—94 (1952)), H. Royden a donné un critère nouveau pour qu'une surface de Riemann soit hyperbolique. L'A. retrouve le résultat de Royden en même temps qu'un critère de nature analogue qui permet d'affirmer que la surface est parabolique. La méthode semble susceptible d'autres applications. — Soit F une surface de Riemann, F_n une suite croissante de domaines relativement compacts de F , de réunion égale à F , telle que la frontière I_n de F_n relative à F soit constituée par un nombre fini de courbes de Jordan analytiques par morceaux, dont chacune sépare de F_n un morceau non compact de F . Soit H_n la fonction harmonique définie dans $F_n - F_n$ qui prend la valeur 1 sur I_n et zéro sur I_n ; le „module conforme“ du domaine annulaire $F_n - F_n$ est $M_n = 1/D(H_n)$, où D désigne l'intégrale de Dirichlet. D'après R. Nevanlinna, F est du type hyperbolique ou parabolique selon que la suite (croissante) M_n est bornée ou non. — La surface F , partagée en polygones de sorte que les I_n soient formés d'arêtes, devient un complexe K , et chaque F_n un complexe partiel k_n . A chaque arête σ_k^1 de K , on associe un „poids“ g_k de la façon suivante: sur chaque σ_k^1 , on choisit une différentielle réelle continue β_k telle que $\int_{\sigma_k^1} \beta_k = 1$. Etant donnée une face σ_j^2 , à chacune des arêtes

σ_l^1 qui la bordent, on associe un nombre réel x_l , de sorte que leur somme soit nulle. Soit u_j la fonction harmonique dans σ_j^2 qui vérifie $du_j = \beta_k$ sur chacune des σ_l^1 . Les β_k étant fixes, prenons G_j tel que l'on ait, quels que soient les x_l , $D(u_j) \leq G_j \sum x_l^2$. — G_j existe, d'après Royden (loc. cit.). On pose $g_k = G_j - G_{j-1}$, σ_j^1 et σ_j^2 étant les faces bordées par σ_k^1 . — Soit alors $X^1 = \sum x_k \sigma_k^1$ une chaîne ∞ à coefficients réels telle que $\sum g_k^{-1} x_k^2 < \infty$ et dont le „bord“ se réduit à un sommet: $\partial X^1 = \sigma_0^1$; $Y^1 = \sum y_k \sigma_k^1$ une chaîne telle que $\sum g_k x_k^2 < \infty$ et dont le co-bord se réduit à une seule face: $\partial Y^1 = \sigma_j^1$. Le théorème fondamental peut s'énoncer ainsi: S'il n'existe aucune

chaîne X^1 , F est du type parabolique; s'il existe une chaîne Y^1 , F est du type hyperbolique. — Au cours de la démonstration, l'A. [en s'appuyant sur des résultats de B. Eckmann, Commentarii math. Helvet. 17, 240—255 (1945)] définit pour tout complexe annulaire (tel que $k_n - k_0$), dont les arêtes ont des „poids“ donnés g_i , un „module“ μ_n et un co-module μ_n . Dans le cas de F , ils satisfont à $\mu_n \leq M_n < \mu_{n+1}$. — Supposons qu'il existe un partage de F conduisant à un complexe \bar{K} dual de K , tel qu'à l'arête duale de σ_k , on puisse associer le poids g_k^{-1} tout en vérifiant les conditions ci-dessus; alors les chaînes X^1 sur K et Y^1 sur K se correspondent biunivoquement; et selon qu'il en existe ou non, F est de type hyperbolique ou parabolique. — Enfin, au moyen des „modules“ et des „co-modules“ ci-dessus, l'A. donne une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'un ensemble plan compact soit de capacité logarithmique nulle; il fait usage pour cela de quadrillages successifs.

R. de Possel.

Taylor, Howard E.: Determination of the type and properties of the mapping function of a class of doubly-connected Riemann surfaces. Proc. Amer. math. Soc. 4, 52—68 (1953).

Die hier untersuchten Riemannschen Flächen werden aus einer Folge von Blättern $\dots S_{-k}, S_{-k+1}, \dots, S_{-1}, S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots$ aufgebaut; S_k ist die w -Ebene mit 2 Schlitzten auf der reellen Achse derart, daß 2 Blätter mit benachbarten Indizes einen Schlitz gemeinsam haben, längs dessen sie über Kreuz zu verheften sind; der in einem neu angehefteten Blatt noch offene Schlitz liegt dabei abwechselnd links und rechts von dem eben verhefteten. Zuerst wird die einfach zusammenhängende Fläche betrachtet, die man erhält, wenn die Folge der S_k nach links abbricht und der freie Schlitz getilgt wird; es wird gezeigt, daß eine solche Fläche vom parabolischen Typus ist. Daraus folgt leicht, daß die eingangs geschilderten Flächen konform äquivalent der zweifach punktierten Ebene sind. Die eine solche Fläche erzeugenden Funktionen lassen sich hinsichtlich ihrer analytischen Form (durch das Weierstraßprodukt ihrer Ableitung) kennzeichnen, jedoch gelingt es nicht, die vermutete Umkehrung, daß jede solche Funktion eine Fläche der geschilderten Art erzeugt, in voller Allgemeinheit zu beweisen.

H. Grunsky.

Kuramochi, Z.: On covering surfaces. Osaka math. J. 5, 155—201 (1953).

Verf. untersucht das Randverhalten von Überlagerungsflächen. Im 1. Kap. werden Beziehungen aufgestellt zwischen den Randpunkten der Grundfläche, der Überlagerung und deren universeller Überlagerung; das 2. Kap. beschäftigt sich mit dem harmonischen Maß des erreichbaren Randes und der Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für gegebene Werte auf dem erreichbaren Rand; hiermit werden Untersuchungen von M. Ohtsuka fortgesetzt (dies. Zbl. 43, 300; 46, 308). Harmonische Minimalfunktionen im Sinne von R. S. Martin (dies. Zbl. 25, 333) werden zu Überlagerungseigenschaften in Beziehung gebracht (3. Kap.). Als Anwendung auf Überlagerungen der Ebene bringt das 4. Kap. das Ergebnis, daß eine Riemannsche Fläche, auf der jede beschränkte harmonische Funktion konstant ist, nicht notwendig Gross-Eigenschaft (für meromorphe Funktionen) zu besitzen braucht. — Durch subtile Beispiele wird die Schärfe der Sätze belegt.

H. Tietz.

Tietz, Horst: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. der Math. 4, 31—38 (1953).

Verf. betrachtet eine geschlossene Riemannsche Fläche \mathfrak{M} . Die analytische Kurve C berande die Gebiete G und G . Dabei sei G eine Umgebung des Punktes \mathfrak{d} . Jede auf $G + C$ eindeutige und reguläre Funktion $f(\mathfrak{z})$ wird dargestellt durch eine gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \mathfrak{G}_n(\mathfrak{z}),$$
 wobei die $\mathfrak{G}_n(\mathfrak{z})$ zu \mathfrak{d} gehörige ganz rationale Funktionen sind. Dieser

Satz wurde vom Verf. in seiner Arbeit (dies. Zbl. 46, 309) in etwas speziellerer Form bereits angegeben. Auf Grund weiterer Betrachtungen im Zusammenhang mit der Weierstraßschen Primfunktion und dem Laurentschen Satz, bezogen auf Differentiale und Funktionen auf \mathfrak{M} , geht Verf. zu der Darstellung des Mittag-Lefflerschen Satzes über und beweist die Existenz von zu \mathfrak{d} gehörigen ganzen rationalen Funktionen $d_n(\mathfrak{z})$, so daß jede auf \mathfrak{M} eindeutige Funktion $f(\mathfrak{z})$, die in den Singularitäten \mathfrak{z}_n mit dem Häufungspunkt \mathfrak{d} die Hauptteile $X_n(\mathfrak{z})$ besitzt, die Partialbruchzerlegung

$$f(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \{X_n(\mathfrak{z}) - d_n(\mathfrak{z})\}$$

zuläßt. $g(\mathfrak{z})$ ist eine bezüglich \mathfrak{d} ganze Funktion. Weiter ergibt sich der Weierstraßsche Produktsatz, der in übertragener Form besagt, daß jede ganze Funktion $g(\mathfrak{z})$ mit der Singularität \mathfrak{d} und

den Nullstellen ξ_n durch

$$g(\delta) = e^{Y(\delta) + 2\pi i \Gamma(\delta)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E(\delta, \xi_n) e^{-\delta \pi(\delta)}$$

dargestellt wird. Dabei sind die $d_n(\delta)$ geeignete ganze Funktionen bezüglich δ und $Y(\delta)$ stellt ein Abelsches Integral 2. Gattung dar mit dem einzigen Pol in δ . H. P. Künzi.

Yûjôbô, Zuiman: On pseudo-regular functions. Commentarii math. Univ. St. Pauli 1, 67—80 (1953).

Resultate aus einem früher erschienenen Artikel: „On pseudo-regular functions“ in Rigaku III, No. 2—4 (1949) [Japanisch] werden noch einmal zusammengestellt und mit zum Teil ausführlicheren Beweisen versehen. — Eine differenzierbare Funktion $w = f(z)$ heißt in einem Gebiet D pseudo-regulär, wenn sie in D der Bedingung $g_{11} \cdot g_{22} \leq 2K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}$ genügt. K heißt Parameter der pseudo-regulären Funktion. Haben alle Funktionen einer Familie denselben Parameter K , so nennt man sie gleichmäßig pseudo-regulär in D . (Eine pseudo-reguläre Funktion vermittelt eine quasikonforme Abbildung im Sinne von Ahlfors und Teichmüller.) Für so definierte pseudo-reguläre Funktionen beweist Verf. Analoga zum Ahlfors'schen Verzerrungssatz und zum Schwarz'schen Lemma. Als Hauptsatz für pseudo-reguläre Funktionen wird eine Erweiterung des Montelschen Theorems über normale Familien hergeleitet. Eine Funktion, die als Grenzwert einer Folge von gleichmäßig beschränkten pseudo-regulären Funktionen im Montelschen Sinne gebildet wird, heißt verallgemeinerte pseudo-reguläre Funktion. Verf. zeigt, daß derartige verallgemeinerte Funktionen vollständig differenzierbar sind und einen Verzerrungsquotienten (Dilatationsquotienten) $< \exp\{8\pi(K+1)K^2+1\}$ aufweisen. Weitere Verallgemeinerungen beziehen sich auf das Lindelöf'sche Prinzip sowie auf die Invarianz des Typus Riemannscher Flächen. H. P. Künzi.

Yûjôbô, Zuiman: On the quasi-conformal mapping from a simply-connected domain on another one. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 2, 1—8 (1953).

In Ergänzung zu seiner früheren Arbeit (vgl. vorsteh. Referat) beweist Verf., daß bei einer pseudo-regulären Funktion, durch welche ein einfach zusammenhängendes hyperbolisches Gebiet A einer z -Ebene auf ein ebensolches Gebiet D einer w -Ebene abgebildet wird, die Randelemente dieser Gebiete einander eindeutig zugeordnet werden. Mit Hilfe dieser Aussagen gelangtes Verf., für derartige pseudo-reguläre Funktionen eine Verallgemeinerung eines von Hardy-Littlewood herrührenden Theorems zu beweisen: Es sei $f(s) \{s = \sigma + it\}$ eine beschränkte pseudo-reguläre Funktion in einem Gebiet $D: \{a < \sigma < b; 0 < t < \infty\}$. $f(s)$ strebe gegen eine komplexe Zahl c für $s \rightarrow \infty$ längs einer Kurve C in D . Dann strebt $f(s)$ gleichmäßig gegen c , wenn $s \rightarrow \infty$ in $(a + \epsilon)\sigma_1 + \sigma < \sigma_2 + \epsilon$ (b). Ein entsprechender Satz folgt daraus für pseudo-reguläre Funktionen, definiert im Einheitskreis.

H. P. Künzi.

• **Bers, Lipman: Theory of pseudo-analytic functions.** New York: New York University, Institute for Mathematics and Mechanics, 1953. III, 187 p.

Gesamtdarstellung der namentlich vom Autor selbst seit 1943 entwickelten Theorie. Zwei komplexe Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ seien in einem Bereich D_0 der $(z = x + iy)$ -Ebene definiert und erfüllen dort die Bedingungen: $\Re\{FG\} = 0$ und $F_z, G_z, F_{\bar{z}}, G_{\bar{z}}$ existieren in D_0 und erfüllen eine Hölderbedingung. Zwei derartige Funktionen werden erzeugendes Paar genannt. Eine komplexe Funktion $w(z)$ heißt pseudo-analytisch, falls in einem Bereich $D \subseteq D_0$ die (F, G) -Ableitung

$$\dot{w}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - \lambda_0 F(z) - \mu_0 G(z)}{z - z_0}$$

existiert, wo die reellen Konstanten λ_0 und μ_0 definiert sind durch $w(z_0) = \lambda_0 F(z_0) + \mu_0 G(z_0)$ (für $F = 1, G = i$ erhält man die analytischen Funktionen). $w(z)$ ist Lösung der Differentialgleichung $w_z = a w + b \bar{w}$, wo a und b durch F und G bestimmte Funktionen sind. — Es kann nun die Funktionentheorie entwickelt werden, die zu ganz analogen Resultaten führt wie im klassischen Fall. Das Haupthilfsmittel ist das sog. Ähnlichkeitsprinzip, das besagt, daß jeder in D pseudo-analytischen Funktion $w(z)$ eine analytische Funktion $f(z)$ zugeordnet werden kann:

$$f(z) = e^{s(z)} w(z), \quad s(z) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{a(\xi) + b(\bar{\xi}) \{w(\xi)/w(\bar{\xi})\}}{\xi - z} d\xi d\bar{\xi}.$$

Dabei ist $s(z) = k$, und k ist nur von D und (F, G) abhängig. Der Zusammenhang mit den elliptischen Systemen von Differentialgleichungen wird hergestellt durch die pseudo-analytischen Funktionen zweiter Art $\omega(z) = \Phi + i\Psi$. $\omega(z)$ heißt pseudo-analytisch 2. Art, falls die Funktion

$w(z) = \Phi F + \Psi G$ pseudo-analytisch 1. Art ist. Φ und Ψ sind Lösungen eines elliptischen Systems von linearen Gleichungen erster Ordnung, und es wird gezeigt, daß jedes elliptische System durch eine Koordinatentransformation auf diese Form gebracht werden kann. Die durch $w(z)$ vermittelte Abbildung ist quasikonform. Differentiation und Integration der Funktionen 1. Art: Die (F, G) -Ableitung ist selbst wieder pseudo-analytisch mit einem anderen erzeugenden Paar (F_1, G_1) , deren Ableitung wieder usw. Umgekehrt heiße eine Funktion, deren Ableitung gleich $w(z)$ ist, ein (F, G) -Integral von $w(z)$. Die Frage, ob endliche erzeugende Ketten (F_s, G_s) ($s = 1, \dots, n$) existieren, die die Eigenschaft $F_n = F_1, G_n = G_1$ besitzen, ist offen. — Ist (F, G) ein in der ganzen z -Ebene definiertes erzeugendes Paar, so können die globalen, verallgemeinerten Potenzfunktionen $Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ als die zu den Potenzfunktionen $\alpha(z - z_0)^n$ ähnlichen Funktionen definiert werden. Liegt eine Kette (F_s, G_s) vor, so können die lokalen verallgemeinerten Potenzfunktionen definiert werden durch die Rekursionsformeln

$$Z_s^{(n+1)}(\alpha, z_0, z) = (n+1) \int_{z_0}^z Z_{s+1}^{(n)}(\alpha, z_0, z') d_{(F_s, G_s)} z'.$$

Diese beiden Definitionen stimmen für den Fall, daß beide Arten von Potenzfunktionen existieren, überein. Jede pseudo-analytische Funktion kann durch eine verallgemeinerte Potenzreihe nach den so definierten Funktionen dargestellt werden. In einem weiteren Abschnitt wird die Theorie der mehrdeutigen Funktionen entwickelt, so z. B. des verallgemeinerten Logarithmus als Integral der Potenzfunktion $Z^{(-1)}$, und von Funktionen mit algebraischen Singularitäten. *A. Kriszten.*

Bers, Lipman: Univalent solutions of linear elliptic systems. Commun. pure appl. Math. 6, 513—526 (1953).

In Anwendung der Theorie der pseudo-analytischen Funktionen und der quasikonformen Abbildung wird der Satz bewiesen: Die Koeffizienten A_{ij} des Systems von partiellen Differentialgleichungen: $\Phi_x = A_{11}(x, y) \Psi_x + A_{12}(x, y) \Psi_y$; $\Phi_y = A_{21}(x, y) \Psi_x + A_{22}(x, y) \Psi_y$ sind in einem Bereich Ω der $(z = x + iy)$ -Ebene definiert, besitzen stetige, einer Hölderschen Bedingung genügende, partielle Ableitungen und erfüllen weiter die Bedingungen der Elliptizität $A_{12} > 0$; $4A_{12}A_{21} + (A_{11} - A_{22})^2 < 0$. Dann existiert in Ω eine Lösung $w(z) = \Phi + i\Psi$ so, daß: (1) $\Phi_x \Psi_y - \Phi_y \Psi_x > 0$; (2) $w(z)$ einen Homöomorphismus von Ω erzeugt und (3) in einem vorgegebenen Punkt $z_0 \in \Omega$ die Normierungsbedingung $\Phi = \Psi = 0$, $\Phi_x = 1, \Phi_y = 0$ erfüllt ist. *A. Kriszten.*

Ozaki, Shigeo and Isao Onô: Analytic functions of several complex variables. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 262—270 (1953).

In der vorliegenden Arbeit werden Systeme $w(z)$ von n holomorphen Funktionen behandelt, die von ebenso vielen komplexen Variablen $z = (z_1, \dots, z_n)$ abhängen. Hierbei wird besonderer Wert darauf gelegt, alle Resultate durch Operationen mit komplexen Vektoren herzuleiten. Dementsprechend muß $w(z)$ als eine komplexe Vektorfunktion in einem Gebiet des Vektorraumes der n -reihigen komplexen Vektoren z aufgefaßt werden. Es gelingt den Verff., eine Potenz z^k bzw. $1/z^k$ von z , ebenso eine Ableitung $d^k w(z)/dz^k$ von $w(z)$ zu definieren. $z^k, 1/z^k$ stellen dabei ${}_n H_k$ -reihige Vektoren und $d^k w(z)/dz^k$ eine n -reihige und ${}_n H_k$ -spaltige Matrix dar [${}_n H_k$ bedeutet die Anzahl der n -tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_\nu \geq 0$ ganz, mit $\sum \alpha_\nu = k$]. Mit Hilfe dieser Definitionen werden mehrere bekannte Sätze über die Funktionen $w(z)$ hergeleitet (Cauchysche Integraldarstellung, Satz von Liouville, Taylor- und Laurententwicklung). Die Taylorsche Entwicklung besitzt formal in den z^k und $1/z^k$ die gleiche Form, wie die Potenzreihenentwicklung einer Variablen. Bei der Laurententwicklung scheinen die Glieder zu fehlen, in denen positive und negative Potenzen der z_1, \dots, z_n zugleich auftreten. *H. Grauert.*

Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi: Note on vector spaces. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 271—276 (1953).

Mit Hilfe von im ersten Teil dieser Note definierten Operationen mit komplexen Vektoren werden im zweiten Teil hinreichende Bedingungen für die Eineindeutigkeit einer holomorphen Abbildung eines Gebietes $r \leq |z| \leq R$ des Raumes C^n der n -reihigen komplexen Vektoren $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ in den C^n angegeben. Dabei ist $|z|^2 = \sum z_i \bar{z}_i$, der Norm von z . Es ist dem Ref. unverständlich, warum die Betrachtung die Ab-

bildung einer Hyperkugelschale und nicht die einer Vollkugel zum Gegenstande hat, da bekanntlich für den Fall $n \geq 2$ eine holomorphe Abbildung, die auf dem Rande einer Hyperkugel eineindeutig ist, auch in die ganze Hyperkugel fortgesetzt eineindeutig wird. Ferner scheint der Beweis der Hauptaussage inkorrekt zu sein.

H. Grauert.

Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi: Note on normed rings. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 277—282 (1953).

Die Verff. definieren zuerst den Begriff der Holomorphie in einem nicht notwendig kommutativen normierten Ring R ; sie geben dann eine hinreichende Bedingung für die Eineindeutigkeit einer holomorphen Abbildung eines konvexen Teilraumes $K \subset R$ in den Ring R an. Da der Raum aller n -reihigen quadratischen Matrizen aus komplexen Zahlen einen normierten Ring R bildet und die n -reihigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{in der Darstellung} \quad \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

als ein Teilraum von R gedeutet werden können, folgen aus diesem Resultat hinreichende Bedingungen für die Eineindeutigkeit einer holomorphen Abbildung eines konvexen Gebietes des Raumes C^n von n komplexen Variablen in den C^n . Dabei stellt Corollar 2 eine Verschärfung eines Satzes von S. Takahashi dar.

H. Grauert.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Koecher, Max: Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel. Arch. der Math. 4, 316—321 (1953).

Es sei τ eine komplexe Variable mit positivem Imaginarteil y , also $f(\tau; u, v) = u^2 \tau \bar{\tau} + u v (\tau + \bar{\tau}) + v^2$ eine positive quadratische Form in u, v . Wir setzen $\zeta(\tau, s) = \sum (f(\tau; m, n))^{-s} = \sum m^{-s} \tau + n^{-2s}$, wobei über alle Paare ganzer Zahlen $(m, n) \neq (0, 0)$ summiert wird. Die Kroneckersche Grenzformel, welche besagt, daß der Koeffizient $\lambda_0(\tau)$ in der Entwicklung $(y/\pi) \zeta(\tau, s) = (s-1)^{-1} \cdot \lambda_0(\tau) + \alpha_1(\tau)(s-1) + \cdots$ in bestimmter Weise durch die Diskriminante $\Delta(\tau)$ aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ausgedrückt werden kann, wird hier ohne Benutzung der Produktzerlegung von $\Gamma(\tau)$ abgeleitet, indem für $\lambda_0(\tau)$ kennzeichnende Eigenschaften angegeben werden, die sich im wesentlichen aus der Tatsache ergeben, daß $y \zeta(\tau, s)$ eine gegenüber den Modulsstitutionen $\tau \rightarrow L\tau$ invariante Lösung der Wellengleichung ist.

H. Maaß.

Wijngaarden, A. van: On the coefficients of the modular invariant $J(\tau)$. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 389—400 (1953).

Bildet man für $|q| < 1$ aus $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = q_{1/2, 1/2}$ und $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) = q_{5/2, 1/2}$ die Modulfunktionen $2q^{1/4} q_0 q_1^2 = \theta_2$, $q_0 q_2^2 = \theta_3$ und $q_0 q_3^2 = \theta_4$, so folgt $2^4 \theta_1^{-2} (q^4)^{-1} \theta_2^{-2} (q)^{-1} \theta_3^{-2} (iq)^{-1} = 0$. Setzt man für die Modularinvariante $q^{-2} q_0^{-2} = j(\tau)$ die steigende Potenzreihe an: $j(\tau) = \sum_{h=-1}^{\infty} c_h q^{2h}$, so folgt für die Beiwerte $c_{-1} = 1$, $c_0 = 744$, $c_1 = 10^6, \dots, c_{100} = 10^{52}$. Zur Bestimmung der Folge c_h für $-2 \leq h \leq 101$ wird nach van der Pol (dies. Zbl. 42, 273) vermöge $\theta_2^{4k} = (-\theta_3^4)^k \cdot \theta_4^{1-k} = M_k$ die Darstellung $j(\tau) = 2^7 M_2 M_{-2}$ benutzt. Allgemeiner besteht die rückläufige Verknüpfung 2. Grades $M_{L+3} = \frac{1}{2} M_2 M_{L+1} + \frac{1}{3} M_3 M_L$ und eine Darstellung von $M_L M_{L-2}$ als Polynom in $j^{-1/2}$ für $0 \leq L$. Die von Ramanujan und Lehner (Lehner, dies. Zbl. 31, 395; 32, 153) gegebenen Kon-

gruenzen erleichtern die rechnerische Bestimmung der ganzzahligen Beiwerte c_n erheblich, und es zeigen sich seltsame Teilbarkeiten wie etwa $c_{128} \equiv 2^{29} \pmod{2^{30}}$.

W. Maier.

Sabbioni, C.: Sopra un esempio di funzione quasi periodica. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 301—303 (1953).

In una Memoria di S. Cinquini (questo Zbl. 41, 68) è indicato un esempio di una funzione, la quale è: 1° quasi-periodica (secondo Bohr); 2° assolutamente continua sopra ogni intervallo finito; ma la cui derivata del primo ordine non risulta quasi-periodica secondo Stepanoff, perchè non è uniformemente integrabile. Nella presente Nota viene dato un esempio di funzione soddisfacente alle condizioni 1°, 2°, e la cui derivata del primo ordine, per quanto uniformemente integrabile, non è quasi-periodica secondo Stepanoff.

S. Cinquini.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzgleichungen:

Mazzarella, Franco: Condizioni di integrabilità di un differenziale binomio mediante le trascendenti ellittiche. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 199—201 (1953).

Es wird gezeigt, wann ein nicht elementar integrierbarer binomischer Integrand mit Hilfe elliptischer Integrale integriert werden kann. W. Meyer zur Capellen.

Walmsley, Charles: Null trigonometric series in differential equations. Canadian J. Math. 5, 356—543 (1953).

In order to solve an ordinary linear differential equation with constant coefficients $F(D)y = f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$, where F is a polynomial, a method is proposed to calculate the Fourier coefficients of y . It is assumed that the Fourier series of $f(x)$ and the derived series for the derivatives of y are uniformly Cesàro-summable of some order (except perhaps near a finite number of points), and the uniqueness theory for such trigonometrical series is then applied. It seems to the reviewer that the method is of little practical interest and that, anyhow, a process of integrating the Fourier series of the highest derivative of y would be a much easier device.

W. W. Rogosinski.

Germejer, Ju. B. und D. S. Irger: Über angenäherte Darstellungen der Lösungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 961—964 (1953) [Russisch].

$p(t)$ und $q(t)$ seien für $a \leq t \leq b$ stetige komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t . $\exp \int_a^t \omega_1(s) ds$ und $\exp \int_a^t \omega_2(s) ds$ heißen angenäherte Darstellungen der Lösungen von $\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0$ im Intervall $a \leq t \leq b$, wenn in dem Intervall stetige Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ existieren, die für $t \rightarrow b$ endliche, nicht gleichzeitig verschwindende Grenzwerte besitzen, so daß

$$x_1(t) = y_1(t) \exp \int_a^t \omega_1(s) ds \quad \text{und} \quad x_2(t) = y_2(t) \exp \int_a^t \omega(s) ds$$

im Intervall der Differentialgleichung genügen. Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß zwei Funktionen $\omega_1(s)$ und $\omega_2(s)$ angenäherte Darstellungen der gewünschten Art liefern.

Werner Schulz.

Popóv, B. S.: Sur une équation différentielle. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 179—182 (1953).

L'A. prend comme point de départ l'équation linéaire du second ordre intégrable par des quadratures: $(f y' + g y)' + h(f y' + g y) = 0$, f, g et h étant des fonctions quelconques de la variable indépendante x , $f \geq 0$. Il en résulte, moyennant la comparaison, que l'équation $y'' + (A e^x + b) y' + (A e^{2x} + B x + C) y = 0$

[le dernier facteur y étant omis dans le texte par faute typographique] est intégrable sous la condition suivante: $ab = 2B$; $a = (a^2 - 4A)^{1/2} [2n + 1 - (b^2 - 4c)^{1/2}]$, n étant un nombre entier positif quelconque. L'équation plus générale contient, au lieu de e^x, e^{2x} , les expressions e^{kx}, e^{2kx} , k étant quelconque. La condition d'intégrabilité obtenue englobe les conditions d'intégrabilité d'autres AA. cités dans le *Traité* de M. E. Kamke. N. Saltykow.

Schäffe, Friedrich Wilhelm: Einige Stabilitätskriterien. Z. angew. Math. Mech. 33, 283—285 (1933).

The Hill differential equation is investigated: (1) $y'' + f(x)y = 0$, where $f(x)$ is continuous, periodic of period π and non-constant in $(-\infty, +\infty)$. I. If

$$f(x) \geq a^2, \quad n^2 \leq a^2 < (n+1)^2, \quad \pi^{-1} \int_0^\pi f(x) dx < a^2 - 2\pi^{-1}(n+1)a \operatorname{ctg} 2^{-1}a\pi(n+1)^{-1},$$

for some $n = 0, 1, 2, \dots$, then all solutions of (1) are bounded. II. If $f(x) \leq a^2$,

$$n^2 < a^2 \leq (n+1)^2, \quad \pi^{-1} \int_0^\pi f(x) dx > na, \quad \text{for some } n = 0, 1, 2, \dots, \text{ then all}$$

solutions of (1) are bounded. Statement I for $a = 0$ implies a condition given by Lyapounov; statements I for $a = 1, 2, 3, 4, 5$, and statement II improve previous remarks by R. S. Gusarova (this Zbl. 39, 316); statements I and II contain also a more restrictive condition given by S. Wallach (this Zbl. 31, 397). L. Cesari.

Gagliardo, Emilio: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$ con $A(x) \geq 0$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 177—185 (1953).

Es werden einige Theoreme bezüglich des asymptotischen Verhaltens der Integrale der Differentialgleichung (1) $y'' + A(x)y = 0$ aufgestellt. In (1) wird $A(x)$ stetig und nicht negativ für $0 < x_0 < x < +\infty$ vorausgesetzt. Wenn $\int_{x_0}^{+\infty} A(x) dx = +\infty$ ist oder wenn, für $A(x) \geq \frac{1}{4x^2}$, $\int_{x_0}^{+\infty} x \left[A(x) - \frac{1}{4x^2} \right] dx = +\infty$

ist, so sind die Integrale von (1) alle oszillierend; wenn hingegen $\int_{x_0}^{+\infty} A(x) dx < +\infty$

ist und wenn $y(x)$ ein oszillierendes Integral ist, so konvergiert die Reihe $\sum (a_{n+1} - a_n)^{-1}$, wobei mit $\{a_n\}$ die steigende Folge der Nullstellen von $y(x)$ bezeichnet wird. Wenn dann $y(x)$ ein nicht oszillierendes und definitiv positives Integral ist, existiert immer der $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)/x$, und es können sich die folgenden drei Fälle einstellen: A) $y(x) \rightarrow \infty$,

$y(x)/x \rightarrow c \geq 0$, und die Kurve $y = y(x)$ besitzt keine Asymptoten; B) $y(x) \rightarrow c > 0$, $y(x)/x \rightarrow 0$, $y(x) = c - \varepsilon(x)$; C) $y(x) \rightarrow \infty$, $y(x)/x \rightarrow c_0 > 0$, $y(x) = c_0 x + c_1 - \varepsilon(x)$, wobei $\varepsilon(x)$ monoton und verschwindend ist; der Fall C) kann nicht ein-

treten, wenn $\int_{x_0}^{+\infty} x^2 A(x) dx = +\infty$ ist.

D. Greco.

Taam, Choy-tak: On the complex zeros of functions of Sturm-Liouville type. Pacific J. Math. 3, 837—843 (1953).

Soit $n(r)$ le nombre des zéros contenus dans $|z| \leq r$ ($r \leq R$) d'une solution $W(z)$ de l'équation $W'' + Q(z)W = 0$, $Q(z)$ étant holomorphe pour $|z| \leq R$. Le premier théorème énonce que, si $W(0) \neq 0$, on a l'inégalité

$$n(r) \leq \frac{1}{\log(Rr^{-1})} \left[\log \left(1 + R \frac{|W'(0)|}{|W(0)|} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R-t) |Q(te^{i\theta})| dt d\theta \right].$$

Le deuxième théorème est une conséquence immédiate de la proposition: Si l'on a $|Q(z)| \leq M$ sur un segment de longueur $< \pi\sqrt{M}$, une solution continue sur ce segment et s'annulant à ses extrémités est identiquement nulle. M. Hukuhara.

Cooke, K. L.: The asymptotic behavior of the solution of linear and nonlinear differential-difference equations. Trans. Amer. math. Soc. 75, 80—105 (1953).

L'A. étudie l'équation

$$du(t+1)/dt = a(t)u(t) + b(t)u(t+1) + D(u(t), u(t+1)),$$

où $D(u(t), u(t+1)) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(t)u(t)^i u(t+1)^j$; $a(t)$, $b(t)$ et $b_{ij}(t)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle t et on suppose les développements asymptotiques $a(t) \sim a_0 + a_1/t + \dots$, $b(t) \sim b_0 + b_1/t + \dots$ pour $t \rightarrow \infty$. On cherche d'abord, à l'aide de la transformation de Laplace, la solution de l'équation linéaire

$$du(t+1)/dt = (a_0 + a_1/t)u(t) + (b_0 + b_1/t)u(t+1) + w(t).$$

Puis on applique, en écrivant l'équation proposée sous cette forme, la méthode des approximations successives. L'existence et l'unicité de la solution satisfaisant aux conditions suivantes sont établies: (i) $u(t) = O(t^{\operatorname{Re}(\delta)} e^{\operatorname{Re}(s)t})$ pour $t \rightarrow \infty$, (ii) $u(t) = g(t)$ (fonction donnée) pour $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$, où δ et s sont des nombres ne dépendant que de a_0, a_1, b_0, b_1 .

M. Hukuhara.

Bellin, Albert I.: Non-autonomous systems. Advances Appl. Mech. 3, 295—324 (1953).

Die Differentialgleichung $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$, deren rechte Seite F explizit von t abhängt, wird als „nichtautonom“ bezeichnet im Gegensatz zur „autonomen“ Gleichung $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Die klassischen Arbeiten von Mathieu, Hill, van der Pol und Duffing werden nur zitiert. Ziel des vorliegenden Artikels ist es, eine Übersicht über die neueren Untersuchungen zu geben. Verf. strebt dabei nicht Vollständigkeit an, vielmehr will er an repräsentativen Beispielen den gegenwärtigen Stand der Forschung erläutern. In der Hauptsache handelt es sich um die Frage der Existenz und Stabilität periodischer Lösungen der Differentialgleichung für eine nichtlineare, in t periodische rechte Seite F . Die wesentlichen Methoden sind die Störungsrechnung, Entwicklungen nach kleinen Parametern für schwach-nichtlineare Systeme und topologische Beweise zur Ermittlung von Eigenschaften der Lösungen im großen. Für die Anwendungen im Ingenieurwesen sind die topologischen Resultate naturgemäß von besonderer Wichtigkeit. Die einzelnen Abschnitte der Arbeit betreffen die „topologische Transformation“, die Stabilität periodischer Lösungen, die Indizes von Fixpunkten, die Systeme der Levinsonschen Klasse D und schließlich insbesondere die Gleichungen

$\ddot{x} + f(x) = Fg(\sin \omega t)$, $\ddot{x} + a^2 x = \Phi(x, \dot{x}, k, \varepsilon, t)$ und $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x(1 + \alpha x) = 3v \cos 2t$. Überwiegend werden allgemeine Ergebnisse entwickelt, welche nicht an die einschränkende Voraussetzung schwacher Nichtlinearität gebunden sind.

R. Sauer.

Sestini, Giorgio: Criteri di stabilità per il moto di un punto soggetto a forza elastica, a resistenza e ad una forza disturbatrice. Atti. IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 559—564 (1953).

L'A. dà due criteri di stabilità per l'equazioni differenziali del tipo (1) $y'' + \omega y + \varphi(y') = f(t)$, ove ω è una costante positiva e $y'' = d^2 y/dt^2$, $y' = dy/dt$. Se è $+\infty \int_{t_0}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$ e si ha $\xi \varphi(\xi) \geq 0$ per ogni valore di ξ , gli integrali della (1) in (t_0, ∞) sono tutti stabili. Se è $\varphi(\xi) = \varepsilon \xi + R(\xi)$, con ε costante positiva ed $R(\xi)$ funzione uniformemente lipschitziana d'ordine $\alpha < 1$, ed esiste un integrale della (1) stabile in (t_0, ∞) , tutti gli integrali della (1) sono stabili in tale intervallo.

E. De Giorgi.

Savinov, G. V.: Eigenschwingungssysteme mit stark ausgeprägter Nicht-Linearität. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 6 (Ser. fiz.-math. estestv. Nauk Nr. 4) 77—83 (1953) [Russisch].

L'A. considère l'équation $x'' + g(x) = \mu \cdot f(x, x', \mu)$ dont il suppose qu'elle admet une intégrale périodique qu'il cherche à déterminer formellement par la méthode de perturbation, en supposant μ assez petit. Il obtient ainsi des expressions de la fréquence, de l'amplitude, à partir des expressions correspondantes pour l'intégrale périodique $x_0(t)$ de l'équation $x'' + g(x) = 0$. Exemple de la détermination de ces quantités dans le cas où $g = (1 + a x^2)x$, $f = (1 - b x^2)x'$.

Ch. Blanc.

Staševskaja, V. V.: Über Umkehrprobleme der Spektralanalyse für eine Klasse von Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 409—411 (1953) [Russisch].

Soit un opérateur L : (*) $L[y] = y'' - [q(x) + n(n-1)x^2]y$, n entier positif, $q(x)$ réelle et telle que

$$(**) \int_0^a |x \cdot q(x)|^{2+\varepsilon} dx < \infty, \text{ pour tout } a > 0, \varepsilon > 0;$$

l'A. montre que si pour deux fonctions q_1 et q_2 satisfaisant à (**), l'opérateur (*) a la même fonction spectrale, alors $q_1 = q_2$. Il établit ensuite un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'une fonction donnée soit fonction spectrale d'un opérateur (*).

Ch. Blanc.

Hamburger, Hans Ludwig: Remarks on self-adjoint differential operators. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 446—463 (1953).

Während die Lagrangesche Definition eines (formal) selbstadjungierten Differentialoperators Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für die Koeffizienten benötigt, bezeichnet Verf. umfassender einen Differentialoperator $L(f) = \sum_{\mu=0}^m p_{\mu}(x) f^{(\mu)}(x)$ in $a \leq x \leq b$ als SL-Operator (Initialen

von Sturm und Liouville), falls nur $p_{\mu}(x) \in \mathfrak{L}_2$ und $\int_a^b (\bar{q} L(f) - f \overline{L(g)}) dx = 0$ für alle $g(x) \in \mathfrak{C}_m [g^{(\mu)}(x) (0 \leq \mu \leq m-1) \text{ in } a \leq x \leq b \text{ totalstetig, } g^{(m)}(x) \in \mathfrak{L}_2]$ und alle $f(x) \in \mathfrak{D} [f(x) \in \mathfrak{C}_m \text{ und } f^{(\mu)}(a) = f^{(\mu)}(b) = 0 (0 \leq \mu \leq m-1)]$. Hauptergebnis ist der Satz: Für die Koeffizienten von $L(f)$ gelte $p_{\mu}(x) \in \mathfrak{L}_2$ ($0 \leq \mu \leq m$) und $p_{\mu}(x) \in \mathfrak{L}_2$ ($0 \leq \mu \leq m$); dann ist $L(f)$ genau dann SL-Operator, falls es zu jedem Fundamentalsystem $\{u_{\mu}(x)\} (1 \leq \mu \leq m)$ von Lösungen von $L(u) = 0$ eine konstante schief-hermitesche Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ mit $\det A \neq 0$ gibt, derart daß in $a \leq x \leq b$

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu} \overline{u_{\nu}(x)} u_{\mu}^{(k)}(x) = 0 \quad (0 \leq k \leq m-2), \quad \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu} \overline{u_{\nu}(x)} u_{\mu}^{(m-1)}(x) = \frac{1}{p_m(x)}.$$

Anschließend werden entsprechend speziell SL-Operatoren gerader oder ungerader Ordnung mit reellem Fundamentalsystem untersucht. Den Schluß bildet die Charakterisierung aller Randbedingungen, die einen SL-Operator zu einem (im Sinne der Spektralthorie) selbstadjungierten Operator machen, für den 0 nicht Eigenwert ist.

F. W. Schäfke.

Najmark, M. A.: Untersuchung des Spektrums und Entwicklung nach Eigenfunktionen singulärer nicht-selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4, 174—175 (1953) [Russisch].

Najmark, M. A.: Über die Entwicklung nach den Eigenfunktionen nicht-selbstadjungierter singulärer Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 213—216 (1953) [Russisch].

In Fortsetzung seiner Arbeit über das Spektrum nichtselbstadjungierter Differentialoperatoren 2. Ordnung (dies. Zbl. 48, 32.) und mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise untersucht Verf. weiter die Eigenschaften des Differentialoperators $L_{\theta} y = y'' + p(x)y$, $0 \leq x < \infty$, bei der Randbedingung $y'(0) - \theta y(0) = 0$, wobei $p(x)$ und θ im allgemeinen komplexwertig vorgegeben sind und zusätzlich gefordert wird, daß $x^2 p(x)$ im Intervall $(0, \infty)$ summierbar ist, die Eigenwerte λ_k , $k = 1, \dots, r$, des Operators L_{θ} einfache Pole seiner Resolvente mit den zugehörigen Eigenfunktionen $y_k(x)$ sind und die Funktionen $A(s)$ und $\tilde{A}(s)$ für $s \neq 0$ nicht verschwinden. Dabei bedeuten: $A(s) = y'_1(0, s) - \theta y_1(0, s)$, $\operatorname{Im} s \geq 0$; $\tilde{A}(s) = \tilde{y}'_1(0, s) - \theta \tilde{y}_1(0, s)$, $\operatorname{Im} s \leq 0$, mit den in bezug auf s in den entsprechenden Halbebenen stetigen und dort (bis auf den Rand) holomorphen Lösungen $y_1(x, s)$ und $\tilde{y}_1(x, s)$ der Differentialgleichung $L_{\theta} y = s^2 y$. Dann ist $y(x, s) = \tilde{A}(s) y_1(x, s) - A(s) \tilde{y}_1(x, s)$, $s \neq 0$ eine Lösung, die der gegebenen Randbedingung genügt. Bewiesen wird unter diesen Voraussetzungen eine Bilinearentwicklung für den Kern $K(x, \xi, \lambda)$ der Resolvente $(L - \lambda \cdot 1)^{-1}$ des Operators L_{θ} , gültig für jeden Wert λ , der nicht zum Spektrum von L_{θ} gehört:

$$K(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^r \frac{y_k(x) y_k(\xi)}{(\lambda_k - \lambda) \int_0^{\infty} [y_k(x)]^2 dx} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{y(x, s) y(\xi, s)}{(s^2 - \lambda) A(s) \tilde{A}(s)} ds,$$

wobei das Integral absolut und gleichmäßig in $0 \leq x, \xi < \infty$ konvergiert. Der Beweis wird nach der von Levitan für selbstadjungierte Differentialoperatoren eingeführten Methode (vgl. dies. Zbl. 41, 57) geführt, wonach x zunächst auf ein endliches Intervall $\langle 0, b \rangle$ beschränkt, der zugehörige Kern $K_b(x, \xi, \lambda)$ bestimmt und dann der Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ vorgenommen wird, was aber im vorliegenden Fall eines nicht-selbstadjungierten Operators zusätzlicher Hilfsüberlegungen bedarf, um die Ausführbarkeit zu gewährleisten. — Aus dieser Kernentwicklung folgt dann in bekannter Weise die Formel für die Entwicklung einer samt $-g'' + pg$ im Intervall $(0, \infty)$ summierbaren, der Randbedingung genügenden, sonst willkürlichen Funktion $g(x)$, von der aber hier noch zusätzlich verlangt wird, daß ihre Ableitung $g'(x)$ in jedem endlichen Intervall $\langle 0, a \rangle$, $a > 0$, absolut stetig ist:

$$g(x) = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k y_k(x)}{\int_0^\infty [y_k(x)]^2 dx} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(s) y(x, s)}{A(s) \bar{A}(s)} ds$$

mit $\alpha_k = \int_0^\infty g(x) y_k(x) dx$, $\alpha(s) = \int_0^\infty g(x) y(x, s) ds$. Das Integral ist wie vorhin gleichmäßig konvergent. Ferner ergibt sich ebenso in bekannter Weise das Analogon zur Parsevalschen Gleichung für die Entwicklung des Produktintegrals zweier willkürlicher Funktionen.

E. Svenson.

• **Lappo-Danilevsky, I. A.:** *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. I—III (en un volume). Avant propos par A. N. Krilov et I. M. Vinogradov, 1933.* New York: Chelsea Publishing Company 1953. XIV + 253 + 208 + 204 p. \$ 10,—.

Trattasi di una riproduzione fotografica, in un sol volume, dei volumi I, II, III stampati dall'Istituto Matematico Steklov di Mosca rispettivamente nel 1934, 1935, 1936. Un'introduzione di A. N. Krilov e I. M. Vinogradov ricorda che J. A. Lappo-Danilevsky creò nella sua vita assai più di quanto avesse potuto pubblicare, e gli editori dei tre volumi N. Kotchine e V. Smirnov nelle introduzioni ai singoli volumi precisano quanto fu ricavato dalle pubblicazioni di I. A. Lappo-Danilevsky, dai suoi corsi e dai suoi manoscritti inediti. — I volumi sono dedicati allo studio dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti analitici e precisamente al problema di Poincaré della caratterizzazione analitica delle soluzioni e al problema inverso di Riemann. La teoria delle matrici, raffinata in molti punti dall'A., permette di semplificare e di approfondire notevolmente la classica teoria di Fuchs-Riemann. La materia è suddivisa in 13 articoli e in un capitolo di „varia“. I risultati essenziali trovansi riassunti con chiarezza e precisione in tre recensioni di S. Janczewski apparse in questa rivista (cfr. questo Zbl. 9, 350; 11, 349; 17, 209). *G. Sansone.*

Burdina, V. I.: *Über die Beschränktheit der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 603–606 (1953) [Russisch].

Es wird das System von Differentialgleichungen (1) $u' = p_{11}(t)u + p_{12}(t)v$, $v' = p_{21}(t)u + p_{22}(t)v$ betrachtet, wo $p_{ij}(t)$ periodische Funktionen mit der Periode ω sind. Die Matrix der Koeffizienten ist durch gewisse Parameter λ, β, k charakterisiert (λ charakteristischer Exponent, k eine ganze Zahl). Wenn mit $P_{\lambda, \beta, k}$ die Menge der Matrizen mit den gleichen Parametern λ, β, k bezeichnet wird, so gilt der folgende Satz:

$$\min_{P_{\lambda, \beta, k}} \int_0^\omega h_{\max}(\tau) d\tau = k\pi + \arccos \frac{1 + \operatorname{ch} \lambda \omega \cos \beta}{\operatorname{ch} \lambda \omega + \cos \beta},$$

$$\max_{P_{\lambda, \beta, k}} \int_0^\omega h_{\min}(\tau) d\tau = k\pi - \arccos \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda \omega \cos \beta}{\operatorname{ch} \lambda \omega - \cos \beta},$$

wo h_{\max} und h_{\min} der größte und der kleinste Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$ ist. Daraus ergibt sich, daß ein vom Verf. früher aufgestelltes Kriterium (dies. Zbl. 50, 315) für die Beschränktheit der Lösungen von (1) genau ist. *J. Szarski.*

Conte, S. D. and W. C. Sangren: An asymptotic solution for a pair of first order equations. Proc. Amer. math. Soc. 4, 696—702 (1953).

Verff. fragen nach dem asymptotischen Verhalten der Lösungen des Systems

$$(1) \quad du/dx - (\lambda a(x) + b(x))v = 0, \quad dv/dx + (\lambda c(x) + d(x))u = 0$$

für große λ . Es seien $b, d \in C''$ reell, $a, c \in C'''$ reell, positiv und λ komplex. Es wird für eine vorgebene Anfangsbedingung eine eindeutige asymptotische Entwicklung bis auf $O(1/\lambda)$ angegeben und bewiesen. — Aus diesem Satz folgern Verff. (ohne Beweis): Das System (1) unter den Sturmschen Randbedingungen $\lambda_0 u(0) + \beta_0 v(0) = 0$, $\lambda_1 u(1) + \beta_1 v(1) = 0$ bei $|\lambda_0| + |\beta_0| = 0$, $|\lambda_1| + |\beta_1| = 0$ hat unendlich viele reelle diskrete Eigenwerte, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen. Zu jedem Eigenwert λ_n gibt es ein eindeutiges Lösungspaar (u_n, v_n) . Es gilt folgende Orthogonalitäts-

relation: $\int_0^1 (c u_n u_m + a v_n v_m) dx = \delta_{nm}$. Für $f_1, f_2 \in C'''$ gilt gleichmäßig:

$$f_{1,2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{u_n}{v_n} \quad \text{mit} \quad c_n = \int_0^1 (c f_1 u + a f_2 v) dx. \quad W. Haacke.$$

Conti, Roberto: Su una classe generale di problemi ai limiti non lineari per i sistemi di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 181—191 (1953).

L'A. generalizza un risultato del censore relativo al problema di determinare una curva integrale: $x = x$; $y = y(x)$, $z = z(x)$ del sistema: $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ che si appoggi a due curve γ_1 e γ_2 contenute nei piani: $x = a$, $x = b$ (questo Zbl. 29, 261). L'A. generalizza il precedente risultato sotto due aspetti: uno è quello di non richiedere che γ_2 sia contenuta nel piano $x = b$, l'altro è quello di considerare il sistema sotto la forma: $y' = F(x, y, z)$, $z' = \varphi_1(x, y, z)$; $z' = \varphi_2(x, y, z)$ ove le funzioni F, φ_1, φ_2 sono definite per $x \geq a$, $|y| < +\infty$, $|z| < +\infty$, soddisfanno alle condizioni di Carathéodory e inoltre: $p(x) \leq F \leq q(x)$, $\varphi_1 \leq \varphi_2(x)$; $s_1(x) \leq q_2 \leq s_2(x)$ con $p(x), q(x), r_1(x), s_2(x), s_1(x)$ sommabili — essendo le prime quattro non negative—. Ulteriori ipotesi sono formulate su γ_1 e γ_2 , ma per queste si rimanda al testo. In questa formulazione del problema rientrano diversi problemi ai limiti fra i quali quello consistente nel ricercare una soluzione dell'equazione $y'' = g(x, y, y')$ che passa per un punto e che giunga ad una curva assegnata del piano (x, y) con una direzione assegnata. Questo risultato si collega allo studio delle condizioni di trasversalità dei problemi di calcolo delle variazioni con un estremo variabile su una curva.

G. Stampacchia.

Conti, Roberto: I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie: Teoremi di esistenza. Ann. Mat. pura appl. IV. Ser. 35, 155—182 (1953).

L'A. studia alcuni problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari. L'impostazione molto generale gli permette di considerare oltre al problema di Nicoletti per i sistemi anche i problemi ai limiti per le equazioni di ordine superiore e per quelle dipendenti da parametri. Si considera il sistema di equazioni differenziali:

$y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k) y_{i+1} = q_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k)$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $y_k' = q_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k)$ ove le F_i e le q_i soddisfanno alle ipotesi di Carathéodory per $x \in [a, b]$, $y_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Le condizioni ai limiti (L) consistono nel prescrivere a y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) r_i valori in altrettanti punti ($r_1 + r_2 + \dots + r_k = k$). L'A. trova una condizione sufficiente perché il problema precedente abbia almeno una soluzione. La condizione è che il determinante di una opportuna matrice associata alle condizioni ai limiti (L) secondo le funzioni F_i sia lontano da zero per tutti i valori delle y_i . Egli esamina questa condizione nei casi particolari relativi alle equazioni di ordine superiore, ai sistemi di equazioni di ordine superiore e alle equazioni dipendenti da parametri. Si considera infine anche un'estensione al caso che le funzioni q_i possano tendere all'infinito con le y_i .

G. Stampacchia.

Haas, Felix: On the global behavior of differential equations on two-dimensional manifolds. Proc. Amer. math. Soc. 4, 630—636 (1953).

L'étude faite concerne le comportement global des caractéristiques des équations différentielles sur une variété close orientable M à deux dimensions réelles; C^+ est une semicaractéristique poursuivie dans le sens positif, C l'ensemble des points limites de C^+ [p est point limite de C^+ si dans tout voisinage $u(p)$ de p et pour tout $q \in C^+$, il existe $r \in C^+$, postérieur à q , avec $r \in U(p)$]; V est le champ des vecteurs tangents à M et définissant l'équation différentielle sur M . L'A. établit le résultat suivant qui étend notablement des résultats de A. Denjoy et de C. Siegel: Si

V satisfait à la condition de Lipschitz et a au plus un ensemble dénombrable de points singuliers, et si pour une C^+ , l'ensemble \bar{C} des points limites de C^+ ne contient pas de point singulier de V , alors, ou bien M est un tore et V n'a aucun point singulier, ou bien \bar{C} n'est dense sur aucun ensemble ouvert de M . P. Lelong.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie :

● Saltykow, N.: Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue. Méthodes fondamentales d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Belgrade: Naučna Knjiga 1953. 163 p.; dinars 173 [en serbe].

Ces leçons professées à Belgrade sont adaptées à l'étude des méthodes d'intégration des équations citées en suivant l'ordre historique et intuitif du développement de leur théorie. Débutant par les définitions et par les méthodes de formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre, l'A. cite les problèmes d'équivalence des surfaces et ceux de leurs trajectoires. Euler et Lagrange les avaient approfondi abordant la création de la théorie des équations étudiées, en nous léguaient leurs Oeuvres „Institutiones Calculi Integralis“, „Théorie des Fonctions analytiques“ et „Le Calcul des Fonctions“. Le second chapitre du livre traite des méthodes immédiates d'intégration, en comblant la lacune fréquente des quelques Traités, en comparaison avec ceux sur les équations différentielles ordinaires. Euler et Lagrange avaient inauguré ces méthodes dans leurs Oeuvres magistrales. Partant de la notion de l'intégrale générale introduite par L. Euler, l'A. expose l'essence des recherches de cet illustre géomètre. On passe de suite à la théorie des intégrales de différents types que Lagrange obtient de l'intégrale complète. Les importantes recherches de Jacobi perfectionnent cette théorie, en démontrant que toute solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans un certain domaine de la variation des variables, résulte toujours d'une intégrale complète, quel qu'elle soit, au moyen de la variation des constantes, qui y figurent. Cette méthode est appliquée à la formation des intégrales de Cauchy dans les différents cas qui se présentent. En suite est exposée la première méthode d'intégration de Lagrange de l'année 1772, dont il s'était servi pour grouper, en 11 types, toutes les équations que L. Euler avait intégré dans ses „Institutiones“. La question d'existence des intégrales des équations étudiées est traitée au chapitre suivant. L'avantage de la démonstration de l'A. se manifeste par le fait que l'existence de l'intégrale de Cauchy est établie dans tout le domaine de l'holomorphie des équations étudiées. On est, donc, à l'abri des critiques de M. J. Hadamard concernant la démonstration de E. Goursat qui est ordinairement exposée dans les Traités d'Analyse Mathématique. Dans un chapitre spécial est étudié le problème d'intégration des équations aux différentielles totales à trois et à un nombre quelconque de variables. Ensuite, vient la théorie des équations linéaires dans les chapitres cinq et six. Les propriétés de leurs solutions, principales, générales, singulières et celles de Cauchy, sont soigneusement étudiées dans le cas d'une équation ainsi que pour les systèmes d'équations. Leur réduction à l'intégration d'équations différentielles ordinaires, soit à celles aux différentielles totales étant donnée, on étudie leurs méthodes d'intégration. Le septième chapitre expose la méthode de Lagrange et Charpit, insistant tout particulièrement sur le cas des trois intégrales connues des caractéristiques. Le problème d'intégration des équations à un nombre quelconque de variables occupe le huitième chapitre, où sont exposées les recherches de Jacobi. Un chapitre spécial est dédié aux équations différentielles ordinaires de la forme canonique, dont la théorie est exposée sans introduire le calcul des variations. On s'affranchit de cette manière des limitations auxquelles conduit ce Calcul. D'autre part, l'avantage se manifeste pour présenter la théorie classique des dites équations par une voie algébrique élémentaire, ainsi que les théorèmes classiques de Jacobi pour les équations de la forme générale. Les deux derniers chapitres étudient l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme générale non linéaire, ainsi que la théorie des caractéristiques. L'exposition de cette dernière est exempte des inconvénients qui s'introduisent grâce aux éliminations qui s'imposent pour la formation des intégrales complètes, en partant de l'intégrale générale des caractéristiques. On y réussit introduisant les fonctions dites des caractéristiques. La théorie de ces dernières garantit la formation de l'intégrale complète requise à un nombre nécessaire de constantes arbitraires distinctes. Chaque chapitre est accompagné d'un recueil suffisant d'exemples et d'exercices. Grâce aux méthodes d'investigation de l'A. il a la chance d'exposer sur un nombre restreint de pages le riche contenu de ces leçons. L'A. annonce l'apparition d'un second fascicule de son cours consacré à une étude plus pénétrante de la théorie des équations étudiées. Il y serait question des intégrales de S. Lie, de la théorie généralisée des caractéristiques des systèmes, des groupes fonctionnels d'intégrales, des éléments intégrables et des invariants différentiels, constituant des développements modernes de la théorie des équations aux dérivées partielles. C. Orloff.

Block, H. D.: A note on contact transformations. J. Math. Physics 32, 207 – 208 (1953).

Sei $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ ein Punkt des $2n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes E . Unter einer Berührungstransformation wird eine eindeutige Abbildung $\bar{q}_i = Q_i(q, p)$, $\bar{p}_i = P_i(q, p)$ ($i = 1, \dots, n$) eines offenen $E' \subset E$ auf ein offenes $E'' \subset E$ verstanden, zu der es eine Funktion $F(p, q)$ gibt, so daß $\sum_{i=1}^n P_i dq_i - \sum_{i=1}^n p_i dp_i = dF$ gilt. Ist $S(q, \bar{p})$ eine Funktion mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante, dann bestimmen die $2n$ Gleichungen $p_i = \partial S / \partial q_i$, $\bar{q}_i = \partial S / \partial \bar{p}_i$ eine Berührungstransformation; umgekehrt läßt sich jede Berührungstransformation mit unabhängigen Variablen q, \bar{p} in dieser Weise mittels einer Funktion $S(q, \bar{p})$ darstellen. Das Entsprechende gilt, wenn q, \bar{q} oder p, \bar{q} oder p, \bar{p} unabhängige Variable sind. — Verf. zeigt durch Beispiele, daß es Berührungstransformationen gibt, welche sich nicht mittels einer Funktion $S(q, \bar{p})$ oder $S(q, \bar{q})$ oder $S(p, \bar{q})$ oder $S(p, \bar{p})$ erzeugen lassen.

W. Neumer.

Libermann, Paulette: *Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée.* Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 846—850 (1953).

Toute forme quadratique extérieure fermée, à coefficients continûment différentiables, est, localement, réductible à la forme canonique

$$dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n. \quad \text{Th. Lepage.}$$

Pini, Bruno: *Sui punti singolari per i sistemi ai differenziali totali.* Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 95—104 (1953).

On considère le système d'équations aux différentielles totales, complètement intégrable $dx_k = \alpha_k(x) du + \beta_k(x) dv$, $k = 1, 2, 3$; les coefficients α, β sont des fonctions analytiques réelles dans un domaine de $R^3(x_1, x_2, x_3)$ où les deux matrices $(\partial \alpha_k / \partial x_r)$, $(\partial \beta_k / \partial x_r)$ sont régulières. Etude du comportement de la surface intégrale dans le voisinage d'un point x où la matrice (α, β) est de rang < 2 . Th. Lepage.

Gal'pern, S. A.: *Das Cauchysche Problem für Gleichungen vom S. L. Sobolev'schen Typus.* Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5, 191—193 (1953) [Russisch].

● **Ludford, G. S. S.:** *Riemann's method of integration. Its extensions with an application.* (Lecture Series No. 26.) Maryland: University of Maryland. The Institute for fluid dynamics and applied mathematics. 1953. 34 p.

In der hier ausgearbeitet vorliegenden Vorlesung wird die Riemannsche Integrationstheorie für die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus und mit zwei unabhängigen Veränderlichen zunächst in der üblichen Weise auseinandergesetzt (Anfangswertproblem mit einer Anfangskurve, die von keiner Charakteristik berührt wird, und charakteristisches Anfangswertproblem). Hierauf wird die Theorie verallgemeinert auf Anfangswertprobleme, wie sie auch v. Mises untersucht hat, bei denen die Anfangskurve an einer oder mehreren Punkten Charakteristiken berührt. Durch Spiegelungen an Charakteristiken wird der mehrblättrige Bestimmtheitsbereich auseinandergefaltet, so daß dann in dem entstehenden einblättrigen Bereich die Riemannsche Darstellungsformel wieder verwendbar ist. Der zweite Teil der Arbeit enthält Anwendungen auf eindimensionale nichtstationäre Probleme der Gasdynamik (nichtlineare Druckwellen in Rohren).

R. Sauer.

Brewster, J. Pendleton: *A modified initial condition for Cauchy's existence theorem.* Proc. Amer. math. Soc. 4, 296—302 (1953).

Siano $\{j_n\}$ e $\{k_n\}$ due successioni di indici tali che $j_n + k_n = n$ e sia $\{c_n\}$ una successione di costanti reali o complesse tali che la serie $\sum c_n x^n y^{k_n} / j_n! k_n!$ abbia una coppia di raggi di convergenza non nulli. L'A. dimostra che esiste una e una sola soluzione analitica dell'equazione $u_x = f(x, y, u, u_y)$ verificante le condizioni iniziali $\partial^{j_n + k_n} u(0, 0) / \partial x^{j_n} \partial y^{k_n} = c_n$. La f è supposta, naturalmente, analitica.

C. Miranda.

Burgat, Paul: *Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles.* Z. angew. Math. Phys. 4, 146—152 (1953).

Fichera, Gaetano: Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi d'integrazione delle equazioni differenziali lineari. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 45—67 (1953).

Nach einem kurzen Überblick über zahlreiche Methoden, welche man verschiedenen Verff. verdankt, Existenzbeweise und Rechenverfahren der Lösungen von Randwertaufgaben bei linearen partiellen Differentialgleichungen zu erhalten, weist Verf. auf die Möglichkeit hin, mehrere Existenzsätze aus einem allgemeinen Theorem über lineare Transformationen von Hilbertschen Räumen herzuleiten: das Dirichlet-Problem für eine elliptische selbstadjungierte Differentialgleichung 2. Ordnung, das biharmonische Problem, das Minimumprinzip für die harmonische Differentialformen werden dabei in Betracht gezogen.

G. Cimmino.

Cimmino, Gianfranco: Problemi di valori al contorno per alcuni sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 61—65 (1953)

Si studiano dei particolari sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali per i quali alla funzione, o alle funzioni incognite, da determinarsi in un dato dominio, non si possono assegnare ad arbitrio i valori al contorno, costituendo questi dei dati sovrabbondanti, e si determinano le relative condizioni di compatibilità fra tali valori e i termini noti delle equazioni del sistema. (Autoreferat).

Friedrichs, K. O.: On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Commun. pure appl. Math. 6, 299—326 (1953).

Über einem offenen Gebiet R des R_m seien Vektorfunktionen $u(x) = \{u_1(x), \dots, u_p(x)\}$ definiert. Es werden Differentialoperatoren der folgenden Art betrachtet. $D^\sigma u(x)$ bedeute das System aller Ableitungen der Ordnung σ von der Vektorfunktion $u(x)$: $D^\sigma u(x) = \{\partial^\sigma u / \partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_\sigma}\}$, wo μ_1, \dots, μ_σ unabhängig voneinander die Zahlen $1, \dots, m$ durchlaufen. Bedeutet u^q ein System von q m Vektoren $u_{\mu_1} \cdots u_{\mu_q}$ ($\mu_i = 1, 2, \dots, m$), so sei

$$\tilde{D}^q u^q(x) = (-1)^q \sum_{\mu_1 \cdots \mu_q = 1}^m \frac{\partial^q u_{\mu_1} \cdots u_{\mu_q}}{\partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_q}}.$$

Weiterhin sei $a^{q,\sigma}$ ein System von $q \sigma m^2$ Koeffizienten $a_{\mu_1 \cdots \mu_q, \nu_1 \cdots \nu_\sigma}$ und $a^{q,\sigma} u^\sigma =$

$\sum_{\nu_1 \cdots \nu_\sigma = 1}^m a_{\mu_1 \cdots \mu_q, \nu_1 \cdots \nu_\sigma} u_{\nu_1} \cdots u_{\nu_\sigma}$. Wird der Operator L dann definiert durch $L =$

$\sum_{q, \sigma=1}^r \tilde{D}^q a^{q,\sigma}(x) D^\sigma$, so wird die Differentialgleichung (2) $L u(x) = f(x)$ [$f(x)$ gegebener Vek-

tor] betrachtet. Führt man in ähnlicher, wenn auch allgemeinerer Weise wie in Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, Berlin 1937, Kap. VII (dies. Zbl. 17, 397) für die Systeme u^q Normen ein, so läßt sich der Begriff der Ableitung, wie folgt, verallgemeinern: Es sei möglich, eine gegebene Funktion u durch differenzierbare Funktionen $u^{(v)}$ gemäß der Norm zu approximieren und ein System von Funktionen u^q anzugeben, derart, daß $\|D^\kappa u^{(v)} - u^\kappa\| \rightarrow 0$ für jedes beschränkte Gebiet R' in R . Dann bezeichnet man das System u^κ ($\kappa = 1, 2, \dots, \sigma$) als starke Erweiterung des Operators D^σ . Die Gesamtheit aller solchen u werde durch \mathfrak{H}_σ bezeichnet. Der Operator (1) heißt elliptisch, wenn es Konstanten a_0, a_1 gibt derart, daß

$$a_0 \int_R D^r \bar{u}(x) \cdot D^r u(x) dx \leq \int_R D^r \bar{u}(x) \cdot a^{r,r}(x) D^r u(x) dx + a_1 \sum_{q=0}^{r-1} \int_R D^q \bar{u}(x) \cdot D^q u(x) dx$$

(die inneren Produkte $D^r \bar{u}(x) \cdot D^r u(x)$ sind in naheliegender Weise zu erklären) erfüllt ist. u heißt „schwache Lösung“ der Gleichung (2), wenn für alle r -mal stetig differenzierbaren Funktionen \bar{u} , die außerhalb eines Kompaktums in R verschwinden, die Gleichung gilt

$$\int_R \sum_{q=0}^r D^q \bar{u} \cdot \sum_{\sigma=0}^r a^{q,\sigma} D^\sigma u dx = \int_R \bar{u} \cdot f dx.$$

Hauptziel ist der Beweis des folgenden Satzes: Sei $\kappa \leq r$. Die Koeffizienten $a^{q,\sigma}(x)$ seien κ -mal stetig differenzierbar. Dann gehört jede schwache Lösung von (2) zu $\mathfrak{H}_{\kappa+r}$. Also: für $\kappa = r$ ist jede schwache Lösung von (2) auch stark. Mittels eines Lemmas von Sobolev kann man für $\kappa = r + 1 + m/2$ und $f \in \mathfrak{H}_{m/2+1}$ hieraus wiederum auf eigentliche Lösbarkeit schließen. Der Beweis erfolgt nicht wie in anderen Fällen mittels Benutzung einer Fundamentallösung, sondern durch Induktion auf Grund gewisser apriori-Abschätzungen der Ableitungen von u durch niedere Ableitungen, wobei noch eine Approximation von u vermöge

eines glättenden Integraloperators („mollifier“) herangezogen wird. Die Existenz der Lösung wird zunächst für den Fall bewiesen, daß (2) Eulersche Gleichung einer Variationsaufgabe für quadratische Funktionale ist. Die Randbedingung ist im Sinne von Courant-Hilbert II, Kap. VIII zu verstehen. In dem genannten Falle bedeutet die schwache Definition von (2) nichts anderes als das Verschwinden der ersten Variation bei geeigneten zulässigen Vergleichsfunktionen, und der Hauptsatz hat den Charakter eines Fundamentallemmas. Man kann sich dann nachträglich noch von der Einschränkung auf eine Eulersche Gleichung befreien. *G. L. Tautz.*

John, Fritz: Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations. Commun. pure appl. Math. **6**, 327—335 (1953).

(1) $L[u] = 0$ sei eine lineare elliptische Differentialgleichung der Ordnung m im R_n . Verf. beweist den Satz von O. Friedrichs (vgl. vorsteh. Referat), daß eine schwache Lösung von (1) bei geeigneten Annahmen über die Koeffizienten und f von selbst eine eigentliche Lösung ist, unter stärkeren Voraussetzungen, aber mit einfacheren Mitteln. Eine integrierbare Funktion u heißt „schwache Lösung“ von (1) im Gebiet D , wenn für jede unendlich oft differenzierbare Funktion w , die außerhalb eines Kompaktums in D verschwindet, die Gleichung gilt $\int_D u M[w] = \int_D f \cdot w \, dx = 0$, wo M der zu L adjungierte Operator ist. Elliptizität bedeutet hier Definitheit der Form

$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m}^m \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}$, wobei a_{i_1, \dots, i_m}^m die Koeffizienten der höchsten Ableitungen sind.

Behandelt wird der Fall von ungeradem n , während der andere Fall auf diesen mittels der Kaskadenmethode zurückgeführt wird. Voraussetzungen: Die Koeffizienten der k -ten Ableitungen von u in (1) seien $(k+n-1)$ -mal stetig differenzierbar, f $(n-1)$ mal stetig differenzierbar. Unter der Annahme, daß u schwache Lösung ist, wird in § 2 für das Oberflächenmittel $I(x, r) = \frac{1}{\omega_n |y|=1} \int u(x+ry) \, d\omega_y$ eine Integraldarstellung hergeleitet, aus welcher sich unter den genannten Voraussetzungen ergibt, daß $I(x, r)$ mindestens n -mal differenzierbar nach x und r ist.

Für u selbst gilt die Darstellung $u(x) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} c_k A^k J_{2k}(x, A)$, wo $J(x, b, a)$ das Mittel von $I(x, a)$, also das iterierte Mittel von u , während

$$J_{2k}(x, a) = [(\partial/\partial t)^{2k} J(x, (\sqrt{A}-t)/2, (\sqrt{A}+t)/2)]_{t=0}$$

ist. Daraus folgt einmalige Differenzierbarkeit von u . Indem man dies ausnutzt und so fortfährt, kann man schließlich die m -malige Differenzierbarkeit von u beweisen. *G. L. Tautz.*

Browder, Félix: Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique, à coefficients variables. C. r. Acad. Sci. Paris **236**, 2140—2142 (1953).

Let $K = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, ($D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$), be a linear elliptic formally self-adjoint differential operator with sufficiently well-behaved coefficients in a bounded open region D of real n -space. Let H be the set of all functions with square integrable derivatives of order $\leq m$ obtained by closing all infinitely differentiable functions with compact supports in D with respect to the square norm $\int_D |\nabla|^2 dx$. It is known that K possesses a complete set of eigenfunctions $\{q_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ in H which can be assumed to be orthonormalized with respect to the scalar product $\int_D f g \, dx$ and ordered so that the corresponding eigenvalues $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ do not

decrease with ν . Put $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, (ξ real). Using a method of the reviewer [Comm. Sém. Math. Lund **1952**, 109—118 (1952) = Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **21** Nr. 11, 95—104 (1951)] the author proves when $2m = n$ for Green's function $g_t(x, y)$ the asymptotic formula

$$g_t(x, y) = t^{1-n/2m} (2\pi)^{-n} (\delta_{xy} + o(1)) \cdot \int (1 + a(x, \xi))^{-1} d\xi, \quad (t \rightarrow \infty; \delta_{xy} = 0 \text{ when } x \neq y \text{ and } 1 \text{ otherwise}),$$

and the analogous formula for the trace $\int g_t(x, x) dx$. Following Carleman the author then employs a Tauberian theorem to get the asymptotic formula

$$\sum_{\lambda_\nu \leq t} 1 = t^{n/2m} (1 + o(1)) (2\pi)^{-n} \int_D \varrho(x) dx, \quad \sum_{\lambda_\nu \leq t} \overline{\varphi_\nu(x)} \varphi_\nu(y) = t^{n/2m} (\delta_{xy} (2\pi)^{-n} \varrho(x) + o(1))$$

where $\varrho(x) = \int_{a(x, \xi) \leq 1} d\xi$. [The same formulas have been proved recently by the reviewer without the restriction $2m = n$; Math. Scandinav. **1**, 237—255 (1953)]. *L. Gårding.*

Šapiro, Z. Ja.: Über allgemeine Randwertaufgaben für Gleichungen vom elliptischen Typus. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 539—562 (1953) [Russisch].

L'A. considère tout d'abord l'intégration de l'équation elliptique

$$(*) \quad Lu = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (a_{ik} = \text{const.})$$

dans le demi-espace $x_3 > 0$ avec les conditions aux limites $(**)$ $\lim_{P \rightarrow Q} \Delta u(P) = f(Q)$,

Q étant sur la frontière, f donnée et

$$\Delta u(P) = \sum_{p+q+s \leq l} c_{pq s} \frac{\partial^{p+q+s} u}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^s} \quad (c_{pq s} = \text{const.}).$$

Il obtient la solution du problème sous la forme

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

où F est une solution fondamentale qu'il donne explicitement. Il passe ensuite au cas où $(*)$ doit être intégrée dans un domaine D de frontière convenablement régulière Γ , avec des conditions aux limites de la forme $(**)$ sur cette frontière, avec des coefficients qui peuvent être variables. Le problème se ramène alors à la résolution d'une équation de Fredholm $(***)$ $g(P) + \int_{\Gamma} K(P, Q) g(Q) d\sigma_Q = f(P)$. Il consi-

dère enfin les problèmes analogues pour des systèmes différentiels. *Ch. Blanc.*

Moon, Parry and Domina Eberle Spencer: Recent investigations of the separation of Laplace's equation. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 302—307 (1953).

Kritische Bemerkungen zur Arbeit von Levinson, Bogert und Redheffer (dies. Zbl. **41**, 223). Insbesondere wird am Beispiel der allgemeinen paraboloidischen Koordinaten im dreidimensionalen Raum gezeigt, daß die schrittweise Separation der Laplaceschen Gleichung $\Delta \Phi = 0$ mit dem Ansatz $\Phi = S(x, y) \cdot Z(z)$ nicht möglich ist, obwohl gerade in diesen Koordinaten die volle Separation erreichbar ist. *J. Meixner.*

Keller, Joseph B.: The scope of the image method. *Commun. pure appl. Math.* **6**, 505—512 (1953).

Die Greensche Funktion g eines Randwertproblems für einen von lauter Ebenen begrenzten Bereich läßt sich in manchen Fällen durch „Spiegelung“ aus einer entsprechenden, im ganzen Raum definierten Fundamentallösung gewinnen (vgl. z. B. A. Sommerfeld, *Theoretische Physik*, 2. Aufl. Bd. 6, Leipzig 1947, S. 80—83, dies. Zbl. **35**, 62). Verf. gibt eine systematische Übersicht derjenigen Differentialgleichungen und Bereiche, für welche diese Methode bei den Randbedingungen $g = 0$, $\partial g / \partial n = 0$ oder $g + h \partial g / \partial n = 0$ ($h = \text{const.}$) zum Ziele führt. *A. Huber.*

Rayner, M. E.: A note on uniqueness proofs for potential theory and steady heat conduction. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 385—390 (1953).

L'A. considera una funzione v armonica, nella parte infinita del piano limitata da una linea Γ cogli estremi all'infinito, e dimostra che v è univocamente determinata se è logaritmica all'infinito e se sono assegnati i suoi valori o quelli della derivata normale su Γ . Dette poi v_1 e v_2 due funzioni armoniche nelle due parti del piano separate da Γ , l'A. dimostra l'unicità di queste funzioni se sono note le loro singolarità al finito, se sono logaritmiche all'infinito, e se, su Γ , le loro derivate normali sono proporzionali al valore di $v_1 - v_2$; il caso ora considerato rispecchia un problema di propagazione del calore. *D. Graffi.*

Zin, Giovanni: Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **14**, 750—754 (1953).

Kurze Darstellung der Theorie, die Verf. in der im folgenden Referat betrachteten Arbeit entwickelt hat. *G. Cimmino.*

Zin, Giovanni: Risoluzione del problema piano di Dirichlet. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 203—254 (1953).

Als verallgemeinertes Dirichlet-Problem für das von einer einfachen, geschlossenen, rektifizierbaren Kurve C berandete ebene Gebiet D betrachtet Verf. das Problem, eine harmonische Funktion u in D zu bestimmen, welche bei einer konformen Abbildung von D auf einen Kreis in eine durch das Poisson'sche Integral mit summierbaren Randwerten darstellbare harmonische Funktion übergeht. Nach einem besonders einfachen Beweis der Vollständigkeit der harmonischen Polynome auf C zeigt Verf., ohne Bezugnahme auf die Ergebnisse des Ref., daß die Lösung des verallgemeinerten Dirichlet-Problems bei quadratsummierbaren Randwerten $g(t)$, $a \leq t \leq b$, sich als Summe der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, y) \int_a^b g(t) q_n(t) dt$$
 darstellen läßt, wobei die $q_n(t)$ durch

Orthogonalisierung aus den Randwerten der harmonischen Polynome erhalten sind und die $\Phi_n(x, y)$ die den Randwerten $q_n(t)$ entsprechenden Polynome bedeuten; eine analoge Reihenentwicklung wird auch für die konjugierte harmonische Funktion hergeleitet. Die anfangs erwähnte besondere Weise, das verallgemeinerte Dirichlet-Problem zu verstehen, führt Verf. u. a. zur Untersuchung der Summierbarkeit von $(d\theta/dt)^2$ bei einer konformen Abbildung $\tilde{z} = \tilde{z}(z)$ des Gebietes D der z -Ebene auf das Kreisinere $|\tilde{z}| < 1$, wobei $\tilde{z} = e^{i\theta}$ und $z = z(t)$ einander entsprechende Randpunkte bedeuten.

G. Cimmino.

Mitrović, Dragiša: Une remarque sur l'intégral de Dirichlet. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 44—46 und französ. Zusammenfassg. 46 (1953) [Serbo-Kroatisch].

L'A. développe une fonction holomorphe en série infinie. Introduisant les coordonnées polaires et séparant la partie réelle $P(r, \theta)$, on la multiplie successivement par $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ et intègre par rapport à θ , de 0 à 2π . La série étant donnée, l'A. se contente de constater que P est une fonction harmonique à la dérivée continue $\partial P/\partial \theta$ et par conséquent est continue et bornée dans $(0, 2\pi)$. Sommant les deux formules obtenues, l'A. obtient ses quatre premières formules. Profitant de l'intégrale de Dirichlet de $P(r, \theta)$, par rapport à θ , l'A. obtient sa 5-ième formule. Le calcul est élémentaire, mais rien n'est dit sur l'application des formules citées.

N. Saltykow.

Pini, Bruno: Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 19—25 (1953).

Verf. gibt Bedingungen für das Randverhalten einer in einem n -dimensionalen Gebiet A definierten Lösung u der im Titel genannten Gleichung, welche für das identische Verschwinden von u in A hinreichend sind und als Sonderfälle analoge Bedingungen von M. Picone (dies. Zbl. 30, 304; 35, 347) und vom Ref. (dies. Zbl. 19, 263) enthalten.

G. Cimmino.

Pini, Bruno: Un problema di valori al contorno per l'equazione $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 609—615, 746—749 (1953).

Es handelt sich um die folgende Randwertaufgabe: In einem Gebiet der (x, y) -Ebene, dessen Rand aus den beiden Kurven $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $a \leq y \leq b$ [die $x_1(y)$, $x_2(y)$ sind stetig differenzierbar vorausgesetzt, mit $x_1(y) = x_2(y)$] und den beiden Strecken $y = a$, $x_1(a) \leq x \leq x_2(a)$ und $y = b$, $x_1(b) \leq x \leq x_2(b)$ besteht, fragt man nach einer Lösung $u(x, y)$ der im Titel genannten Gleichung, für welche u und, mit Ausnahme der Punkte der Geraden $y = a$ und $y = b$, u_x vorgegebene Randwerte annehmen. Verf. gibt einen Existenzbeweis, der im Grundgedanken dem von Fichera für das biharmonische Problem [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. fis. mat. natur. 5, 319—324 (1948)] folgt. Die Randbedingungen brauchen hier aber nicht in einem verallgemeinerten Sinne verstanden zu sein, zumindest wenn man voraussetzt, daß sie von irgendeiner im Gebiet hinreichend regulären Funktion $\omega(x, y)$ befriedigt sind. Unter schwächeren Voraussetzungen für diese $\omega(x, y)$ kann man behaupten, daß die gebildete Lösung $u(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung die Randbedingung $u = \omega$ noch im gewöhnlichen Sinne befriedigt, während im Gegenteil die partielle Ableitung u_x nur fast überall in $a \leq y \leq b$, für $x = x_1(y)$ und $x = x_2(y)$ der Randbedingung $u_x = \omega_x = 0$ genügt. Ganz ähnliche Resultate gelten, wenn x durch ein System von n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n

und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ durch $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ ersetzt wird.

G. Cimmino.

Variationsrechnung:

Conti, Roberto: Sulla semi-continuità degli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria. I. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 149—157, 158—164 (1953).

I. L. Tonelli (Fondamenti di Calcolo delle variazioni, vol. I, Bologna 1921) per $n = 1$ e S. Cinqini (questo Zbl. 14, 317; 15, 28) per n intero positivo hanno studiato la semicontinuità degli integrali

$$I_{c[n]}^{[n]} = \int_{c[n]} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

nella classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue insieme con le loro derivate dei primi $n - 1$ ordini e per le quali esiste finito l'integrale $I_{c[n]}^{[n]}$. — L'A. considera, successivamente per $n = 1$ e per $n > 1$, la classe delle funzioni $y(x)$ continue assieme alle loro derivate dei primi $n - 1$ ordini, tali che le loro derivate di ordine $n - 1$ siano a variazione limitata e per le quali esiste finito l'integrale $I_{c[n]}^{[n]}$ e dimostra che se $I_{c[n]}^{[n]}$ è semicontinuo la funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

[la quale è supposta soltanto continua rispetto a $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$] deve essere indipendente da $y^{(n)}$. — Inoltre l'A. accenna alla analoga proprietà nel caso in cui la semicontinuità degli integrali $I_D[z] = \iint_D f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy$ venga studiata nella classe delle

funzioni $z(x, y)$ continue e a variazione limitata secondo Tonelli (anziché in quella delle funzioni assolutamente continue secondo Tonelli) e per le quali esiste finito l'integrale $I_D[z]$. — II. L'A. riprende lo studio degli integrali $I_C = \int_C f(x, y(x), y'(x)) dx$, ricorrendo a un'estensione del con-

petto di semicontinuità. Sia $f(x, y, y')$ una funzione definita per ogni (x, y) di A e per ogni valore finito di y' , la quale sia continua rispetto a (x, y, y') , e sia Ω la classe delle curve $C: y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ continua e a variazione limitata, tale che $(x, y(x))$ appartenga ad A e che esista finito l'integrale I_C . Se $C_0: y = y_0(x)$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$ è una curva di Ω , l'integrale I_{C_0} si chiama semicontinuo inferiormente in senso debole su C_0 , se la disuguaglianza $\min \lim I_{C_n} \geq I_{C_0}$ è verificata per ogni successione $C_n: y = y_n(x)$, $(a_n \leq x \leq b_n)$, $[n = 1, 2, \dots]$ di curve appartenenti a Ω e tali che: 1° $\{y_n(x)\}$ converge uniformemente verso $y_0(x)$; 2° è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} |y'_n(x) - y'_0(x)| dx = 0,$$

ove (a'_n, b'_n) è un intervallo contenente entrambi gli intervalli (a_0, b_0) , (a_n, b_n) e si intende che sia $y'_0(x) = 0$, $y'_n(x) = 0$ in ogni punto in cui rispettivamente $y_0(x)$ e $y_n(x)$ non sono definite (oltrechè nei punti in cui la derivata stessa non esiste finita). Tenuto presente che l'integrale I_C è semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω se è semicontinuo inferiormente in senso debole su ogni curva C_0 di Ω , l'A. dimostra il seguente teorema: Si supponga che in corrispondenza a ogni insieme G chiuso e limitato di punti di A esistano due numeri $\lambda \geq 0$, λ , tali che sia $f(x, y, y') > \lambda - A |y'|$, per ogni (x, y) di G e per ogni valore finito di y' . Allora l'integrale I_C è semicontinuo inferiormente in senso debole in Ω . S. Cinqini.

Bertolini, Fernando: Le variazioni successive ed il teorema di Jacobi, per un integrale dipendente da più funzioni di una sola variabile. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 8—22 (1953).

Si considera il funzionale: $F(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y, y'] dx$ ove $y \equiv (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ e $y' = (y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x))$ nella classe Γ dei sistemi di funzioni continue con derivate prime e che assumono valori fissati agli estremi e tali che il grafico $y = y(x)$ appartenga ad un campo connesso Ω ; la funzione $f[x, y, y']$ è continua con derivate di ordine $N + 4$ per $(x, y) \in \Omega$ e z arbitrario. Nell'ipotesi che x_1 e x_2 siano punti coniugati rispetto al sistema di Jacobi relativo al funzionale $F(y)$ e all'estremale $u_0(x)$, esiste un integrale $u_1(x)$ di questo sistema nullo in x_1 e x_2 e non identicamente nullo. Siano $u_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots, N + 2$) sistemi di funzioni continue

con le derivate prime e nulle in x_1, x_2 . Posto $H_n(\epsilon) = F \left[\sum_{k=1}^n \frac{\epsilon^k}{k!} u_k(x) \right]$ si trova che condizione

necessaria (I) affinchè $F(y)$ sia minimizzato da $u_0(x)$ nella classe Γ è che l'eventuale primo termine non nullo della successione: $H_1'''(0), H_2^{IV}(0), \dots, H_N^{(N+2)}(0)$ sia positivo e di posto pari. Questo risultato viene poi confrontato con la condizione geometrica di Jacobi (II) e si mostra che, con ulteriori ipotesi di regolarità sul fascio di curve estremali considerate in detta condizione (II), una estremale $u_0(x)$ che verifica la condizione (I) verifica la (II). Si mostra infine che senza tali ulteriori ipotesi di regolarità non vi è equivalenza fra le condizioni (I) e (II).

G. Stampacchia.

Faedo, Sandro: Il calcolo delle variazioni per gli integrali estesi a intervalli infiniti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 91—132 (1953).

Verf. setzt seine Untersuchungen (dies. Zbl. 41, 68) über die Variation von Integralen der Form

$$I_{\infty}(C) = \int_a^{+\infty} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

fort. Zunächst wird ein Eindeutigkeitstheorem im Fall einer quadratischen Funktion f gebracht und zum Beweis der Eindeutigkeit der sukzessiven Approximationen, die bei der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Variationsmethode auftreten benutzt. Weiterhin stellt Verf. die Transversalitätsbedingungen im Unendlichen auf, weist aber darauf hin und erläutert an Beispielen, daß das Problem $I_{\infty}(C)$ zum Minimum zu machen, im allgemeinen nicht als Problem mit freiem Endpunkt im Unendlichen aufgefaßt werden kann, wegen der zu fordernden Konvergenz von $I_{\infty}(C')$, und daß zunächst die aus dieser Forderung folgenden asymptotischen Bedingungen für die Vergleichskurven C' untersucht werden müssen. Gemäß den asymptotischen Bedingungen zerfällt die Klasse der Vergleichskurven in eine mitunter abzählbar unendliche — Anzahl von Unterklassen, von denen jede für sich untersucht werden muß, worauf schließlich das absolute Minimum zu bestimmen ist. Für die Existenz des absoluten Minimums werden zwei Typen von Theoremen gegeben, die über die bisher bekannten Resultate von Cinquini (dies. Zbl. 24, 44) und des Verf. hinausgehen. Hierbei wird vor allem

die Bedingung α), daß f durch eine für $x \rightarrow a$ stetige Funktion $\psi(x)$ mit konvergentem $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ nach unten begrenzt sein soll, durch die schwächere γ) ersetzt, daß immer, wenn das Integral

$$J(\delta C) = \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} f_{y_i^{(r)}}(y) f_{y_j^{(r)}}(y) \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(r)} \right\} dx$$

konvergiert, außer der ein Minimum liefernden Extremalen C auch $C + \delta C$, wobei $\delta \bar{y}_i^{(r)}(a) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $r = 0, 1, \dots, m-1$), zur Klasse der zulässigen Vergleichskurven gehören soll.

M. J. de Schwarz.

Föllinger, Otto: Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Math. Ann. 126, 466—480 (1953).

Bei den Lösungen eines Variationsproblems $\int f(x, y, y') dx$ mit Gefällebeschränkung $g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$ muß man zwischen Kurvenbögen, mit $g < y' < G$ und solchen, für die z. B. $y' = G$ ist, unterscheiden. In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen betrachtet, die aus einem Bogen der einen und einem der andern Art bestehen, die in einem Punkt P_0 aneinandergrenzen und dort eine Ecke bilden, sowie solche aus einem Bogen mit $y' = g$ und einem mit $y' = G$. Es werden notwendige Bedingungen angegeben und Systeme von hinreichenden Bedingungen für starkes Minimum. Für konstantes g und G hatte B. Flodin [Act. Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 3, No. 10 (1945)] dieselben Aufgaben gelöst. Die vom Verf. verwendeten Methoden sind z. T. anders (und seine Resultate enthalten natürlich die Flodinschen); die Hauptschwierigkeit, nämlich daß z. B. bei $y' = G$ die Weierstraßsche \mathcal{L} -Funktion ihren gewohnten Dienst versagt, wird durch eine Ersatz- \mathcal{L} -Funktion überwunden, die ganz ähnlich wie bei Flodin konstruiert wird.

H. Boerner.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

• Muskhelishvili, N. I.: Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. Translation from the Russian edited by J. R. M. Radok. Groningen, Holland: P. Noordhoff 1953. 447 p. fl. 28,50.

Das Buch stellt das Ergebnis einer gemeinsamen Arbeit von Mitgliedern des Math. Inst. von Tiflis dar, die vom Verf. angeregt wurde. Die Hauptbeiträge stammen vom Verf. und von I. N. Vekua. Es geht um eine Neubegründung und Vervollständigung der Theorie der Integralgleichungen der Form

$$(1) \quad \mathfrak{R} \varphi = A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{K(t_0, t) \varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0),$$

wobei das Integral stets als Cauchyscher Hauptwert aufzufassen ist. L ist die Vereinigung endlich vieler (offener oder geschlossener) glatter Bögen, die sich nicht schneiden. Bei den Randwertproblemen wird angenommen, daß L ein Gebiet berandet. $A(t)$ und $K(t_0, t)$ sind H -stetig. Setzt man $K(t, t) = B(t)$, so wird vorausgesetzt, daß $A + B$ und $A - B$ nirgends auf L verschwinden („regulärer Fall“). (1) läßt sich dann in der Form schreiben

$$\Re \varphi = A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0),$$

wo $k(t_0, t) = (K(t_0, t) - K(t_0, t_0))/(t - t_0)$ ist ersichtlich ein Fredholmscher Kern. $\Re^0 \varphi = A(t_0) \varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi dt}{t - t_0}$ heißt „Hauptteil“ (dominant part) und $\Re^0 \varphi = f(t_0)$ „Hauptgleichung“

(dominant equation). $\Re' \varphi$ bedeutet den zu $\Re \varphi$ adjungierten Operator. (Es ist nicht $\Re^0 = \Re'^0$). Die allgemeine Gleichung (1) wird nach dem Vorgang von Noether mit Hilfe eines reduzierenden Operators \mathfrak{M} (d. h. $\mathfrak{M} \Re \varphi$ ist ein Fredholmscher Operator) auf eine Fredholmsche zurückgeführt, welche der gegebenen allerdings nicht völlig äquivalent ist. Die Noetherschen Resultate werden unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen, und die Beweisführung viel klarer und durchsichtiger gestaltet. Der Grund hierfür liegt u. a. darin, daß sich Verf. auf die Lösung des (von ihm so genannten) „Hilbertschen Problems“ stützt (kurz H. P., sonst als Riemannsches Problem bezeichnet, vgl. hierüber S. 87 des Werkes, insbes. die Fußnote), während Noether das „Riemann-Hilbertsche Problem“ (kurz R. H. P.) benutzt. [Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912; R. H. P., S. 82, H. P., S. 83—94.] Das Verdienst des Verf. und seiner Mitarbeiter liegt in der Erkenntnis der Bedeutung des H. P. für die Lösung der Integralgleichung, und in einer Vereinfachung der Lösung des H. P. durch die Wendung zur Funktionentheorie, während Hilbert die Lösung unter viel schärferen Bedingungen auf dem Wege über die Konstruktion einer Greenschen Funktion (Neumannsches Problem) auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurück führt. Beim H. P. wird gefordert, eine außerhalb L analytische Funktion („sectionally holomorphic function“) $\Phi(z)$ zu finden, welche in ∞ einen Pol hat, längs L stetige Randwerte Φ^+ , Φ^- von links und rechts besitzt, außer evtl. an freien Enden c von L (dort $|\Phi(z)| \leq C/|z - c|^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$), auf L der Randbedingung (2) $\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t)$ genügt. $G(t)$ und $g(t)$ sind auf L definierte, H -stetige Funktionen, $G(t) \neq 0$ auf L . Schreibt man etwa für $g = 0$ statt (1) $[\log \Phi(t)]^+ - [\log \Phi(t)]^- = \log G(t)$, so ist die Lösung im Falle der Eindeutigkeit von $\log G(t)$ auf L gegeben durch $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t) dt}{t - z}$. Andernfalls gibt es entweder nur die triviale

oder auch mehrere verschiedene Lösungen, je nachdem nämlich der „Index“ κ von $G(t)$ entweder ≤ 0 oder > 0 ist. Dabei ist, wenn z. B. L aus $p + 1$ geschlossenen Kurven L_0, L_1, \dots, L_p besteht, wo L_0 die andern Konturen enthält, κ die Gesamtänderung von $(1/2\pi) \arg G(t)$, wenn t die Kurven L_1, \dots, L_p im negativen und L_0 im positiven Sinne umläuft. Also kurz $\kappa = (1/2\pi) [\arg G(t)]_L$. Es gibt also dann κ verschiedene Lösungen. Für die Integralgleichung ergibt sich, daß κ gerade den Überschuß der Lösungsanzahl der homogenen Gleichung über die Lösungsanzahl der homogenen adjungierten angibt. Der Index κ ist übrigens gleich dem Doppelten der negativ genommenen Charakteristik von Haack (W. Haack, dies. Zbl. 47, 340). Diese Aussagen, die für den einfachsten Fall, nämlich geschlossener Konturen, gelten, modifizieren sich bei offenen Konturen oder Koeffizienten mit sprungweisen Unstetigkeiten. — Im einzelnen gliedert sich der Inhalt wie folgt: Teil I: Grundeigenschaften von Cauchyschen Integralen. Teil II: H. P., R. H. P. und singuläre Integralgleichungen (Fall von Konturen). Teil III: Anwendungen auf Randwertprobleme. Genannt sei Kap. 7: Das Dirichletsche Problem. Kap. 8: Das verallgemeinerte Riemann-Hilbert-Poincaré-Problem. Teil IV: H. P. bei offenen Bögen oder unstetigen Randbedingungen. Kap. 13 bringt Anwendungen auf zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Teil V: Singuläre Integralgleichungen bei offenen Bögen oder unstetigen Koeffizienten nebst Anwendungen. Kap. 17 behandelt hier insbesondere die Integralgleichung der Tragflügeltheorie. Teil VI: H. P. und singuläre Integralgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen. Dazu noch 3 Anhänge. Hervorgehoben sei die übersichtliche Stoffbearbeitung und elegante Beweisführung. Es ist durchweg an der Voraussetzung der H -Stetigkeit festgehalten worden. Ref. möchte daher erwähnen, daß in zwei neueren Arbeiten [H. Söhnngen, dies. Zbl. 50, 323 und Math. Z. 60, 31—51 (1954)] mittels Laplacetransformation die Gleichung

$$F(t_0) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F dt}{t - t_0} dt = G(t_0)$$

behandelt wurde, wo von $G(t)$ nur L_p -Integrierbarkeit mit $p > 1$ und für die Lösung $F(t)$ L_q -Integrierbarkeit für irgendein $q > 1$ gefordert wird. G. L. Tautz.

Parodi, Maurice: Sur certaines équations intégrales fonctionnelles. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1729—1731 (1953).

Parodi, Maurice: Analyse symbolique et équations intégrales fonctionnelles. Bull. Sci. math., II. Sér. **77**, 114—119 (1953).

Die Integralgleichung $f(\lambda t) + \lambda \int_0^\infty k(x, t) f(x) dx = g(t)$, wo $k(x, t)$ eine Laplace-Transformierte der Form $\varrho(s) e^{-\lambda \varphi(s)}$ hat, wird auf die Funktionalgleichung $\lambda^{-1} \varphi(s/\lambda) + \lambda \varrho(s) \varphi[\varphi(s)] = \theta(s)$ abgebildet ($\varphi(s) = \mathcal{L}\{f\}$, $\theta(s) = \mathcal{L}\{g\}$), die sich in Spezialfällen lösen läßt. Rücktransformation der Lösung ergibt die gesuchte Funktion f . G. Doetsch.

Germa, R. H.: Sur des équations intégral-différentielles récurrentes de forme normale, dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **67**, 177—185 (1953).

Le equazioni integrodifferenziali ricorrenti $y_n(x) = F_n[x, y_n(x), y_{n+1}(x), W_{n1}(x), \dots, W_{np}(x)]$, ($n = 1, 2, \dots$), dove è

$$W_{nj}(x) = \int_{x_0}^x f_{nj}[x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); y'_n(s), y'_{n+1}(s)] ds, \quad (j = 1, \dots, p),$$

definiscono, sotto convenienti ipotesi di continuità e lipschitzianità, uno ed un solo sistema integrale $y_n(x)$ soddisfacente a date condizioni iniziali. Il metodo di dimostrazione impiegato è quello delle approssimazioni successive. G. Cimmino.

Gianuzzi, Maria: Problemi di valori al contorno per equazioni integro-differenziali. Teoremi di esistenza e di unicità. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII **2**: 71—91 (1953).

L'A. considera i seguenti problemi integro-differenziali

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)], \quad \int_a^x g(x, u, y(u), y'(u), \dots, y^{(n-1)}(u)) du$$

$$y(x_1) = c_1, \quad y(x_2) = c_2, \quad \dots, \quad y(x_n) = c_n \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{p+q} z(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = F\left[x, y, z(x, y), \dots\right]$$

$$\frac{\partial^{p+q} z(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \dots \int_a^x \int_a^y G\left(x, y, u, v, z(u, v), \dots, \frac{\partial^{p+q} z(u, v)}{\partial u^p \partial v^q} \dots\right) du dv \quad (p \leq n, q \leq m, p+q \leq$$

$m+n-1$), $z(x_r, y) = \varphi_r(y)$, $z(x, y_s) = \psi_s(x)$ ($r = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, m$), e perge, per le loro soluzioni, diversi teoremi di esistenza ed unicità. Lo studio è condotto con i metodi dell'analisi funzionale. G. Scorza Dragoni.

Takeda, Ziro: Note on Fourier-Stieltjes integral. II. Kodai math. Sem. Reports **2**, 33—36 (1953).

Der in der I. Note (dies. Zbl. **47**, 104) gegebene Beweis der Verallgemeinerung des Satzes von Bochner-Phillips gilt nur für stetiges f . Verf. bringt einen verbesserten Beweis für den Fall eines beschränkten meßbaren f , und verallgemeinert den Satz von H. Cramér (dies. Zbl. **21**, 321). G. Doetsch.

Scott, E. J.: Jacobi transforms. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **4**, 36—40 (1953).

L'A. chiama „trasformata di Jacobi“ di una $F(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, la funzione $f^{(\alpha, \beta)}(n) = \int_{-1}^1 F(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx$, dove $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ è il classico polinomio di Jacobi di grado n e parametri α, β ($\alpha \geq -1, \beta \geq -1$). La formula di inversione è:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} f^{(\alpha, \beta)}(n) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

dove
$$\delta_n = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx,$$

e viene applicata per dare una soluzione formale del problema:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right] + \frac{a+bx}{d} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho c}{d} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t},$$

$U(x, 0) = F(x)$, $-1 < x < 1$; $U(1, t) = \varphi(t)$, $U(-1, t) = \psi(t)$, $t > 0$, essendo $(a+b)/d$, $(b-a)/d > -2$. — Nel 2° membro della (5.7), $(a+b)/\rho d$ va corretto con $(a+b)/\rho c$. Il caso $\alpha = \beta = 0$ („transformata di Legendre“) è stato già considerato da C. J. Tranter (questo Zbl. 36, 74).

A. Zitarosa.

Bhatnagar, K. P.: On self-reciprocal functions. Ganita 4, 19—37 (1953).

Es wird eine Bedingung dafür aufgestellt, daß eine Funktion in der Hankel-Transformation, bzw. in der Transformation mit dem Kern

$$\omega_{\mu, \nu}(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty J_\nu(t) J_\mu\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

selbstreziprok ist. Ferner sollen φ und f durch $\varphi(p) = \int_0^\infty g(p t) f(t) dt$ verbunden und $\varphi(t) t^m$ in der Hankel-Transformation mit dem Index a und $f(t) t^{-m}$ in der vom Index b selbstreziprok sein; es wird die allgemeine Form von $g(t)$ bestimmt. Schließlich wird angenommen, daß $f(t)$ und $g(t)$ selbstreziprok in der Hankel-Transformation vom Index μ bzw. ν sind, und es werden Aussagen über die Hankel- und Laplace-Transformierte von $\varphi(p)$ gemacht.

G. Doetsch.

Mayer-Kalkschmidt, Jörg: Singularitäten von Laplace-Integralen an der Summierbarkeitsabszisse. Arch. der Math. 4, 441—445 (1953).

Wenn $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} a(t) dt = \mathfrak{L}\{a\}$ eine Konvergenzabszisse $\beta \neq \pm \infty$ hat, und $a(t) \geq 0$ ist, so ist bekanntlich $s = \beta$ ein singulärer Punkt von $f(s)$. Verf. zeigt: Wenn $\mathfrak{L}\{a\}$ die $(C, 1)$ -Abszisse $\beta_1 > -\infty$ hat, die Rechtsableitung von $f(s)$ in $s = \beta_1$ verschwindet und $\sigma(s, t) = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-s\tau} (t - \tau) a(\tau) d\tau$ bei $s = \beta_1$ für $t \geq T \geq 0$ monoton wächst, so ist β_1 ein singulärer Punkt von $f(s)$. — Ein entsprechender Satz gilt für die (C, k) -Abszisse, k ganz > 1 .

G. Doetsch.

Hille, Einar: Some extremal properties of Laplace transforms. Math. Scandinav. 1, 227—236 (1953).

Als Lösungen einiger der in dem „Handbuch der Laplace-Transformation“, Band I, des Referenten (Basel 1950, dies. Zbl. 40, 59) gestellten Probleme werden folgende Sätze bewiesen, in denen $\mu(x)$ die Lindelöfsche μ -Funktion bedeutet. 1. Es existiert eine für $\Re z > 0$ konvergente Laplace-Transformierte $f(z)$ mit $\mu(x) = 1$, $x > 0$. Hieraus folgt, daß die bekannte Abschätzung $f(x + iy) = o(|y|)$ nicht verbessert werden kann und daß es Laplace-Transformierte ohne Beschränktheithalbebene gibt. 2. Für jedes positive ganze k gibt es eine Laplace-Transformierte $f_k(z)$, die (C, k) -summabel für $x > 0$ ist und für die $\mu(x) = k + 1$, $x > 0$, gilt. Hieraus folgt, daß die Abschätzung $f(x + iy) = o(|y|^{k+1})$ in der (C, k) -Halbebene nicht verbessert werden kann. 3. Es sei β_k die Abszisse der (C, k) -Summierbarkeit. Wenn die Originalfunktion F in $f = \mathfrak{L}\{F\}$ positiv und $\beta_0 = +\infty$ ist, so ist auch $\beta_k = +\infty$. 4. Es kann vorkommen, daß die Holomorphieabszisse η von $f(z)$ kleiner als $\beta_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k$ ist. (β_∞ ist die Abszisse endlicher Ordnung.) Es wird ein Beispiel angegeben mit $\eta = -\infty$, $\beta_k = 0$ ($k \geq 0$). — Wie Verf. nachträglich bemerkte, ist ein Beispiel für 1. schon enthalten in T. Jansson, Ark. Mat. Astr. Fys. 15, Nr. 6 (1920).

G. Doetsch.

Lions, J. L.: Supports dans la transformation de Laplace. J. Analyse math. 2, 369—380 (1953).

Der Satz von Paley und Wiener: „Die ganzen Funktionen von Exponentialtypus, die auf der imaginären Achse zu L^2 gehören, sind identisch mit den endlichen Laplace-Transformierten, deren Originalfunktionen zu L^2 gehören“ sowie die Ergänzungen von Plancherel und Pólya (dies. Zbl. 16, 360; 18, 152) werden auf Distributionen übertragen und noch weiter präzisiert. Hieraus ergibt sich die Über-

tragung eines bekannten Satzes über die Faltung auf Distributionen: Es seien S und T zwei Distributionen mit kompakten Trägern über R^n , $U = S * T$ ihre Faltung (produit de composition), K_S, K_T, K_U die konvexen (abgeschlossenen) Hüllen der Träger von S, T, U . Dann ist K_U die vektorielle Summe von K_S und K_T . *G. Doetsch.*

Srivastava, H. M.: On some sequences of Laplace transforms. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **67**, 218—228 (1953).

Aus Korrespondenzen für die eindimensionale Laplace-Transformation werden solche für die zwei- und mehrdimensionale abgeleitet. Beispiel: Aus $F(x) \supset h(p)$ und $g(x) \supset p^{-m} F(p)$ folgt $p^{-m} h(q/p) \subset \subset y^m g(x/y)$. *G. Doetsch.*

Chakrabarty, N. K.: On certain theorems in operational calculus with two variables. Ganita **4**, 1—11 (1953).

Einige Sätze über die zweidimensionale Laplace-Transformation, wie z. B. Korrespondenzen von Operationen, Ableitung von zweidimensionalen Korrespondenzen aus eindimensionalen. *G. Doetsch.*

Chakrabarty, N. K.: Operational calculus with two variables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **67**, 203—217 (1953).

Aus zwei Korrespondenzen für die zweidimensionale Laplace-Transformation wird eine dritte abgeleitet. Beispiel: Aus $f(p, q) \supset h(x, y)$ und $1 \int p q h(p^{-1}, q^{-1}) \supset \Psi(x, y)$ folgt $(1, p, q) f(p^2/4, q^2/4) \supset (\pi/4) \Psi(x^2, y^2)$. *G. Doetsch.*

Capriz, Gianfranco: Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **7**, 17—41 (1953).

Contiene le dimostrazioni dei teoremi enunciati nella Nota che porta lo stesso titolo e già recensita su questo Zbl. **51**, 83. *G. Fichera.*

Ghizzetti, Aldo: Ricerche abeliane e tauberiane compiute nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 113—132 (1953).

In questa memoria si riferisce su vari risultati di carattere abeliano o tauberiano ottenuti negli ultimi vent'anni da diversi collaboratori dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo di Roma. Tali risultati si riferiscono sia alla trasformazione di Laplace con intervallo d'integrazione finito o infinito, che a proprietà dei coefficienti di Fourier o dei momenti di una funzione. È indicata anche la possibilità di alcune nuove ricerche. *C. Miranda.*

Schoenberg, I. J. and Anne Whitney: On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 246—259 (1953).

$\Lambda(x) \geq 0$ heißt eine Pólyasche Frequenzfunktion, wenn $0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x) dx < \infty$ und wenn für jede Menge $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ($n = 1, 2, \dots$) gilt: $D = \det [\Lambda(x_r - y_s)]_{1,1}^n \geq 0$. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die x_r, y_s angegeben, unter der $D \geq 0$ ist. Wenn die zweiseitige Laplace-Transformierte $\frac{1}{\Psi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \Lambda(x) dx$ die Gestalt

$$\prod_{v=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_v s^{\rho_v}} \quad (\delta_v \text{ reell, } \sum \rho_v < \infty)$$
 hat [vgl. hierzu Teil I dieser Arbeit, J. Analyse math. **1**, 331—374 (1951)], so lautet sie: Es sei k die Anzahl der positiven δ_v , h die der negativen δ_v . Dann muß $x_{v-k} < y_v < x_{v+h}$ ($v = 1, \dots, n$) sein mit der Konvention $x_r = -\infty$ für $-\infty \leq r < 1$, $x_r = +\infty$ für $n < r \leq \infty$. Ist $\Psi(s)$ vom Geschlecht 2 (siehe die zitierte Arbeit), so ist stets $D \geq 0$. Damit sind alle Fälle erschöpft. — Hieraus folgt als Anwendung: Eine „spline function“ $F(x)$ ist in den Intervallen $(-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_n, +\infty)$ durch verschiedene Polynome höchstens vom Grad k definiert derart, daß $F(x)$ mit seinen $k-1$ ersten Ableitungen stetig ist; die ξ_1, \dots, ξ_n heißen die Knoten von $F(x)$ [siehe I. J. Schoenberg, Quart. appl. Math. **4**, 45—99, 112—141 (1946)]. Sind in $n+k+1$ Abszissen $x_1 < \dots < x_{n+k+1}$ beliebige Ordinaten gegeben, so kann man diese durch eine „spline function“ vom Grad k und mit den Knoten ξ_1, \dots, ξ_n dann und nur dann interpolieren, wenn die Bedingungen $x_1 < \xi_1 < x_{k+2}, \dots, x_n < \xi_n < x_{n+k+1}$ erfüllt sind. *G. Doetsch.*

Royden, H. L.: Bounds on a distribution function when its first n moments are given. *Ann. math. Statistics* **24**, 361—376 (1953).

Überträgt die Tschebyscheffschen Ungleichungen und den Existenzsatz für die Verteilungsfunktion der Ordnung n im Falle des reduzierten Hamburgerschen Momentenproblems (vgl. Shohat and Tamarkin, dies. Zbl. **41**, 433) auf den Fall des entsprechenden Stieltjesschen Problemes. Durch Spezialisierung erhält man hieraus viele bekannte Ungleichungen. Es sei nur auf Johnson and Rogers, dies. Zbl. **44**, 323 und Wald, dies. Zbl. **21**, 424 hingewiesen. Nach Angabe des Verf. sind die Hauptergebnisse seiner Arbeit in den allgemeinen Ergebnissen von Krein, dies. Zbl. **44**, 53 enthalten.

L. Schmetterer.

Viola, Tullio: Limitazioni per i momenti del quart'ordine d'una funzione, definita nello spazio euclideo ad n dimensioni ed ivi limitata. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* **7**, 79—89 (1953).

L'A. trova delle limitazioni per i momenti del quart'ordine $m_{i,j,h,k} = \int_{S(n)} f(x) x_i x_j x_h x_k dx_1 \cdots dx_n$ di una funzione $f(x)$, definita in uno spazio euclideo $S(n)$ di cui $x = (x_1, \dots, x_n)$ è il punto generico. Tali limitazioni sono stabilite supponendo noti i momenti di ordine 2 [i quali ultimi debbono soddisfare talune condizioni trovate da A. Ghizzetti, *Atti Accad. Italia, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur.* **13**, Nr. 13, 1165—1200 (1943)] e supponendo $0 \leq f(x) \leq L$, con L costante. L'A. prova che deve essere semidefinita positiva, o identicamente nulla, una certa forma quadratica, nelle variabili $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\sum_{i,k=1}^n \varphi_{ik} \lambda_i \lambda_k$, ove le φ_{ik} sono ben determinate funzioni lineari dei momenti $m_{i,j,h,k}$ dipendenti da L e dai momenti di ordine 2 di $f(x)$.

E. De Giorgi.

Sunyer Balaguer, F.: Über die Momente der in einem Winkelraum holomorphen und beschränkten Funktionen. *Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser.* **13**, 241—246 (1953) [Spanisch].

In Beantwortung einer Frage von San Juan wird folgender Satz bewiesen. Die Funktion $f(z)$ ($z = re^{i\theta}$) sei im Winkelraum $|\varphi| < \alpha\pi/2$ regulär und beschränkt; es gelte für die längs der reellen Achse genommenen Momente $(1) \mu_n = \int_0^\infty |f(t)| t^n dt < \Gamma(\alpha' n + 1)$ für eine Folge natürlicher Zahlen $n_k \rightarrow \infty$ und ein α' mit $0 < \alpha' < \alpha$. Dann ist stets $f(z) \equiv 0$. Verf. verbessert damit ein Resultat von San Juan (dies. Zbl. **50**, 107), wo statt (1) Voraussetzungen gemacht werden über die für die Halbgeraden $|\varphi| < \alpha\pi/2$ gebildeten Momente $\mu_n(\varphi)$ von $f(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Haupt Hilfsmittel beim Beweis ist ein Satz von Milloux [*Mathematica* **4**, 182—185 (1930)] über Funktionen $F(z)$, die in $|z| < 1$ regulär und beschränkt sind. — Abschließend wird ein in $|\varphi| < \alpha\pi/2$ reguläres $f(z)$ angegeben, für das (1) erfüllt ist für eine Folge natürlicher Zahlen $n_k \rightarrow \infty$, aber nicht für $n = 1, 2, 3, \dots$.

D. Gaier.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Rusfón, A. F.: Note on a paper by H. S. Allen. *Bull. Soc. math. France* **81**, 77 (1953).

Befreiung der Resultate von Allen (dies. Zbl. **48**, 87) von der Charakteristikeinschränkung.

Laugwitz, Detlef: Über Normtopologien in linearen Räumen. *Arch. der Math.* **4**, 455—460 (1953).

Es sei L ein Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen. Die Klassen äquivalenter Normen von L nennt Verf. Normtopologien. Enthält eine Normtopologie eine Norm, die aus einem skalaren Produkt hervorgeht, so heißt sie eine Euklidische Normtopologie. Für die Mächtigkeiten n_e und n der Menge der Euklidischen bzw. aller Normtopologien von L beweist Verf.

folgende Beziehungen, in denen a die affine Dimension von L und c die Mächtigkeit des Kontinuums bedeuten: $n_\alpha = n - 2^a$ für $c \leq a$, $c \leq 2^a \leq n$, $n \leq n \leq 2^c$ für $n_0 \leq a < c$ und $n_\alpha = n - 1$ für $1 \leq a < n_0$. Während nun die affine Dimension die einzige wesentliche Invariante gegenüber beliebigen (nichtsingulären) linearen Abbildungen ist, gibt es zu normierten Räumen noch weitere Größen, die invariant gegenüber beliebigen topologischen linearen Abbildungen sind, sogenannte normtopologische Invarianten. Verf. zeigt, daß die von Löwig eingeführte metrische Dimension, sowie die affinen und metrischen Dimensionen gewisser, durch den Raum bestimmter Tensorräume normtopologische Invarianten sind. Wie weit das so gewonnene Invariantensystem unabhängig und vollständig ist, ist nicht bekannt. *H.-J. Kowalsky.*

Lorch, E. R.: A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 105—112 (1953).

The norm in a real Banach space \mathfrak{B} is subject to the following differential conditions: For $x \in \mathfrak{B}$ and $r > 1$ put $rG(x) = \|x\|^r$ and consider, for fixed $x, y, z \in \mathfrak{B}$, $q(\alpha, \beta) = G(x + \alpha y + \beta z)$. It is assumed that q has continuous partial derivatives of the first and the second order, and the derivatives $q_\alpha, q_\beta, q_{\alpha\alpha}, \dots$, at $\alpha = 0, \beta = 0$, are denoted by $G_y(x), G_z(x), G_{yy}(x), \dots$ respectively. If $\|x\| = \|y\| = 1$ and $G_y(x) = 0$, then $G_{yy}(x)$ can be interpreted as the curvature of the unit sphere at x . The main further assumption is that $G_{yy}(x) > 0$ for all $x, y \neq 0$. For fixed $x \neq 0$, the mapping $y \rightarrow G_y(x)$ is studied. $G_y(x)$ is a bounded linear functional on \mathfrak{B} . Its norm is $\|x\|^{r-1}$ and it assumes its sup. at $y = x$. The mapping $x \rightarrow G_y(x)$ from \mathfrak{B} into \mathfrak{B}^* is one-one. Conversely, if a bounded linear functional $f(y) \in \mathfrak{B}^*$ assumes its sup. at some $x \neq 0$, then $f(y) = \lambda G_y(x)$ for some $\lambda > 0$. Again, if $x \neq 0$ and y are fixed, then $G_{yy}(x)$ is a bounded linear functional on \mathfrak{B} , and the mapping $y \rightarrow G_{yy}(x)$ from \mathfrak{B} into \mathfrak{B}^* is one-one. If $G_{yy}(x) > L \|x\|^{r-2} \|y\|^2$, for suitable $L > 0$, then \mathfrak{B} is uniformly convex; every $f(y) \in \mathfrak{B}^*$ assumes its sup.; and $y \rightarrow G_{yy}(x)$ is bi-continuous from \mathfrak{B} onto \mathfrak{B}^* . If $L \|x\|^{r-2} \|y\|^2 \leq G_{yy}(x) \leq K \|x\|^{r-2} \|y\|^2$, for suitable $L, K > 0$, then \mathfrak{B} is isomorphic to a Hilbert space with inner product $G_{yy}(x)$ for y and z ($x \neq 0$ fixed). The mapping $x \rightarrow G_y(x)$ is a strong (non-linear) homeomorphism of \mathfrak{B} onto \mathfrak{B}^* that maps the unit sphere of \mathfrak{B} onto that of \mathfrak{B}^* . *W. W. Rogosinski.*

Rubin, H. and M. H. Stone: Postulates for generalizations of Hilbert space. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 611—616 (1953).

Soient E un espace vectoriel (sur le corps des nombres réels, complexes ou quaternioniques) et $q(x)$ une fonction réelle définie sur E de façon telle que: (1) $q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$; (2) pour tout x , $q(\lambda x)$ est une fonction de λ (réel) limitée dans un voisinage de $\lambda = 0$; (3) $\lambda = \beta$ entraîne $q(\lambda x) = q(\beta x)$. Un produit scalaire $p(x, y)$ peut être défini dans E , par intermédiaire de $q(x)$, de façon telle que $\|x\| = (p(x, x))^{1/2} = (q(x))^{1/2}$ est une semi-norme sur E . Nous avons ainsi une généralisation des espaces de Hilbert puisqu'il suffit de postuler en plus: (4) $q(x) = 0$ entraîne $x = 0$, et la complétion de l'espace normé résultant pour obtenir, dans le cas réel ou complexe, une caractérisation des espaces de Hilbert (cf. Jordan-von Neumann, ce Zbl. **12**, 307). *A. Pereira Gomes.*

Dixmier, J.: Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. Acta Sci. math. **15**, 29—30 (1953).

Verf. nennt „espace préhilbertien“ (e. p.) einen (reellen oder komplexen) Vektorraum H , in dem lediglich ein inneres Produkt (mit den üblichen Forderungen) eingeführt ist. Die Dimension des durch Vervollständigung von H entstandenen Hilbertraums heißt die Hilbertsche Dimension H , in Zeichen $\dim H$. Schließlich heiße Orthonormalbasis von H jedes Orthonormalsystem, dessen Linearkombinationen dicht in H liegen. Verf. beweist dann folgende Sätze: (a) Zu jeder Kardinalzahl $m \leq n_0$ existiert ein e. p. H , der keine Orthonormalbasis besitzt und für den $\dim H = m$ gilt. (b) Es existiert ein e. p. H mit $\dim H = c$, in dem jedes Orthonormalsystem abzählbar ist. (c) In jedem e. p. H mit $\dim H = c$ ist die Mächtigkeit maximaler Orthonormalsysteme größer als c . *H. Pachale.*

Morse, Marston and William Transue: The generalized Fréchet variation and Riesz-Young-Hausdorff type theorems. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **2**, 5—35 (1953).

Nach F. Riesz gilt: (a) Eine Funktion $x \in L_1$ ($1 < p \leq 2$) bestimmt die Fourier-Koeffizienten c_n hinsichtlich eines orthonormalen Systems $\varphi_n(s)$ in $0 \leq s \leq 1$ mit $|\varphi_n(s)| \leq M$ so, o.

daß für die Norm $|x|_p$ von x in L_p und die Norm $|c|_p$ des Vektors (c_0, c_1, \dots) in l_p , $(1/p + 1/p' = 1)$ gilt: $|c|_{p'} \leq M^{(2-p)/p} |x|_p$. (b) Ein Vektor $c \in l_p$ ($1 < p \leq 2$) bestimmt eine Funktion $x \in L_p$ mit den Fourier-Koeffizienten c_n so, daß $|x|_{p'} \leq M^{(2-p)/2} |c|_p$. Im I. Teil der Arbeit wird dieser Satz von L_p, l_p auf gewisse normierte lineare Vektorräume A, B von Funktionen übertragen. Es wird gezeigt, daß die Verallgemeinerungen von (a) — Sätze von Parsevalschem Typ — die Verallgemeinerungen von (b) — Sätze von Riesz-Fischerschem Typ — implizieren und umgekehrt von ihnen impliziert werden, und daß jeder dieser Sätze äquivalent ist mit der Bedingung $h(k) < \infty$, wo $h(k)$ die von den Autoren in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 35, 71; 36, 363) eingeführte verallgemeinerte Fréchet'sche Variation der Verteilungsfunktion k ist, mittels deren die Operatoren dargestellt werden können, welche die Elemente der beiden Räume A, B ineinander transformieren. Die Größe $h(k)$ ersetzt auch die Konstante $M^{(2-p)/p}$ in (a) und (b). Im II. Teil werden Räume A betrachtet, deren Elemente unbestimmte Integrale sind, wo die Sätze den klassischen Ergebnissen (a), (b) nahe stehen. Im III. Teil ist $A = C(E)$, wobei dieser Raum wie in den oben zitierten Arbeiten definiert ist. Hier entstehen Sätze eines neuartigen Typus.
G. Doetsch.

Nakano, Hidegorô: Product spaces of semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci., Hokkaido University, Ser. I 12, 163—210 (1953).

Le th. de Stone sur la représentation des algèbres booléennes montre qu'un espace complètement réticulé R peut être décrit comme suit: c'est un espace de fonctions continues numériques sur un espace localement compact stonien E (i. e., où l'adhérence de tout ensemble ouvert relativement compact est encore un ensemble ouvert), ces fonctions étant finies ou égales à $+\infty$ dans un ensemble maigre, mais l'espace R contenant en tout cas l'espace $C(E)$ des fonctions continues et partout finies. Les formes linéaires relativement bornées sur R forment donc un sous-espace \tilde{R} complètement réticulé de l'espace des mesures sur E , et parmi ces formes on est amené à distinguer celles qui sont „continues“ au sens de la structure d'ordre sur \tilde{R} , qui forment un sous-espace R de \tilde{R} . Dans ce travail, l'A. étudie les formes bilinéaires relativement bornées φ sur un produit $R \times S$ de deux espaces complètement réticulés (telles, par définition, que

$$\sup_k \sum |\varphi(x_k, y_k)| < +\infty, \text{ pour } 0 \leq x_k, 0 \leq y_k, \sum_k x_k = a, \sum_k y_k = b,$$

lorsque a et b sont des éléments ≥ 0 quelconques de R et S). Il montre qu'elles forment un espace complètement réticulé, et les relie aux opérateurs relativement bornés de R dans S de la façon habituelle. Il considère en particulier les formes bilinéaires relativement bornées qui sont „continues“ par rapport à chaque variable, et, plus particulièrement, caractérise celles qui appartiennent à la bande engendrée par les mesures produits $\mu \otimes \nu$, ou $\mu + R, \nu + S$. Il donne aussi des exemples simples de formes bilinéaires étrangères à cette bande (autrement dit, „singulières“ par rapport aux $\mu \otimes \nu$); il en est ainsi de la forme $\mu(x)$, pour $\mu \in R, x \in R$. Correspondant à cette étude des formes bilinéaires relativement bornées, il se propose ensuite de définir un „produit tensoriel“ de deux espaces complètement réticulés, de sorte que les formes linéaires relativement bornées (ou „continues“) s'identifient aux formes bilinéaires relativement bornées sur $R \times S$, ou à certains types plus particuliers de telles formes (comme ceux signalés ci-dessus). Il y a plusieurs produits tensoriels qui se présentent ainsi de façon naturelle. Lorsque R et S sont en outre des espaces normés, l'A. montre qu'on peut définir diverses normes sur les produits tensoriels correspondants. Enfin, il introduit et étudie, sur les produits tensoriels de R par S , ce qu'il appelle les „opérateurs de Fubini“ qui correspondent effectivement à l'intégration par rapport à une des variables: à tout produit tensoriel $x \otimes y$ doit correspondre par un tel opérateur, l'élément $\nu(y)x$, où $\nu \in S$.

J. Dieudonné.

Yamamuro, Sadayuki: Exponents of modulated semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci., Hokkaido University, Ser. I 12, 211—253 (1953).

Ce travail se rattache étroitement à la théorie des „espaces modulés“ de Nakano (Modulated semi-ordered linear spaces, Tokyo 1950, ce Zbl. 41, 234), dont il utilise la terminologie et les notations, ce qui empêche d'en donner ici un compte-rendu détaillé, qui devrait être en grande partie consacré à expliquer ces notations. En gros, il s'agit d'un espace complètement réticulé R ,

et un „module“ au sens de Nakano sur un tel espace généralise les fonctions telles que $\int_0^1 |x(t)|^p dt$ définies sur l'espace complètement réticulé L^p ; un tel „module“ $m(x)$ est ≥ 0 (peut être égal à $+\infty$); pour tout $x \in R$, la fonction $\xi \rightarrow m(\xi x)$ (où $\xi > 0$) est convexe, non identiquement nulle si $x \neq 0$ et finie dans un voisinage de 0. La relation $|a| \leq |b|$ implique $m(a) \leq m(b)$, et si a et b sont étrangers, $m(a+b) = m(a) + m(b)$; enfin, m est „continue“ au sens de la structure d'ordre. L'A. s'attache principalement à comparer, pour chaque $a \in R$, la fonction $\xi \rightarrow m(\xi a)$ aux puissances de ξ , ce qui le conduit à introduire, pour chaque $a \in R$, des „expo-

sants" $\chi(a)$ (dont l'un, par exemple, est la borne inférieure des $\chi > 1$ tels que $m(\xi a)^{\chi^2}$ soit décroissante). On définit ensuite les „exposants“ de l'espace tout entier comme bornes (supérieure ou inférieure) des exposants de ses éléments. L'A. étudie entre autres les relations entre exposants de R et ceux de son espace „conjugué“ R (constitué par les formes linéaires sur R „continues“ au sens de l'ordre). A tout „module“ de Nakano est associée entre autres la norme $\|x\| = \inf 1/\xi$; l'A. relie par exemple la propriété d'uniforme convexité de cette norme aux $m(\xi x) \leq 1$ „exposants“ du module d'où elle provient. Sa théorie englobe en particulier les espaces d'Orlicz

et la théorie des „modules“ $m(x) = \int_0^1 \frac{1}{p(t)} x(t)^{p(t)} dt$, développée par Nakano.

J. Dieudonné.

Henriksen, Melvon and J. R. Isbell: On the continuity of the real roots of an algebraic equation. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 431—434 (1953).

The main theorem is the following. Let X be a Hausdorff space. Let $P(w) = P(a_0, \dots, a_{n-1}; w) = w^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^k$ be a polynomial in the complex variable w with coefficients a_0, \dots, a_{n-1} which are continuous complex functions on X . If $P(w)$ has a real root for every $x \in X$, then i) there is an open set $U \subset X$ in which a real root is given by a continuous function r_U ; ii) if the number of real roots is constant throughout X , then U may be taken equal to X . This result is used to establish the following theorem. Let X be a normal space, $C(X, R)$ the ring of all continuous real-valued functions on X , and M a maximal ideal in $C(X, R)$. Then $C(X, R) - M$ is a real-closed field. The reviewer proved that $C(X, R) - M$ is an ordered field in which every positive element has a square root, if X is a completely regular space, and gave an incorrect proof that $C(X, R) - M$ is real closed (this Zbl. **32**, 286).

E. Hewitt.

Harish-Chandra: Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 185—243 (1953).

Dans cet important article, l'A. démontre une partie des résultats annoncés dans une Note antérieure (ce Zbl. **42**, 126). Soient G un groupe de Lie réel connexe, \mathfrak{g} un espace de Banach complexe, π une représentation continue de G dans \mathfrak{g} . Un élément φ de \mathfrak{g} est dit analytique („well-behaved“) si l'application $x \mapsto \pi(x)\varphi$ est une application analytique de G dans \mathfrak{g} . (L'A. étudie au préalable les applications analytiques f d'une variété V dans un espace de Banach \mathfrak{g} , définies localement par des séries entières; outre les propriétés prévisibles de telles applications, l'A. donne une condition d'analyticité lorsque V est un domaine de C^r et \mathfrak{g} l'espace des fonctions sommables pour une certaine mesure sur un espace localement compact E ; il suffit presque que la valeur de $f(x)$ en chaque point de E dépende analytiquement de x .) Cette définition, apparemment plus simple que celle de la Note citée de l'A., se révèle équivalente. Soit W le sous-espace de \mathfrak{g} formé par les éléments analytiques; par passage à la limite, on définit une représentation $\pi_{\mathfrak{g}}$ dans W de \mathfrak{g}_0 (l'algèbre de Lie de G), et par suite de la complexification \mathfrak{g} de \mathfrak{g}_0 et de l'algèbre enveloppante \mathfrak{B} de \mathfrak{g} . Cette représentation de \mathfrak{g}_0 se révèle plus maniable que celle définie par Gårding (ce Zbl. **31**, 57); notamment, si $\varphi \in W$, l'adhérence de $\pi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{B})\varphi$ est stable pour $\pi(G)$ (cor. du th. 2). Mais il faut prouver l'existence d'éléments analytiques; l'A. prouve en fait que W est partout dense lorsque G possède deux sous-groupes analytiques K et S tels que: 1. K est compact; 2. S est quasi-nilpotent, i. e., son algèbre de Lie est quasi-nilpotente, autrement dit somme directe d'une sous-algèbre abélienne et d'un idéal nilpotent. La démonstration de ce th. 3 est difficile. [Il suffit de construire des fonctions f_1, f_2, \dots sur G telles que, en gros: 1. la suite (f_i) soit régularisante; elle vérifie vis à vis de la fonction $\pi(x)$ des conditions de croissance à l'infini; 2. chaque f_i est „analytique“, considérée comme élément de l'espace des fonctions sommables sur G dans lequel opère la représentation régulière (en effet, on régularise alors un élément quelconque de \mathfrak{g} à l'aide des f_i). En exploitant le fait que la loi de composition sur un groupe nilpotent simplement connexe, identifié à son algèbre de Lie par la fonction exponentielle, s'exprime par des fonctions polynômes, l'A. construit de telles fonctions lorsque G est quasi-nilpotent simplement connexe, d'où le th. dans ce cas; on passe au cas général par des moyennes sur K .] Maintenant, si G est semi-simple simplement connexe, l'étude détaillée de \mathfrak{g}_0 par la théorie des racines prouve que la situation est à peu près celle du th. 3; mais seul le quotient de K par un certain sous-groupe discret est compact; l'A. n'étudie plus désormais que les représentations de G (dites permises) pour lesquelles $\pi(x)$ est un scalaire lorsque x est dans ce sous-groupe; on leur étend le th. 3; plus précisément, soit Ω l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de K ; pour $\mathfrak{D} \in \Omega$, soit $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ le sous-espace des $\varphi \in \mathfrak{g}$ qui sont transformés par K suivant \mathfrak{D} ; alors,

$\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ est l'adhérence de $W \cap \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ (th. 4) (et par ailleurs il est classique que $\Sigma \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ est dense dans \mathfrak{H}). On est alors en mesure d'établir des connexions précises entre π et π_w . Soient $\varphi_0 \in \Sigma \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$, $U' = \pi_w(\mathfrak{B}) \varphi_0$ et U l'adhérence de U' ; il existe une correspondance biunivoque $V \rightarrow V'$ entre sous-espaces fermés V de U stables pour $\pi(G)$ et sous-espaces V' de U' stables pour $\pi_w(\mathfrak{B})$, correspondance définie par $V' = V \cap U'$, V = adhérence de V' . Ceci est le th. 5, établi sous l'hypothèse que $\dim \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}} < +\infty$ pour tout $\mathfrak{D} \in \Omega$. Il reste à obtenir des cas où cette hypothèse est satisfaite. A cet effet l'A. définit les représentations π quasi-simples. En gros, ceci signifie que $\pi_w(z)$ est un scalaire quand z est dans le centre de \mathfrak{B} . [Dans le lemme 33, les hypothèses à faire sont (lettre de l'A. au rapporteur): tout élément de $\tilde{\mathfrak{H}}$ de norme ≤ 1 est limite faible d'éléments de \tilde{M} de norme \leq un nombre fixe; cette condition est aisément vérifiée pour $\tilde{M} = \tilde{V}$ au bas de la p. 226.] Par l'intermédiaire de résultats connus sur le sous-espace de Gårding, π est quasi-simple si \mathfrak{H} est hilbertien et π factorielle. Soient π quasi-simple, $\varphi_0 \in \Sigma_{\mathfrak{D} \in \Omega} W_{\mathfrak{D}}$, U l'adhérence de $\pi_w(\mathfrak{B}) \varphi_0$; alors $\dim U_{\mathfrak{D}} < +\infty$ (lemme 33). Ceci entraîne par exemple que, pour \mathfrak{H} hilbertien et π factorielle, le facteur engendré par $\pi(G)$ est de type I au sens de Murray et von Neumann. La démonstration du lemme 33 (seconde grande difficulté) repose essentiellement sur la partie I du mémoire où sont étudiées les représentations infinies des algèbres de Lie. [Résultat auxiliaire intéressant: si \mathfrak{f} est réductive dans \mathfrak{l} (au sens de Koszul) et si ϱ est une représentation de dimension finie semi-simple de \mathfrak{l} , ϱ induit une représentation semi-simple de \mathfrak{f} ; certains autres résultats sont dus indépendamment à Hochschild et Serre (Ann. of Math., II. Ser. 57, 591—603 (1953)).] Soient \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie réelle semi-simple, \mathfrak{g} sa complexification, \mathfrak{B} l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} , \mathfrak{g}_k une forme réelle compacte de \mathfrak{g} ensemble des points fixes d'un automorphisme d'ordre 2 de \mathfrak{g} qui laisse stable \mathfrak{g}_0 , $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_k$, \mathfrak{f} la complexification de \mathfrak{f}_0 , \mathfrak{X} l'algèbre enveloppante de \mathfrak{f} ($\mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}$), \mathfrak{Y} un idéal à gauche de \mathfrak{X} de codimension finie dans \mathfrak{X} , la représentation naturelle de \mathfrak{f} dans $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ étant semi-simple. \mathfrak{D} une classe de représentation simple de dimension finie de \mathfrak{f} , $\mathfrak{B}_{\mathfrak{D}}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ qui sont transformés suivant \mathfrak{D} par \mathfrak{f} dans la représentation naturelle de \mathfrak{f} dans \mathfrak{B}^* . Alors (th. 1) $\mathfrak{B}_{\mathfrak{D}}^*$ est un module de type fini sur le centre de \mathfrak{B} . La démonstration, fort longue, utilise un résultat non publié de Chevalley. Le th. généralise aux algèbres de Lie semi-simples réelles une partie d'un th. antérieur de l'A. relatif aux algèbres de Lie semi-simples complexes (ce Zbl. 42, 127). — Les th. 8 et 9 établissent d'autres connexions entre π et π_w . Enfin, l'A. construit certaines représentations de G dans des espaces fonctionnels, représentations qui généralisent celles de Gelfand-Neumark relatives au cas où G est complexe semi-simple [Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov 36, 1—288 (1950)]. — Il y a d'intéressantes connexions avec un mémoire de Godement [Trans. Amer. math. Soc. 73, 496—556 (1952)]: les méthodes des 2 mémoires sont très différentes; les résultats, même quand ils sont très voisins, ne s'impliquent pas souvent les uns les autres (par exemple pour la raison suivante: Harish-Chandra suppose G simplement connexe, Godement suppose que G admet une représentation linéaire fidèle). J. Dixmier.

Bruhat, François: Sur les représentations induites des groupes de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1478—1480 (1953).

Soient G un groupe de Lie, Γ un sous-groupe fermé, χ et β deux représentations continues de dimension 1 de Γ , avec $|\chi(\xi)| = |\beta(\xi)| = 1$, U^χ , U^β les représentations de G induites par χ et β (G. W. Mackey, ce Zbl. 46, 116). L'A. énonce, sans démonstrations complètes, des résultats qui étendent (pour les groupes de Lie) ceux de Mackey: Γ étant invariant, U^χ est irréductible si et seulement si $\chi(\xi)$ et $\chi(x^{-1}\xi x)$ sont des représentations non équivalentes de Γ pour tout x de G non dans Γ ; propriétés analogues concernant l'équivalence de U^χ et U^β ; extensions diverses. La méthode consiste à associer, à tout opérateur d'entrelacement de U^χ et U^β , une distribution sur $G \times G$ (grâce au théorème des noyaux de L. Schwartz), puis une distribution $d\tilde{T}(x)$ sur G telle que, pour $x \in G$, $\xi, \eta \in \Gamma$, $d\tilde{T}(\xi x \eta^{-1}) = \chi(\xi) \beta(\eta) d\tilde{T}(x)$ (du moins, si G, Γ sont unimodulaires). Pour Γ invariant, $d\tilde{T}$ définit alors sur G/Γ une distribution invariante par certaines multiplications. J. Dixmier.

Matsushita, Shin-ichi: Analyse harmonique dans les groupes localement compacts. I, II. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 955—957, 1056—1057 (1953).

Ces deux Notes (qui contiennent plusieurs obscurités de notations) ont pour but de généraliser l'Analyse harmonique aux groupes non abéliens. Les résultats sont tous connus ou triviaux, sauf le th. 1, qui dit probablement ceci. Notations: G , groupe localement compact; V_0 , adhérence faible de l'ensemble V des fonctions

continues de type positif élémentaires sur G , privée de 0: $(B_c)_c$, combinaisons linéaires complexes des fonctions continues bornées sur G de la forme $\tilde{f} * f$ avec f sommable. Alors: il existe une mesure de Radon positive dq sur V_0 telle que pour $f \in (B_c)_k$, $f(e) = \int_{V_0} \langle f, \varphi \rangle d\varphi$. [Remarque: il peut arriver, pour G discret, que la fonction caractéristique de $\{e\}$ soit dans V_0 , auquel cas on peut prendre pour dq la mesure de Dirac en e . R. Godement a montré (résultat non publié) que, pour G séparable, on peut choisir dq de façon que $V_0 \cap C \cap V$ soit négligeable: on écrit l'opérateur identique dans L^2 comme somme de projecteurs orthogonaux $\tilde{f} \rightarrow c_n * f$, c_n étant une fonction de type positif de carré sommable: on applique à c_n le th. de Bochner généralisé (Godement, ce Zbl. 42, 346) d'où une suite de mesures positives μ_n ; pour tout compact K de V_0 , on voit aisément que $\sum \mu_n(K) < +\infty$, et on forme $\sum \mu_n$.]

J. Dixmier.

Segal, I. E.: A non-commutative extension of abstract integration. Ann. of Math., II. Ser. 57, 401—457 (1953).

Segal, I. E.: Correction to „A non-commutative extension of abstract integration“. Ann. of Math., II. Ser. 58, 595—596 (1953).

Soient \mathfrak{H} un espace hilbertien, \mathfrak{A} un anneau d'opérateurs dans \mathfrak{H} , $E \rightarrow m(E)$ une fonction positive finie ou non définie sur l'ensemble des projecteurs de \mathfrak{A} complètement additive, unitairement invariante, et telle que tout projecteur de \mathfrak{A} soit borne supérieure de projecteurs m -finis. Le système $\Gamma = (\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, m)$ est appelé un „gauge space“, m étant le „gauge“. Exemple: soient R un espace mesuré, r la mesure; soit \mathfrak{H} l'espace hilbertien des fonctions de carré intégrable sur R , \mathfrak{A} l'algèbre des opérateurs de multiplication par les fonctions mesurables bornées; un projecteur E de \mathfrak{A} est défini par la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $S \subset R$: posons $m(E) = r(S)$; alors $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, m)$ est le gauge space le plus général pour lequel \mathfrak{A} est abélien. Ainsi, la théorie des gauge spaces est la „théorie non commutative de l'intégration“. Pour construire cette théorie, l'A. définit d'abord les opérateurs mesurables: ce sont les opérateurs T fermés, $T \eta \mathfrak{A}$, pour lesquels il existe une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés \mathfrak{H}_n de \mathfrak{H} , tendant vers \mathfrak{H} , contenus dans l'ensemble de définition de T , et tels que $\mathfrak{H}_n \cap \mathfrak{A}_n$ soit fini (m ne figure pas dans cette définition; de même, dans l'intégration ordinaire, seule la classe de la mesure influe sur la définition des fonctions mesurables). L'A. étend à ces opérateurs les propriétés établies par Murray et von Neumann pour les opérateurs fermés d'un facteur de type Π_1 , et munit leur ensemble d'une structure de $*$ -algèbre. Il définit la convergence presque partout d'une suite d'opérateurs mesurables, et établit les propriétés de continuité des opérations algébriques vis-à-vis de cette convergence. Les opérateurs intégrables sont introduits ensuite: on définit d'abord l'intégrale des opérateurs de \mathfrak{G} (idéal des opérateurs $T \in \mathfrak{A}$ tels que $m(T\mathfrak{H}) = 0$), c'est-à-dire de „rang“ m -fini par extension de m ; ceci permet de munir \mathfrak{G} d'une norme, puis, par passage à la limite à partir de \mathfrak{G} de définir les opérateurs intégrables et leur intégrale m : les espaces $L^1(\Gamma)$ et $L^2(\Gamma)$. On établit le théorème de Fischer-Riesz, la dualité entre L^1 et $L^\infty = \mathfrak{A}$, le théorème de passage à la limite monotone, des théorèmes de Radon-Nikodým; par exemple, si n est un autre gauge sur \mathfrak{A} , on a, en gros, l'existence et l'unicité d'un opérateur autoadjoint positif $S \eta \mathfrak{G}$ (le centre de \mathfrak{A}) tel que $n(X) = m(XS)$ pour tout opérateur autoadjoint positif $X \eta \mathfrak{A}$. — Le reste du mémoire concerne des propriétés des anneaux d'opérateurs moins directement reliées à l'intégration. Soient \mathfrak{A} un anneau d'opérateurs, q un isomorphisme du centre \mathfrak{G} de \mathfrak{A} sur l'algèbre L^∞ des fonctions mesurables bornées d'un espace mesuré. Il existe une application $E \rightarrow d(E)$ définie sur l'ensemble des projecteurs de \mathfrak{A} , à valeurs dans $(L^\infty)^\pi$, avec les propriétés suivantes: 1. $d(E)$ est finie localement presque partout si et seulement si E est fini; 2. si $EF = 0$, $d(EF) = 0$; 3. d est complètement additive (au sens de la relation d'ordre classique dans L^∞); 4. si $E \sim F$, $d(E) = d(F)$; 5. si E est un projecteur non nul de \mathfrak{G} , $d(E) \neq 0$ et $d(EF) = q(E)d(F)$. L'A. étudie les algèbres hilbertiennes, introduit les éléments „bornés“, les anneaux d'opérateurs \mathfrak{L} et \mathfrak{R} engendrés par les opérateurs de multiplication à gauche et à droite, montre que $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{R}$, $J\mathfrak{L}J = \mathfrak{R}$ (J étant l'involution définie par l'algèbre), $JTJ = T^*$ pour $T \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ (propriétés que l'A. exprime en disant qu'on a un anneau d'opérateurs standard), et qu'il existe un gauge m sur \mathfrak{L} tel que $m(P) = \|x\|^2$ si P est l'opérateur de multiplication à gauche défini par l'élément borné x , $m(P) = +\infty$ dans le cas contraire (cf. Godement, ce Zbl. 43, 32, en particulier p. 78 de ce travail). Réciproquement, un gauge space $\Gamma = (\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, m)$ définit une algèbre hilbertienne (on prend les éléments de \mathfrak{A} qui appartiennent à $L^2(\Gamma)$). Un anneau d'opérateurs peut être associé à une algèbre hilbertienne si et seulement s'il est standard et sans projecteurs purement infinis. Deux anneaux standard algébriquement isomorphes sont spatialement isomorphes.

J. Dixmier.

Turumaru, Takasi: On the direct-product of operator algebras. II. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 1—7 (1953).

Dans un article antérieur [Tôhoku math. J. 4, 242—251 (1952)], l'A. a défini le produit tensoriel A de deux C^* -algèbres A_1, A_2 comme une C^* -algèbre. Si A_1, A_2 sont réalisées dans des espaces hilbertiens H_1, H_2 , l'A. montre comment A peut se réaliser sur $H_1 \otimes H_2$. Si les opérateurs de A_1 et A_2 sont complètement continus, les opérateurs de A sont complètement continus.

J. Dixmier.

Griffin jr., Ernest L.: Some contributions to the theory of rings of operators. Trans. Amer. math. Soc. 75, 471—504 (1953).

Généralisation de certains résultats de Murray et von Neumann aux anneaux d'opérateurs semi-finis (c'est-à-dire sans partie de type III). Soit M un anneau d'opérateurs. L'A. définit l'invariant C de M et M' . 1. lorsque M et M' sont finis, explicitant ainsi les résultats de Kaplansky (ce Zbl. 37, 205) (C est considéré comme un opérateur du centre de M , l'opérateur de couplage); 2. lorsque M et M' sont semi-finis: C est alors un „opérateur formel“ qui résume l'existence de certains cardinaux attachés aux parties „infinies“ de M et M' . L'A. établit à cette occasion quelques théorèmes de structure sur les anneaux semi-finis. Il est prouvé que C joue un rôle important dans les questions suivantes, étudiées en détail dans la suite du mémoire: condition pour qu'un isomorphisme soit spatial, représentation d'une forme linéaire positive complètement additive, comparaison des topologies forte et ultraforte, faible et ultrafaible, conditions pour qu'un anneau d'opérateurs soit standard, continuité des isomorphismes. Remarques: 1. Il semble que l'article de Dye (ce Zbl. 47, 111), qui est indiqué dans la Bibliographie, pourrait être cité parfois de façon plus explicite. 2. Le terme „semi-fini“ est bien choisi; mais les termes „homogènes“ et surtout „purement infinis“ risquent de prêter à confusion. 3. Comme l'A. le signale, certaines des résultats ont été obtenus indépendamment par R. Pallu de la Barrière (ce Zbl. 46, 119).

J. Dixmier.

Brown, Arlen: On a class of operators. Proc. Amer. math. Soc. 4, 723—728 (1953).

H sei ein komplexer Hilbertscher Raum. Verf. untersucht diejenigen Operatoren A von H , die mit A^*A vertauschbar sind, die also der Gleichung $AA^*A = A^*A^2$ genügen, und beweist: Jeder solche Operator A kann als direkte Summe eines normalen Unteroperators C und eines weiteren Unteroperators B dargestellt werden. Dabei ist ein Unteroperator von A ein solcher Operator, der aus A durch Verengung auf einen Unterraum L von H mit $A(L) \subseteq L$ hervorgeht. Diese Zerlegung von A kann noch so gewählt werden, daß der Nullraum von A ganz dem Definitionsbereich von C angehört, wodurch sie dann eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall ist C der normale Kern von A , d. h. der größte normale Unteroperator. Ist $\{x_v\}$ eine beliebige Folge von Elementen eines abgeschlossenen Teilraumes K von H mit $\sum \|x_v\| < \infty$ und T ein Operator von K , so heißt derjenige Operator, der $\{x_0, x_1, \dots\}$ auf $\{0, Tx_0, Tx_1, \dots\}$ abbildet, der durch T erzeugte verallgemeinerte Verschiebungsoperator (dilated shift operator). In der oben genannten Zerlegung von A ist dann B unitär-äquivalent zu dem verallgemeinerten Verschiebungsoperator, der von einem positiven Operator P_0 erzeugt wird. Mit C ist auch P_0 (bis auf unitäre Äquivalenz) eindeutig bestimmt.

H.-J. Kowalsky.

Nevanlinna, Rolf: Bemerkung zur Funktionalanalysis. Math. Scandinav. 1, 104—112 (1953).

H_x und H_y seien zwei vollständige Hilbertsche Räume, $y = y(x)$ sei eine eindeutige Abbildung der Kugel $|x| \leq R$ in den Raum H_y . Die Ableitung $dy(x)/dx$ wird im Sinne von Fréchet erklärt. Als Hilfsmittel wird zunächst das Analogon zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung aufgestellt und dann die lokale Umkehrbarkeit einer differenzierbaren Abbildung bewiesen: Falls die für $|x| \leq R$ eindeutige und differenzierbare Abbildung $y = y(x)$ den Bedingungen

$$(A) \quad \inf_{|h|=1} \left| \frac{dy(0)}{dx} h \right| = m > 0, \quad (B) \quad \sup \left| \frac{dy(x)}{dx} - \frac{dy(0)}{dx} \right| < m \quad \text{für } |x| \leq \varrho \leq R$$

genügt, so ist die Abbildung für $|x| \leq \varrho$ eineindeutig. — Wenn $y(x)$ an Stelle von (B) einer Lipschitzbedingung genügt: (B') $\sup |dy(x)/dx - dy(0)/dx| \leq M|x|$ für $|x| \leq R$, und ferner die Voraussetzung erfüllt ist: (C) Der Wertevorrat der linearen Transformation $dy(0)/dx$ ist der ganze Raum H_y , so enthält die Bildpunktmenge y eine volle Umgebung des Punktes $y(0)$. — Durch Anwendung auf Räume H_x, H_y von endlicher und gleicher Dimensionszahl ergibt sich ein Eineindeigkeitssatz für Abbildungen der Form $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$.

G. Doetsch.

Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij: Die Differenzierbarkeit nicht-linearer Integraloperatoren in Orliczischen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 601—604 (1953) [Russisch].

Weitere Untersuchungen der nicht-linearen Operatoren in Orlicz'schen Räumen (dies. Zbl. 45, 61; 48, 94). Sei G eine kompakte Untermenge des Euklidischen Raumes, und es sei

$$H\Phi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \Phi(y)] dy,$$

wobei K eine Kernfunktion und f eine möglicherweise nicht-lineare Funktion ist. Verf. geben 12 komplizierte Sätze, alle ohne Beweise, über die Existenz, Differenzierbarkeit, und vollständige Stetigkeit des Operators H , betrachtet als ein Operator in einem gewissen Orlicz'schen Raum. E. Hewitt.

Solomjak, M. Z.: Über Eigenwerte und Eigenvektoren eines gestörten Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 29–32 (1953) [Russisch].

Im abstrakten Hilbert'schen Raum seien zwei beschränkte Hermitesche Operatoren A_0 und A gegeben. Es sei λ_0 ein isolierter Punkt des Spektrums von A_0 und zugleich ein n -facher Eigenwert des Operators A_0 und x_1^0, \dots, x_n^0 die ihm angehörigen Eigenvektoren. Angenommen, daß $s = \|A - A_0\| \cdot (A - \lambda_0 E)^{-1} < 1/2$, dann gilt das folgende: (1) es gibt n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des Operators A , die der Ungleichheit $|\lambda_i - \lambda_0| \leq \|A - A_0\|$ genügen, (2) die zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gehörigen Eigenvektoren x_1, \dots, x_n können nicht gleichzeitig orthogonal sein zu allen Eigenvektoren x_1^0, \dots, x_n^0 , (3) verlangt man von den x_1, \dots, x_n , sie sollen so normiert sein, daß die Projektion von x_i auf die von x_1^0, \dots, x_n^0 erzeugte lineare Mannigfaltigkeit die Norm 1 habe, dann muß $\|x_i\|^2 = 2(1 - \|1 - 4s^2\|)^{-1}$ sein, (4) es ist für jeden von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschiedenen Wert λ des Spektrums von A : $\lambda - \lambda_0 \geq (1 - s)s^{-1} \|A - A_0\|$. A. Alexiewicz.

• **Sikkema, P. C.:** Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients. Researches in connection with integral functions of finite order. Groningen-Djakarta: P. Noordhoff N. V. 1953. 223 p. f 11.50; cloth f 13.50.

Dieses sehr übersichtlich und leicht verständlich geschriebene Lehrbuch vermittelt einen guten Überblick über die Theorie der linearen Differentialgleichungen unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aufbauend auf den Untersuchungen von H. Muggli erzielt Verf. eine in wesentlichen Teilen weitergehende und verfeinerte Klassifizierung, die eine bemerkenswerte Abrundung der Ergebnisse zur Folge hat. Da sich die gesamte Theorie auf ganze Funktionen endlicher Ordnung bezieht, werden in einem vorbereitenden Abschnitt die wesentlichsten Definitionen und Sätze über die Ordnung und den Typ ganzer Funktionen ohne Beweise, jedoch mit zahlreichen instruktiven Beispielen zusammengestellt. In einer hierauf folgenden Einleitung wird ein sehr ausführlich gehaltener Überblick über die Ergebnisse und den systematischen Aufbau des Buches gegeben: Kapitel I behandelt die Frage, wann der Differentialoperator $F(D) = \sum a_n D^n$ auf eine ganze Funktion y anwendbar ist: d. h. bei welchen Funktionen $y(x)$ die Reihe $F(D)y(x) = \sum a_n y^{(n)}(x)$ für jedes endliche (komplexe) x konvergent ist. Es werden gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet, denen die Koeffizienten a_n dieser Differentialoperatoren genügen müssen, damit sie auf die Klasse aller ganzen Funktionen einer vorgegebenen Ordnung und eines gegebenen Typs anwendbar sind. Bemerkenswert ist der Fall der Ordnungen σ mit $0 < \sigma < 1$. Hier gibt es Differentialoperatoren, die auf einen gegebenen Typ anwendbar sind, deren erzeugende Reihe $\sum a_n z^n$ jedoch für jeden von Null verschiedenen Wert von z divergiert. Und auch alle folgenden Ergebnisse sind so angelegt, daß sie diese divergenten Operatoren mit umfassen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen unendlicher Ordnung wird in den Kapiteln II und III durch Untersuchungen der Funktion $h(x) = F(D)y(x)$ eingeleitet, in denen Beziehungen zwischen Ordnung und Typ der Funktionen $h(x)$ und $y(x)$ hergeleitet werden. Den Differentialgleichungen selbst und ihren Lösungsmannigfaltigkeiten schließlich sind die letzten beiden Kapitel gewidmet, in denen auch Sätze von Whittaker über asymptotische Periodizität verallgemeinert werden. H.-J. Kowalsky.

Sumner, D. B.: A differential system of infinite order with non-vanishing solutions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 464–479 (1953).

Widder und Bochner (dies. Zbl. 32, 163) haben Lösungen der Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung $DE_1(D)f(x) = 0$, $E_1(w) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{w^2}{n^2})$,

unter den Randbedingungen $f(\pm \infty) = 0$ angegeben. Verf. erweitert die Resultate auf den Fall $E(w) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n = \varrho + n - \Delta + 2\Delta \alpha_n$, wo $\varrho \geq 0$, $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $0 < \Delta < 1/4$.

G. Doetsch.

Cameron, R. H. and R. E. Fagen: Nonlinear transformations of Volterra type in Wiener space. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 552—575 (1953).

In einer Arbeit von R. H. Cameron und W. T. Martin (dies. Zbl. **35**, 73) wurde die Transformation von Wiener'schen Integralen unter Transformationen der Form $y(t) = x(t) + \Delta(x, t)$ betrachtet, wo Δ ein (i. allg. nichtlineares) Funktional ist, das von der Funktion x und der Zahl t abhängt und gewisse Glattheitsbedingungen erfüllt, vor allem die Bedingung der „smooth variation“. Da es sich zeigt, daß die Funktionale vom Volterra'schen Typus, d. h. solche, die durch Integrale mit variabler oberer Grenze ausgedrückt werden, gewöhnlich dieser Bedingung nicht genügen, wird sie durch die mildere Bedingung der „semi-smooth variation“ ersetzt. Auch die übrigen Voraussetzungen werden verallgemeinert. Dazu ist es nötig, einen neuen Integralbegriff einzuführen, der als Modifikation des Stieltjes'schen Integrals betrachtet werden kann. Das Hauptresultat der Arbeit besteht aus den zwei Transformationssätzen 3 und 4 (S. 555, 556), die für eine Wiedergabe zu umfangreich sind.

G. Doetsch.

Bartle, Robert G.: Singular points of functional equations. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 366—384 (1953).

L'A. étudie les équations fonctionnelles de la forme $L(x) + F(x, y) = 0$ où $x \in X$, $y \in Y$, X et Y étant des espaces de Banach, L une application linéaire continue de X dans X , F une application continue de $X \times Y$ dans X , telle que $F(0, 0) = 0$ et que $\|F(x_1, y) - F(x_2, y)\| / \|x_1 - x_2\|$ tend vers 0 avec x_1, x_2 et y . Si L est un isomorphisme de X sur lui-même, l'équation se résout, comme il est bien connu, par la méthode des approximations successives, et a (localement) une solution unique $x = f(y)$ qui est continue. L'A. étudie le cas où $L^{-1}(0)$ est de dimension finie, égale à la codimension de $L(X)$, $L(X)$ étant fermé. Il montre alors comment le problème se ramène à un problème du type précédent suivi de la résolution d'un système de n équations $\varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n; y) = 0$ ($1 \leq i \leq n$), où les inconnues ξ_i sont des scalaires [n étant la dimension de $L^{-1}(0)$]. Lorsque les scalaires sont complexes, et qu'on suppose $F(x, y)$ analytique en x pour tout y assez voisin de 0, et en outre satisfaisant une inégalité de la forme $\|F(x, y) - F(x, 0)\| \leq m \|y\|$ pour x et y assez petits, on peut, pour $n = 1$, démontrer l'existence d'un nombre fini de solutions, avec des multiplicités bien définies. Moyennant des hypothèses analogues sur F (lorsque les scalaires sont réels), l'A. montre que l'on peut (toujours pour $n = 1$), trouver le nombre des solutions et les premiers termes de leur développement par la méthode du polygone de Newton. Il étudie plus en détail l'application de ces résultats à des équations intégrales non linéaires, retrouvant ainsi des résultats de E. Schmidt et R. Iglisch.

J. Dieudonné.

Mohr, Ernst: Über die Funktionalgleichung des arithmetisch-geometrischen Mittels. Math. Nachr. **10**, 129—133 (1953).

Bedeutet $M(a, b)$ das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b , d. h. den gemeinsamen Grenzwert der Folgen $a_v = (a_{v-1} + b_{v-1})/2$, $b_v = \sqrt{a_{v-1} b_{v-1}}$ ($a_0 = a$, $b_0 = b$), so genügt die Funktion $\eta(x) = M(1 + x, 1 - x)^{-1}$ der Funktionalgleichung $y[2t/(1 + t^2)] = [(1 + t^2)/t^2] y(1/t^2)$, wenn $x = 2t/(1 + t^2)$ gesetzt wird. Gauß behauptet, daß dies die einzige Lösung der Funktionalgleichung sei, was allerdings erst, wie Verf. beweist, nach Hinzunahme der folgenden Zusatzbedingungen zutrifft: a) es existiere $\lim_{x \rightarrow +0} y(x)$, b) $y(0) = 1$. Verf. gibt noch eine Übersicht über

die Gesamtheit der Lösungen $y(x)$ nach Wegfall der Bedingungen a), b) im Intervall $0 < x < 1$. Ähnlich wie bei der Hamelschen Lösung der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kann man mittels Wohlordnung eine Klasseneinteilung der Zahlen $0 < x < 1$ vornehmen derart, daß die Werte von $y(x)$ auf einer Basis, welche aus jeder Klasse genau eine Zahl enthält, beliebig vorgeschrieben werden können. Da die Klassen abzählbar sind, so ist die Gesamtheit der Lösungen von der Mächtigkeit des Kontinuums.

G. L. Tautz.

Newton, R. H. C.: On quasi-commutable infinite matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 120—130 (1953).

Bedeutend A und B unendliche Matrizen, und wird

$$C^{(1)} = AB - BA, \quad C^{(r)} = AC^{(r-1)} - C^{(r-1)}A,$$

gesetzt, so werden die Matrizen $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ Quasi-Kommutatoren von A und B genannt, $C^{(r)}$ wird kurz als r -Kommutator von A und B bezeichnet. Ist r die kleinste natürliche Zahl, für welche $C^{(r)} = 0$ ist, dann sagt man, A und B seien r -kommutierbar. Verf. untersucht zuerst die algebraischen Eigenschaften der $C^{(r)}$, dann ihre analytischen Eigenschaften. Dabei werden unter Verwendung Schurscher und Toeplitzscher Ergebnisse im Anschluß an Cooke (vgl. R. G. Cooke, Infinite matrices and sequence spaces, London 1950, dies. Zbl. 40, 25) verallgemeinerte Limitierungsprobleme behandelt.

W. Quade.

Praktische Analysis:

• **Householder, Alston S.:** Principles of numerical analysis. (Internat. Ser. in Pure and Appl. Math.) New York/Toronto/London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953. X, 274 p. \$ 6,—.

Verf. möchte die theoretischen Unterlagen für diejenigen bereitstellen, die numerische Rechnungen durchzuführen und dazu die Verfahren oder zumindest das geeignete Schema zu entwerfen haben. — Dabei wurde besonders auf die Probleme Rücksicht genommen, die beim Arbeiten mit modernen Rechenautomaten auftreten. Entsprechend der Absicht des Verf. liegt also keine Rezept- und Formelsammlung vor, sondern das Buch ergibt sich soweit in theoretischen Untersuchungen, wie dies heute bei der modernen Behandlung praktischer Probleme notwendig erscheint. Diese erfordern ein immer tieferes Eindringen in die Mathematik und insbesondere in die Fehlertheorie, die im 1. Abschnitt des Buches behandelt wird. — Im wesentlichen werden lineare und nichtlineare Systeme und die approximative Darstellung von Funktionen behandelt, während auf die Behandlung spezieller Funktionalgleichungen verzichtet wurde. — Inhalt: 1. Fehlerquellen und Fehlermöglichkeiten bei numerischen Rechnungen, Fehlerfortpflanzung, Betrachtung verschiedener Arten von Fehlern, Abschätzung und kurze statistische Fehlerfassung. 2. Matrizen und lineare Gleichungssysteme: Einführung in die theoretischen Grundlagen, Cayley-Hamilton-Theorem, Eigen- und Hauptvektoren, analytische Matrizenfunktionen usw., iterative und direkte Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. 3. Nichtlineare Gleichungen und Systeme: Graeffe- und Brodetsky-Smeal-Verfahren, Bernoullis Methode, Iterations-Verfahren verschieden hoher Ordnung, z. B. Newton-Verfahren, Behandlung von Systemen, komplexe Wurzeln. 4. Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix: Schranken für Eigenwerte, iterative und direkte Verfahren zur Eigenwertberechnung. 5. Interpolation: Einführende Betrachtungen allgemeiner Art, Besprechung des Peterssonsschen Vorgehens mit Restgliedbetrachtungen, Polynom-, trigonometrische und exponentielle Interpolation. 6. Allgemeinere Approximationsmethoden: Methode der kleinsten Quadrate, Tschebyscheffsche Interpolation. 7. Numerische Differentiation und Integration: Allgemeine und spezielle Formeln, Herleitung mit Operatorenmethode. 8. Monte-Carlo-Methode: Erläuterung am Beispiel der numerischen Integration, Ausblicke und Bemerkungen über allgemeine Anwendungsmöglichkeit. — Am Schlusse eines jeden Abschnitts befindet sich ein historischer Überblick. Die wichtigsten englischen und amerikanischen Arbeiten bis etwa 1952 sind berücksichtigt. Das klar und flüssig geschriebene Buch dürfte eine wertvolle Bereicherung der Literatur über Praktische Analysis darstellen.

H. Unger.

• **Sanden, H. von:** Praktische Mathematik. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 44.) 3. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1953. 128 S. 25 Abb., DM 3,20.

Lavrent'ev, M. M.: Zur Frage der Verbesserung der Genauigkeit der Lösung eines Systems von linearen Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 885—886 (1953) [Russisch].

Es werden zwei Sätze mitgeteilt, die sich auf die Abschätzung der Genauigkeit der Lösung eines linearen Gleichungssystems beziehen, wenn die Glieder der rechten Seite nur mit der Genauigkeit ε bekannt sind. Es seien x'_1, x'_2, \dots, x'_n die Lösungen des Gleichungssystems $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), dessen Koeffizienten-

eterminante $\Delta \neq 0$ sei und das so normiert sei, daß $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

t. x'_1, x'_2, \dots, x'_n seien die Lösungen von $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j + \varepsilon_j$ mit $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$.

Satz 1: Es gilt $|x'_i - x'_i| \leq (en)^{1,2} \varepsilon / |\Delta|$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Satz 2: Wenn bekannt ist, daß $|x'_{i+1} - x'_i| < \lambda/n$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) ist, dann kann man zu den Zahlen x'_i Zahlen \bar{x}_i konstruieren, so daß $|\bar{x}_i - x'_i| \leq (6 \lambda e \varepsilon^2 / \Delta^2)^{1/3}$ für $i = 1, 2, \dots, n$.
Werner Schulz.

Lotkin, Mark and Russell Remage: Scaling and error analysis for matrix inversion by partitioning. Ann. math. Statistics 24, 428—439 (1953).

Die numerische Bestimmung der Inversen einer Matrix verlangt viel Rechenarbeit. Verf. erörtert im einzelnen, wie man bei einem von Frazer, Duncan und Collar vorgeschlagenen Verfahren zur Bestimmung der Inversen (vgl. R. A. Frazer, V. J. Duncan, and A. R. Collar, Elementary matrices, Cambridge 1950) vorgehen hat, um zu einem möglichst genauen Ergebnis zu kommen. Es handelt sich dabei in erster Linie darum, die im Verlaufe der Rechnung durch die Häufung von Rundungsfehlern auftretenden Abweichungen zu vermeiden, bzw. diese Fehler zu korrigieren. Es werden hierzu geeignete Methoden vorgeschlagen. W. Quade.

Bachmann, Karl-Heinz: Rechenkontrollen und Rechenschemata zum Graeffe-Rechen Verfahren. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 327—332 (1953).

Für das Verfahren von Graeffe und seine Erweiterung nach Brodetsky und Smeal werden numerische Kontrollen und Rechenschablonen eingeführt, um etwaige Fehler bei der schrittweisen Berechnung der Koeffizienten der höheren Polynome zu entdecken. Es scheint dem Ref., daß der Aufwand für die Kontrollen beträchtlich ist und nicht in jedem Fall unter dem für die eigentliche Rechnung bleibt. Ob das Ergebnis selbst richtig ist, läßt sich ja an Hand der elementarsymmetrischen Funktionen sofort sehen, so daß man weiß, ob eine Prüfung überhaupt notwendig ist.
H. Wundt.

Bateman, E. H.: The solution of algebraic and transcendental equations by iteration. Math. Gaz. 37, 96—101 (1953).

Es sei bekannt, daß a eine Näherungslösung von $f(x) = 0$ ist, so daß mit kleinem λ gilt $a = x + \lambda$. nach Taylor also $(*) f(a) + f_1(a) \lambda + \frac{1}{2} f_2(a) \lambda^2 + \dots = 0$. Berücksichtigt man hier links nur die ersten zwei Terme, so ergibt sich die bekannte Newtonsche Näherungsformel. Verf. bemerkt, daß man bisher offenbar von der nächsthöheren Formel, die sich durch Einbeziehung des quadratischen Terms ergibt, keinen Gebrauch gemacht hat. Indem man in $(*)$ λ^2 durch den aus der Newtonschen Formel erhaltenen Ausdruck $-(f(a)/f_1(a)) \lambda = -(f_0/f_1) \lambda$ ersetzt, „linearisiert“ man die Gl. $(*)$ und erhält $\lambda \approx \varphi(a) = -f_0/(f_1 - f_0 f_2/2 f_1)$. So ergibt sich der Iterationsansatz $a_1 = a + \varphi(a)$, dessen Konvergenz nun kurz diskutiert wird. Sodann wird $\varphi(a)$ für den Fall $f(x) = x^n - N$ angegeben und an einigen Zahlenbeispielen die rapide Konvergenz des Verfahrens demonstriert. Im Falle der Quadrat- und Kubikwurzel werden noch einige Modifikationen der Formel in Vorschlag gebracht, durch welche sie für numerische Rechnung geeigneter wird. Ferner werden zwei „klassische“ kubische Gleichungen mit Zahlkoeffizienten diskutiert und eine geometrische Interpretation der Methode hergeleitet.
H. Schwerdtfeger.

Antosićwicz, H. A. and J. M. Hammersley: The convergence of numerical iteration. Amer. math. Monthly 60, 604—607 (1953).

In Form von Frage und Antwort stellen Verf. einige in Lehrbüchern anzutreffende Behauptungen über die iterative Berechnung einer Nullstelle von $x = f(x)$ richtig, machen allerdings im Schlußsatz selber eine nicht ganz richtige Aussage.

J. Weissinger.

Popovici, Const. C.: Sur l'itération des systèmes linéaires. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 233—244, russische und französ. Zusammenfassgn. 245—246, 246—247 (1953) [Rumänisch].

Sei x_i die exakte, $x_i^{(m)}$ die durch m -malige Iteration gewonnene Lösung ein Systems n linearer Gleichungen mit n Unbekannten. Verf. stellt für die Fehlerkomponenten $z_i^{(m)} = x_i^{(m)} - x_i$ eine Differenzengleichung n -ter Ordnung auf, deren Untersuchung er eine Theorie des Iterationsverfahrens gründet.

J. Weissinger

Schröder, Johann: Eine Bemerkung zur Konvergenz der Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Arch. der Math. 4, 322–326 (1953).

Given a system of linear equations $Ax + r = 0$ with a regular square matrix A . The iteration process $A_0 x^{(k+1)} = A_1 x^{(k)} + r$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) where $A = A_1 - [A_0]$, $[A_0] \neq 0$, for a prescribed column $x^{(0)}$ defines a sequence $x^{(k)}$ which has the solution as its limit if, and only if, the moduli of the characteristic roots of the matrix $A_0^{-1}A_1$ are all < 1 . A root with greatest possible modulus is called a principal root. The following two „partitions“ of the matrix A are considered here: (G) Method „Gesamtschritten“: A_0 is a diagonal matrix having as diagonal the diagonal of A and on, but only zeros above its diagonal; principal root: λ . – Collatz has shown (this Zbl. 38, 77) that if (G) converges, then (E) is not always convergent. It is shown that if (I) A is hermitean, or (II) A has all its non-diagonal elements > 0 , then from the convergence of (G) it follows the convergence of (E). Proof by estimation of $|\alpha|$ if $|\beta| < 1$. In the case (II) it is found that $|\alpha| \leq |\beta|$.

H. Schwerdtfeger

Orloff, Constantin: Méthode spectrale pratique d'évaluation numérique des déterminants et de résolution du système d'équations linéaires. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 5, Nr. 1/2, 17–29 und serbische Zusammenfassg. 29–30 (1953).

Verf. gibt eine Reihe von Eigenschaften der mathematischen Spektren von M. Petrovitch und zeigt, wie diese Spektren verwendet werden könnten bei der Berechnung von skalaren Produkten von Vektoren, Determinanten und bei der Lösung von linearen Gleichungen.

E. M. Bruins

Unger, Heinz: Über direkte Verfahren bei Matrizen-eigenwertproblemen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 449–456 (1953).

Behandelt werden einige direkte (nichtiterative) Verfahren zur numerischen Behandlung des Matrizen-Eigenwertproblems unter dem gemeinsamen Gesichtspunkt der Transformation der gegebenen $n \times n$ -Matrix \mathfrak{A} in eine $m \times m$ -Matrix \mathfrak{B} ($m \leq n$), wobei \mathfrak{B} aus der oberen Dreiecksform durch Zufügen einer aus den Elementen 1 bestehenden Nebendiagonalreihe hervorgeht. Es gehören hierher die Verfahren von Frazer-Duncan-Collar, von Hessenberg, Lancz und Arnoldi. Der Zusammenhang zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist gegeben durch $\mathfrak{A} \mathfrak{Z} = \mathfrak{B} \mathfrak{Z}$ mit einer $n \times m$ -Matrix \mathfrak{Z} aus m linear unabhängigen iterierten Vektoren z_1, z_2, \dots, z_m als Spalten. 1. Genannten Verfahren unterscheiden sich durch den Aufbau der Matrizen \mathfrak{Z} und \mathfrak{B} . – Sodann wird der Einfluß des Ausgangsvektors z_1 auf den Gang des Verfahrens untersucht, insbesondere darauf, wann das Verfahren vorzeitig abbricht ($m < n$). Als wesentlich hierfür erweist sich neben den Elementarteilern von \mathfrak{A} der Anteil der Eigen- oder Hauptvektoren des Vektors z_1 . 1. beliebigem z_1 kann man in einem Gang höchstens bis zum Minimalpolynom von \mathfrak{A} aufsteigen. In jedem Falle ist das Verfahren bis zum charakteristischen Polynom fortsetzbar.

R. Zurmühl

Saibel, Edward and W. J. Berger: On finding the characteristic equation of a square matrix. Math. Tables Aids Comput. 7, 228–236 (1953).

Nach einer ausführlichen Beschreibung des Verfahrens von K. Hessenberg, welches die gegebene $n \times n$ -Matrix A in eine Matrix P von gleicher charakteristischer Gleichung und Fast-Dreiecksform (eine zusätzliche Diagonale unterhalb der Hauptdiagonalen) transformiert, wird zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung von P die Cayley-Hamiltonsche Gleichung benutzt, ein Vorschlag, der sich übrigens schon bei Hessenberg selbst findet (Diss. Darmstadt 1941). Die dabei auftretende Matrix $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ der iterierten Vektoren $x_k = P^k x_0$ mit $x_0 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ ist eine obere Dreiecksmatrix und erlaubt die sukzessive Berechnung der Koeffizienten c_k der charakteristischen Gleichung. – Sodann wird auf die Mög-

keit hingewiesen, die Matrix A unmittelbar durch elementare Umformungen in die Fast-Dreiecksform gleicher charakteristischer Gleichung zu bringen, womit die Hessenberg-Transformation erübrigt.

R. Zurmühl.

2 Stiefel, Eduard: **Ausgleichung ohne Aufstellung der Gaußschen Normalgleichungen.** Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 441—442 (1953).

Es wird ein Ausgleichungsverfahren beschrieben und für vermittelnde Beobachtungen erläutert, das, unmittelbar von den linearen Fehlergleichungen ausgehend, im Wege der sukzessiven Approximation die Fehlerquadratsumme zum Minimum macht. Der entwickelte Algorithmus stellt eine Verallgemeinerung der Verfahren der Relaxationsrechnung dar. Im Gegensatz zu gewissen Relaxationsmethoden, die in der Ausgleichungsrechnung gelegentlich Anwendung finden, werden hier die einzelnen Schritte nach einer genau festgelegten, gleichbleibenden Rechenvorschrift vollzogen, und zwar ergibt jeder Schritt gleichzeitig Verbesserungen für alle Näherungswerte. Die Methode ist ferner dadurch charakterisiert, daß sie im Falle von unbekannten durch m -malige Anwendung desselben Rechenganges zum Ziel führt. Die zum Zweck der Approximation eingeführten Hilfsgrößen geben dank ihrer Orthogonalitätseigenschaft die Möglichkeit, jeden Einzelschritt durch quadratische Summenproben zu kontrollieren; sie können außerdem in sehr bequemer Weise die Gewichte der ausgeglichenen Größen, was bei anderen Iterationsmethoden oft recht umständliche zusätzliche Rechnungen erfordert. Wegen des einfachen, sich stets wiederholenden Rechenganges dürfte dieses Verfahren ganz besonders für Rechenautomaten geeignet sein.

W. Hofmann.

Lotkin, Mark: **The treatment of boundary problems by matrix methods.** Amer. Math. Monthly 60, 11—19 (1953).

Verf. macht darauf aufmerksam, daß die Methode des kleinsten mittleren Fehlerquadrats zur Gewinnung von Näherungslösungen linearer Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen oft von Nutzen ist, und daß sich diese Methode durch Heranziehung des Matrizenkalküls besonders leicht handhaben läßt. Auf Grund der Erfahrungen, die Verf. mit dieser Methode gemacht hat, vermutet er, daß sie genauere Ergebnisse liefert als die von Galerkin angegebene. Verf. erläutert die Methode zuerst für die Randwertaufgabe

$$L[y] = \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(n-k)} = r(x), \quad A(D)y(a) = \varrho,$$

wo $A(D)$ eine Matrix mit n Zeilen und p Spalten ist; $y(a)$ ist ein Vektor mit p Koordinaten, ebenso ϱ . Die Methode wird auf Randwertaufgaben ausgedehnt, wie sie bei Systemen von linearen Differentialgleichungen auftreten. Einige Beispiele dienen zur Erläuterung, die gewonnenen Näherungslösungen werden mit der exakten Lösung und der nach Galerkin ermittelten verglichen.

W. Quade.

Block, H. D.: **Construction of solutions and propagation of errors in nonlinear problems.** Proc. Amer. math. Soc. 4, 715—722 (1953).

The purpose of the paper is to provide theoretical tools which can be useful, after proper preparation, in practical applications for approximating the solutions of a certain class of nonlinear equations.

E. J. Nyström.

Lozinskij, S. M.: **Eine Abschätzung des Fehlers der angenäherten Lösung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 225—228 (1953) [Russisch].

Das System von Differentialgleichungen $dy_i/dt = f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ [kurz: $dy/dt = \tilde{f}(t, \eta)$] habe im Intervall $t_0 \leq t \leq T$ den Vektor (einspaltige Matrix mit n Elementen) $\eta = \eta(t)$ als Lösung. Es sei $J(t, \eta)$ die Jacobische Matrix aus den Elementen $\partial f_i / \partial y_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$), $\tilde{U}(t)$ eine für $t_0 \leq t \leq T$ nicht singuläre n -reihige quadratische Matrix und $Q(t, \eta) = U^{-1} J U - U^{-1} dU/dt$. Bedeutet $\mathfrak{Y}(t)$ den Vektor aus n Funktionen $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$, so werden folgende weitere Vektoren eingeführt: $\Delta(t) = \mathfrak{Y} - \eta$, $\vartheta(t) = U^{-1} \Delta$, $\tau(t) = d\mathfrak{Y}/dt - \tilde{f}(t, \mathfrak{Y})$, $\zeta(t) = U^{-1} \tau$. Wird ein Vektor oder eine Matrix in Absolutstriche gesetzt, so soll dies heißen, daß für alle Komponenten des Vektors bzw. für alle Elemente der Matrix die Absolutbeträge zu setzen sind. Folgender Satz liefert eine Abschätzung für $|\Delta(t)|$, d. h. für $|A_i(t)|$ ($i = 1, 2, \dots, n$): Es sei $\Delta(t)$ eine reelle, für $t_0 \leq t \leq T$ stetige n -reihige quadratische Matrix. Die Glieder der Hauptdiagonale von A seien für das betrachtete Intervall mindestens gleich dem Realteil, die übrigen Glieder von A mindestens gleich dem Absolutbetrag der entsprechenden Glieder von Q . Wenn der Vektor $\varepsilon(t)$ eine Lösung des Systems $d\varepsilon/dt = A(t)\varepsilon + |\zeta(t)|$ ist, so daß $|\vartheta(t_0)| \leq \varepsilon(t_0)$ gilt, so wird $|\Delta(t)| \leq U(t)\varepsilon(t)$ für $t_0 \leq t \leq T$. Weitere Sätze enthalten Abschätzungen für

$\max_{1 \leq i \leq n} \|A_i\|, \sum_{i=1}^n \|A_i\|$ und $\left(\sum_{i=1}^n \|A_i\|^2\right)^{1/2}$. Für die praktische Anwendung der Sätze muß m bestrebt sein, die Matrix U so zu wählen, daß in Q die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen klein werden. Werner Schulz.

Lozinskij, S. M.: Über Gleichungen in Variationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 621—624 (1953) [Russisch].

Die Arbeit schließt sich an die vorstehend referierte an (Bezeichnungen siehe dort). Es seien $\eta(t)$ und $\eta(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq T$ Lösungen des Gleichungssystems $d\eta/dt = f(t, \eta)$ mit den Anfangsvektoren $\eta(t_0)$ bzw. $\eta(t_0)$, die sich wenig voneinander unterscheiden. Es soll die Differenz $\eta(t) = \eta(t) - \eta(t)$ abgeschätzt werden, die Lösung des Systems $d\eta/dt = J(t, \eta) \eta$ mit dem Anfangsvektor $\eta(t_0) = \eta(t_0) - \eta(t_0)$ ist. Die Abschätzungen ergeben sich durch Anwendung der Sätze der vorigen Arbeit. Z. B. gilt unter denselben Voraussetzungen wie bei dem oben angeführten Satz: Wenn der Vektor $\varepsilon(t)$ eine Lösung des Systems $d\varepsilon/dt = A(t) \varepsilon$, $|\xi(t)|$ mit $\varepsilon(t_0) = 0$ ist, so wird $|\eta(t) - \eta(t) - \eta(t)| \leq T(t) \varepsilon(t)$ für $t_0 \leq t \leq T$. Werner Schulz.

Brodskij, M. L.: Asymptotische Abschätzungen der Fehler bei numerischer Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Differenzmethode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 599—602 (1953) [Russisch].

Fehlerbetrachtungen für den Fall, daß das System von Differentialgleichungen $\frac{d\eta}{dx} = f(x, \eta)$ durch das System von Differenzengleichungen $\eta_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j \eta_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n-j}$ ersetzt wird, mit Anwendungen auf die Verfahren von Adams, Milne und die Simpsonse Regel. Beim Verfahren von Milne (Näherung: $\eta_n - \eta_{n-4} = (8f_{n-1} - 4f_{n-2} + 8f_{n-3})h/3$) ergibt sich für den Fehler eine Summe von Exponentialausdrücken, die die Instabilität der Methode gegenüber Abrundungsfehlern erkennen läßt. Werner Schulz.

Bukovics, E.: Beiträge zur numerischen Integration. I. Der Fehler beim Blauischen Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Monatsh. Math. 57, 217—245 (1953).

Bukovics, Erich: Beiträge zur numerischen Integration. II. Der Fehler beim Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Monatsh. Math. 57, 333—350 (1954).

In Teil I wird der Fehler des — vom Verf. in früherer Arbeit (dies. Zbl. 40, 358) auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung verallgemeinerten — Blauischen Verfahrens untersucht, um zwar sowohl für den ursprünglichen als auch für den vom Verf. zur Genauigkeitssteigerung erweiterten Blauischen Ansatz. Teil II überträgt die Untersuchungen auf das Runge-Kutta-Verfahren n -ter Ordnung. Beiden Verfahren gemeinsam ist die Berechnung von Grobwerten; sie dienen als Argumente von Funktionswerten, aus denen durch Mittelbildung die endgültigen Näherungswerte gewonnen werden. Dementsprechend verläuft die Fehleruntersuchung weitgehend parallel; sie führt in beiden Fällen zu einer rekursiven Fehlerabschätzung von gleicher Form mit ähnlich gebauten Koeffizienten. Auch der Übergang zu einer independenten Abschätzung verläuft ähnlich. Für beide Verfahren werden die zur praktischen Durchführung der Abschätzung benötigten Formeln für die wichtigsten Fälle der Ordnung $n = 2$ bis 4 bzw. 1 bis 5 explizit zusammengestellt und ihre Handhabung durch Zahlentabellen erleichtert. Das Fehlerverhalten beider Verfahren wird eingehend verglichen und an Beispielen erläutert. Schließlich wird ein Vergleich mit Abschätzungsformeln von Breiterbach und der Abschätzung bei den Differenzenschemaverfahren gegeben. R. Zurmühl.

El'sgol'c, I. E.: Näherungsmethoden für die Integration von Differenz-Differentialgleichungen. Uspechi mat. Nauk S. Nr. 4 (56), 81—93 (1953) [Russisch].

Drei Typen von Differenz-Differentialgleichungen, d. h. Gleichungen, bei denen die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen mit verschiedenen Werten des Arguments auftreten, werden unterschieden: solche mit nachhinkendem Argument, mit vorilegendem Argument und der neutrale Typ. Wenn die höchste Ableitung der unbekannten Funktion ein Argument besitzt, das nicht kleiner (größere

ist als die Argumente der Funktion und ihrer in der Gleichung auftretenden übrigen Ableitungen, so liegt der Typ mit nachhinkendem (voreilendem) Argument, andernfalls der neutrale Typ vor. Der erste Typ ist besonders wegen der Anwendungen in der Regelungstechnik der wichtigste, doch kommen auch die anderen bei praktischen Aufgaben vor, z. B. wenn die Geschwindigkeit eines Punktes in einem Augenblick nicht nur von der Lage, sondern auch von der Geschwindigkeit oder von der Geschwindigkeit und Beschleunigung in einem vorhergehenden Augenblick abhängt. Verf. stellt für eine Reihe von Fällen Erörterungen an über vorzuschreibende Anfangswerte, Eindeutigkeit, Stetigkeit der Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen und über die Übertragung der aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten angenäherten Lösungsverfahren (Methode der sukzessiven Approximationen, Differenzenschemaverfahren).

Werner Schulz.

Ljusternik, L. A.: Anwendung von Kubaturformeln zur numerischen Lösung des Cauchyschen Problems für gewisse partielle Differentialgleichungen. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 4 (56), 178—181 (1953) [Russisch].

Čečík, V. A.: Über die Anwendbarkeit der Methode von S. A. Čaplygin auf die angenäherte Integration nicht-linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 91, 741—744 (1953) [Russisch].

Die Methode von Čaplygin zur angenäherten Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen beruht auf einem Satz über Differentialungleichungen. Die Übertragung dieses Satzes auf partielle Differentialgleichungen lautet: Man setze $\partial z/\partial x = p$, $\partial z/\partial y = q$. Es sei $z = z(x, y)$ Lösung von $q = f(x, y, z, p)$ mit der Anfangsbedingung $z(x, y_0) = \varphi(x)$ und $z = v(x, y)$ Lösung von $q = f(x, y, z, p) + g(x, y)$ mit derselben Anfangsbedingung. Wenn in einem gewissen Gebiet $f_p \leq 0$ und $g(x, y) > 0$ ist, dann gilt $z(x, y) \leq v(x, y)$. Unter Benutzung dieses Satzes wird ein Algorithmus entwickelt, der eine Folge von Funktionen $v_n(x, y)$ liefert, derart daß $z(x, y) \leq v_{n+1}(x, y) \leq v_n(x, y)$ ist.

Werner Schulz.

Blanch, Gertrude: On the numerical solution of parabolic partial differential equations. *J. Res. nat. Bur. Standards* 50, 343—356 (1953).

Es wird für 3 Differenzenapproximationen der nichtlinearen Gleichung $u_t = u_{xx} + f(x, t, u)$ der Wert $\lambda = k/h^2$ (k und h Maschenweiten) gesucht, für den zur Erzielung einer vorgegebenen Genauigkeit der geringste Aufwand benötigt wird. Dieses ist nicht notwendig der bei Stabilität maximal zulässige Wert. Der Arbeitsaufwand wird der Zahl der Gitterpunkte, also der Größe $Z = 1/kh = 1/\lambda h^3$ proportional angenommen. Weiter wird die q' -Korrektur diskutiert, nach der man aus 2. Näherungslösungen zu $h = h_1$ und $h = h_2 = \rho h_1$ eine weitere erhält. Aufschlußreiche Beispiele werden angegeben, die u. a. den Einfluß der Ersetzung von u_{xx} erkennen lassen. Die Arbeit enthält einige kleinere Inkorrektheiten; so ist der Beweis der Stabilität von (5) nicht richtig.

H. Witting.

Ljusternik, L. A.: Über allgemeine Netzapproximationen des Laplaceschen Operators. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 91, 1267—1269 (1953) [Russisch].

Die Arbeit befaßt sich mit der Frage der Konvergenz der Eigenwerte allgemeiner Netzapproximationen des Laplaceschen Operators gegen die Eigenwerte des Laplaceschen Operators bei Verfeinerung des Netzes. Bei einfachen Eigenwerten konvergiert das zugehörige orthonormierte Eigenelement der Approximation gleichmäßig gegen die entsprechende Eigenfunktion des Laplaceschen Operators. Bei einem k -fachen Eigenwert ist jede zugehörige Eigenfunktion des Laplaceschen Operators der gleichmäßige Grenzwert linearer Kombinationen von k Eigenelementen der Approximation.

Werner Schulz.

Howe, R. M. and V. S. Haneman: The solution of partial differential equations by difference methods using the electronic differential analyzer. *Proc. Western Computer Conference* (Los Angeles, Cal., February 4—6, 1953), 208—226 (1953).

Die Verff. zeigen, wie man partielle Differentialgleichungen vom parabolischen und hyperbolischen Typus mit Hilfe von Integrieranlagen löst. Sie verwenden dabei das Verfahren von Slobodjanski (dies. Zbl. 28, 128), welches darin besteht, daß man den Bereich der Raumvariablen gitterartig unterteilt, die Zeit dagegen kontinuierlich variieren läßt. Indem man alle Ableitungen nach den Raumvariablen durch Differenzenausdrücke ersetzt, entsteht so aus einer (linearen) partiellen Differentialgleichung ein System von (linearen) gewöhnlichen Differentialgleichungen, für dessen Lösung die Verff. eine elektronische Integrieranlage verwenden. — Für die Wärmeleitungsgleichung und die Differentialgleichung des schwingenden Balkens werden die Schaltungen der Integrieranlage angegeben und die erhaltenen Ergebnisse diskutiert.

H. Rutishauser.

Rooijen, J. P. van: On numerical integration. Verzekerings-Arch. 30, Bijvoetsel actuar. 41—53 (1953).

Mittelwertformeln zur numerischen Auswertung von bestimmten Integralen werden mit Restglied einheitlich hergeleitet, wobei im allgemeinen Falle von der Lagrangeschen Interpolationsformel ausgegangen wird. Die wichtigsten und bekanntesten Formeln sind besonders beachtet.

E. J. Nyström.

Wansink, Joh. H.: Graphische Annäherung der Wurzeln quadratischer Gleichungen. Euclides, Groningen 28, 277—285 (1953) [Holländisch].

Verf. behandelt eingehend vom elementaren Standpunkte die graphische Lösung der Gleichungen $x^2 + p x + q = 0$ in der (p, q) -Ebene und fügt eine Reihe von Eigenschaften des Systems der geraden Linien $x = \text{const.}$ zu.

E. M. Bruins.

Hickerson, T. F.: A mathematical examination of spiraled compound curves. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 69, 108—115 (1953).

Auf einem ebenen Kurvenbogen der Länge l , sei die Krümmung $D = 100/R$, R : Krümmungsradius, linear von der Bogenlänge l abhängig: $D = D_1 + (l/l_s)(D_2 - D_1)$. Für die totale Radialverschiebung in Abhängigkeit von dem nominal spiral angle $\theta_s = (l_s/200)(D_2 - D_1)$ werden Reihenentwicklungen angegeben, und einige damit zusammenhängende Größen berechnet.

H. Gericke.

• **Pentkowski, M. W.:** Nomographie. Berlin: Akademie-Verlag 1953. XV, 268 S. mit 149 Abb. im Text. DM 15,—.

Das umfangreiche Buch ist in russischer Sprache 1949 im Staatsverlag der technisch-theoretischen Literatur der UdSSR erschienen. Die Redaktion der vorliegenden deutschen Übersetzung übernahm Joh. Fischer, Mitarbeiter am Institut f. Physikalische Hydrographie der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Die Elemente der Nomographie werden vorausgesetzt. Leitmotiv ist die sorgfältige Erörterung der Frage, auf die die meisten Leitfaden keine für die Praxis und für den Ingenieur ausreichende Antwort geben: Wie muß ein Nomogramm im Einzelfall gestaltet werden, um eine gewünschte Ablesegenauigkeit zu erreichen? Der erste Teil behandelt — ähnlich wie in den bekannten Lehrbüchern — die theoretischen Grundlagen der Konstruktion von Nomogrammen. Der zweite Teil bringt mit zahlreichen originellen, z. T. etwas abseits liegenden Beispielen und an Hand ausgezeichneter Figuren die praktischen Konstruktionsverfahren, wobei die projektiven Verzerrungen geschickt und weitgehend ausgenützt werden. Das Buch bereitet, wie der Herausgeber zutreffend sagt, den Weg zum Verständnis der deutschen Standardwerke vor.

F. Rehbock.

Jeger, M.: Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie. Eine Einführung in die Geometrie der Gewebe. Elemente Math. 8, 25—31, 49—53 (1953).

Elementarer Aufsatz über die Beziehungen zwischen Nomographie und Gewebegeometrie. Keine neuen Ergebnisse.

G. Bol.

Krienes, Klaus: Allgemeine Planimeterbeziehungen und einige Anwendungen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 365—368 (1953).

Die mechanische Auswertung des Integrals $\iint_B g(P) dF$ läßt sich für Polar- und Linearplanimeter von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus betrachten, indem die von der Meßrolle durchgeführte Kurve und der Winkel zwischen Rollennachse und Bahntangente in eine Beziehung zur Randkurve des Bereichs gebracht werden, die vom Integranden $g(P)$ abhängt. Für weitgehend willkürliche $g(P)$ lassen sich so die für Potenzplanimeter erforderlichen (variablen) Stellungen der Rollennachse unmittelbar erkennen. Zur konstruktiven Entwicklung von Planimetern dürfte dies von großem Wert sein.

H. Wundt.

Myard, Francis: Résolution grapho-mécanique des relations $\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$, $\psi(x) = f(x)/f'(x)$. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2143—2145 (1953).

Aus einer graphisch vorgegebenen Funktion $y = f(x)$ lassen sich auf kinematischem Wege die Kurven $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach einer vom Verf. entwickelten Methode in beweglichen Ebenen aufzeichnen. Da der Apparat aber auch in umgekehrter („reziproker“) Richtung arbeitet, lassen sich die Resultate zur mechanischen Integration von Differentialgleichungen verwerten.

H. Wundt.

Healy, M. J. R. and G. V. Dyke: A Hollerith technique for the solution of normal equations. J. Amer. statist. Assoc. 48, 809—815 (1953).

Purcell, Everett W.: The vector method of solving simultaneous linear equations. J. Math. Physics 32, 180—183 (1953).

\mathfrak{A} bezeichne die $n \times (n+1)$ -Matrix der Koeffizienten a_{ik} des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + a_{i, n+1} t = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die i -te Zeile von \mathfrak{A} werde als $(n+1)$ -dimensionaler Vektor mit v_i bezeichnet. Ausgehend von $n+1$ Vektoren $v_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, n+1$) (sämtliche Koordinaten = 0 mit Ausnahme der i -ten, die = 1 ist) werden n Konstanten $c_i^{(1)}$ bestimmt, so daß die Vektoren $v_i^{(1)} = c_i^{(1)} v_1^{(0)} + v_{i+1}^{(0)}$ ($i = 1, \dots, n$) orthogonal zu v_1 sind, sodann $n-1$ Konstanten $c_i^{(2)}$, so daß die Vektoren $v_i^{(2)} = c_i^{(2)} v_1^{(1)} + v_{i+1}^{(1)}$ ($i = 1, \dots, n-1$) orthogonal sind zu v_2 und damit auch zu v_1 , usw.; schließlich wird ein Vektor $v_n^{(n)}$ (mit letzter Koordinate = 1), der orthogonal ist zu allen v_i , erhalten, womit die Lösung des Systems gefunden ist. Insgesamt hat man $\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)$ Multiplikationen durchzuführen. Das Verfahren ist auf den IBM Card Programmed Calculator zugeschnitten. Es folgt eine auf dem gleichen Gedanken beruhende Methode zur Auswertung von Determinanten.

G. Schulz.

● Bowden, B. V. (edited by): Faster than thought: A symposium on digital computing machines. London: Sir Isaac Pitman and Sons Ltd. 1953. XIX, 416 p.; 18 plates. 35 s. net.

Das vorliegende Buch will eine allgemeinverständliche Übersicht vor allem über die heute in Großbritannien arbeitenden elektronischen Ziffernrechenautomaten und ihre Verwendung geben. In ihm haben 24 auf dem behandelten Gebiet führende Wissenschaftler zusammengearbeitet. Der erste Abschnitt behandelt Geschichte und Theorie dieser Maschinen. Hier wird auch auf Einzelheiten der Konstruktion eingegangen. Mehrfach wird darauf hingewiesen, daß sich die in den heutigen Maschinen verwirklichten Ideen fast alle bei Babbage finden. Die einzige ausführliche Darstellung der von diesem geplanten Maschine findet man in den von Menabrea ausgearbeiteten Vorträgen, die Babbage 1840 in Turin gehalten hat. Dieser Aufsatz wurde von Lady Lovelace ins Englische übersetzt und mit ausführlichen Anmerkungen versehen. Der Neudruck ihrer Arbeit bildet den 68 Seiten umfassenden Anhang dieses Buches. Im zweiten Abschnitt werden 8 in England arbeitende Maschinen, unter diesen außer den bekannten in Manchester, Cambridge und Teddington auch weniger bekannte wie der SCC der Flugwaffe, die Maschine in Harwell, die im Imperial College, im Birbeck College usw. beschrieben. Den Schluß dieses Abschnittes bildet eine kurze Übersicht über die wichtigsten in den USA arbeitenden Automaten. Der letzte umfangreichste Abschnitt geht auf die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der elektronischen Ziffernrechenautomaten ein. Es wird ihre Verwendung zur Behandlung logischer Probleme besprochen, weiter wird auf die für die Lösung spezieller Fragen gebauten Maschinen eingegangen, auf die Verwendung der allgemeinen Maschinen in der Kristallographie, in der Meteorologie, der Außenballistik, sowie in der Astronomie, ferner in Technik und Wirt-

schaft. Sodann wird erörtert, in wieweit diese Maschinen Schach, Nim oder ähnliche Spiele spielen können. Ein letztes Kapitel befaßt sich mit der Frage, ob die Automaten denken können. — Obwohl die Darstellung allgemein verständlich gehalten ist, dürfte das Verständnis einiger Abschnitte für einen gar nicht mit der Materie vertrauten Leser doch recht schwierig sein.

Fr.-A. Willers.

● **Booth, A. D. and K. H. V. Booth: Automatic digital calculators.** London: Butterworth Scientific Publications 1953. VIII, 321 p. 32 s.

Das Buch ist als Einführung in Theorie, Entwurf, Bau und Anwendung digitaler Rechenmaschinen geschrieben. Nach einer kurzen Erörterung des Wesens und der Wirkungsweise von Rechenautomaten wird ein historischer Überblick über die Entwicklung solcher Maschinen von Pascal, Leibniz und Babbage bis zur Gegenwart gegeben. Auch das erste Kapitel des zweiten Teils, der den Aufbau und die Bauelemente von Rechenautomaten behandelt, ist einer Betrachtung der Eigenschaften, des prinzipiellen Aufbaues und der Leistungsfähigkeit der wichtigsten bisher gebauten digitalen elektronischen Rechenautomaten, angefangen beim ENIAC, gewidmet. Anschließend werden, ausgehend vom grundsätzlichen Aufbau eines Rechenautomaten mit den Haupteinheiten Speicher, Steuerung und Eingang-Ausgang, die einzelnen Bauelemente erörtert. Es wird zunächst gezeigt, daß die Form der Steuerung bestimmt wird durch die gewählte Befehlsverschlüsselung. Dann wird sehr eingehend das Rechenwerk für die Ausführung der 4 Grundrechenarten, und zwar sowohl für Parallel- wie auf für Serienmaschinen behandelt. Übersichtliche Blockschaltbilder erleichtern das Verständnis. Weiterhin sind die prinzipiellen Möglichkeiten und die bis jetzt zur Verfügung stehenden Einrichtungen für Eingang und Ausgang zusammengestellt. Den Inhalt der nächsten Kapitel bilden die Einzelelemente wie Durchlässe (gates), Flip-Flops, Zählröhren und Verschiebungsregister, wobei jedoch die Transistoren noch nicht berücksichtigt sind, obwohl diese schon in Rechenautomaten Verwendung finden. Abgeschlossen wird der zweite Teil durch eine vollständige Beschreibung der verschiedenen Speichertypen für statische und dynamische Speicherung. Im dritten Teil des Buches wird die Befehlsverschlüsselung und Programmierung behandelt, wobei als Beispiel der von den Verff. entwickelte Rechenautomat A. P. E. (X.) C. (All Purpose Electronic X-ray Computer, Birkbeck College, London) gewählt wurde. Die Verwendung von Subroutinen für besondere Operationen wie Division, Wurzelziehen usw. wird stark betont. Im letzten Kapitel dieses Teils wird gezeigt, wie die Programme den gestellten Aufgaben entsprechend am günstigsten entworfen werden. Den Schluß des Buches bildet ein Kapitel über einige praktische Anwendungen von Rechenautomaten bei Röntgenstrukturuntersuchungen, als Übersetzer von einer Sprache in die andere und als Spielpartner bei verschiedenen Spielen wie z. B. Whist. Eine wertvolle Beigabe ist das ausführliche Schrifttumverzeichnis.

W. Breitling.

● **Gibellato, Silvio: La macchina calcolatrice analogica elettrica „G. A. Philbrick“.** Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **12**, 53—66 (1953).

Die Arbeit beschreibt eine elektronische Integrieranlage, die eine Integralkurve in 4 Millisekunden durchläuft und diese dauernd wiederholt, so daß das Resultat als stationäres Bild auf dem Schirm eines Kathodenstrahl-Oszillographen beobachtet werden kann. Der erste Teil gibt eine Erläuterung über die Funktionen der einzelnen Bausteine. Im zweiten Teil werden die elektrisch bedingten Fehlerquellen einzeln erläutert und ihr Einfluß auf die Lösungen diskutiert. Für einige Beispiele sind die Schaltschemata und die Lösungskurven gegeben.

Ambros. Speiser.

● **Greig, John: Technical developments. The circle computer.** Math. Tables Aids Comput. **7**, 249—255 (1953).

Ein mehrere hundert Röhren enthaltender Kleinrechenautomat wird beschrieben. Er wird in mehreren Ausführungen für Verkaufszwecke gebaut und ist einfach zu bedienen. Der Speicher ist ein Magnetrommelspeicher (3540 U/min) für 40 stellige Dualzahlen und hat in der Standardausführung eine Kapazität von 1024 Zellen. Eine Ausführung mit 4096 Zellen, die auch mit Zahlen halber Länge arbeiten kann, wird konstruiert. Ein- und Ausgabe erfolgen mit elektrischer Schreibmaschine und Streifenlocher mit einer Geschwindigkeit von einer 8-stelligen Dezimalzahl je Sekunde. Die Umwandlung ins und vom Dualsystem läuft automatisch ab. Der logische Aufbau folgt dem der IAS-Maschinen, die die Zahlenspeicher gleichzeitig als Befehlsspeicher (hier 2 Befehle je Zelle) benutzen und in denen jeder Befehl direkt vor der Ausführung noch geändert werden kann. Die Maschine arbeitet mit Einadreßbefehlen. Ein besonderer Sprungbefehl speichert die zuletzt verwendete Befehlsnummer und ermöglicht es dadurch, Unterprogramme bequem einzubauen. Eine Liste der Befehle und der durchschnittlichen Operationszeiten schließt die Arbeit ab. Je Sekunde werden im Mittel etwa 25 Operationen ausgeführt.

Fr.-A. Willers.

● **Larsen, Harold D.: Rinehart mathematical tables, formulas and curves.** Enlarged ed. New York: Rinehart and Company, Inc. 1953. VIII, 280 p. \$ 2,—.

• **Peters, J.:** Sechstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. 4. Aufl. Bonn: Ferdinand Dümmler 1953. 293 S. DM 35,—.

Hammersley, J. M.: Tables of complete elliptic integrals. J. Res. nat. Bur. Standards 50, 43 (1953).

Die vollständigen elliptischen Integrale $K(k)$ und $E(k)$ sowie $M(k) = \pi/2K$ sind tabelliert mit 9 Dezimalen für $1/k = 1(0,01)1,3(0,02)2$. Die Berechnung erfolgte mit dem Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittel. *H. Unger.*

Marden, Ethel, Kathryn Christoph, Anne Futterman, Renee Jasper, Sally Tsingou, and Bernard Urban: Struve function of order three-halves. J. Res. nat. Bur. Standards 50, 21—29 (1953).

$h_{3/2}(x) = (1 + 2/x^2) - (2/x)(\sin x + \cos x/x) = (2\pi/x)^{1/2} H_{3/2}(x)$, wobei $H_{3/2}$ die Struvefunktion der Ordnung $3/2$ darstellt, ist für $x = 0(0,02)15$ mit 10 Dezimalen und zweiten zentralen Differenzen (teilweise modifiziert) tabelliert. Mit Everetts Formel kann ohne Genauigkeitsverlust interpoliert werden. Die Berechnung wurde mit dem SEAC (National Bureau of Standards, Washington) durchgeführt. *H. Unger.*

• **Probability tables for the analysis of extreme-value data.** (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 22.) Washington: Government Printing Office 1953. III, 32 p. 25 cents.

Eine Zufallsvariable ist einem gegebenen Verteilungsgesetz $F(x)$ unterworfen. Man betrachtet eine Gruppe von n unabhängigen Versuchen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle n Ergebnisse $\leq x$ sind, d. h. daß der größte dieser Werte $\leq x$ ist, führt — wie R. A. Fisher, L. H. C. Tippett und R. v. Mises gezeigt haben — unter gewissen Voraussetzungen in der Grenze $n \rightarrow \infty$ auf die Funktion $\exp(-e^{-y})$. In der vorliegenden Tafel gibt E. J. Gumbel einen Bericht über die Theorie, die vorliegende Literatur, die mannigfachen Anwendungen (u. a. Voraussagen von Hochfluten, Regen- und Dürrezeiten) und die Berechnung der Tafeln. Tabuliert sind hier: $\Phi_y = \exp(-e^{-y})$ und $\varphi_y = \Phi'_y = \exp(-y - e^{-y})$ für $y = -3(0,1)-2,4(0,05)0(0,1)4(0,2)8(0,5)17(7 \text{ Dez.})$, ferner $y = -\ln(-\ln \Phi_y)$ für $\Phi_y = 0,0001(0,0001)0,005(0,001)0,988(0,0001)0,9994(0,00001)0,99999(5 \text{ Dez.})$ und $\varphi_y = -\Phi_y \ln \Phi_y$ für $\Phi_y = 0(0,0001)0,01(0,001)0,999(5 \text{ Dez.})$ sowie weitere im Zusammenhang mit dem genannten Problem stehende Funktionen. *G. Schulz.*

Tikson, Michael: Tabulation of an integral arising in the theory of cooperative phenomena. J. Res. nat. Bur. Standards 50, 177—178 (1953).

Für $b^{-1} = \mu = 0(0,01)1$ wird das Integral

$$\pi^3 I(b) = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi [3b - (\cos x + \cos y + \cos z)]^{-1} dx dy dz$$

mit 5 Dezimalen angegeben. Die Berechnung erfolgte für $\mu = 0(0,01)0,8$ mit der

Reihenentwicklung $I(b) = \frac{\mu}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2m} (2m)! c_{2m} \mu^{2m}$, deren Koeffizienten c_{2m}

für $m = 0(1)20$ ebenfalls vertafelt sind, und für $\mu = 0,8(0,01)1$ nach einigen Umformungen mittels numerischer Integration. *H. Unger.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Gurland, John: Distribution of quadratic forms and ratios of quadratic forms. Ann. math. Statistics 24, 416—427 (1953).

X sei eine (als Spaltenvektor geschriebene) n -dimensionale zufällige Variable. Ihre Verteilung sei eine nichtsinguläre n -dimensionale Normalverteilung, Q und P seien symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen. Verf. untersucht die Verteilung von $X' Q X$, wenn I. Q positiv definit ist, II. Q beliebig gegeben ist und III. die Verteilung von

$X' Q X / X' P X$, wenn P positiv definit ist. — III. läßt sich auf II. zurückführen. (Vgl. auch Gurland, dies. Zbl. 32, 34.) Unter Zuhilfenahme eines Aquikonvergenztheorems von Szegő (s. dies. Zbl. 23, 215) für Laguerresche Reihen und Fourierentwicklungen wird die Konvergenz der Entwicklung nach Laguerreschen Polynomen für die Verteilungsfunktion von I. für positives Argument z und von II. für $z = 0$ und $z < 0$ gezeigt. Für $z = 0$ wird $(C, 1)$ -Summierbarkeit bewiesen. Einige kleine Ungenauigkeiten: Satz 1 gilt nicht für jede beliebige Dichte $p(x)$ (x ein n -dimensionaler Vektor), sondern nur für solche, für welche das Integral $\int_{R_n} x' P x p(x) dx$ einen Sinn hat. Im Lemma 1 muß es $o(x^{-\gamma})$ statt $o(x^{-\gamma})$, für $x \rightarrow \infty$ heißen. S. 424, 8. Z. v. o. lies $\Delta u \rightarrow 0$ statt $u \rightarrow 0$. L. Schmetterer.

Chung, K. L.: Correction to my paper „Fluctuations of sums of independent random variables“. Ann. of Math., II. Ser. 57, 604—605 (1953).

Vgl. dies. Zbl. 37, 83.

Klamkin, M. S.: On the uniqueness of the distribution function for the Buffon needle problem. Amer. math. Monthly 60, 677—680 (1953).

Die übliche Lösung des Nadelpblems ($P = 2L\pi D$ für Nadellänge $L <$ Parallelenentfernung D ; $P = 2[\varphi D + L(1 - \sin \varphi)]\pi D$, $\cos \varphi = D/L$, für $L > D$) ist nur im Falle der Gleichverteilung gültig (W.-Dichte $= f(x, \theta) = \text{Konst.}$, $x =$ Abszisse, $\theta =$ Winkel), wenn Unabhängigkeit ($f(x, \theta) = h(x)g(\theta)$) vorausgesetzt wird. Die Gültigkeit für $L < D$ führt nur zu $h(x) = \text{Konst.}$, $g(\theta)$ unbestimmt ($g(\theta) = 1 + \alpha(\theta)$, $\int \alpha d\theta = \int \alpha \cos \theta d\theta = 0$ in $(0, \pi/2)$). B. de Finetti.

Mantel, Nathan: An extension of the Buffon needle problem. Ann. math. Statistics 24, 674—677 (1953).

Statistische Genauigkeit der empirischen Bestimmung von π mittels Buffons Nadelversuch und ähnlicher Verfahren. B. de Finetti.

Bush, Robert R. and Frederick Mosteller: A stochastic model with applications to learning. Ann. math. Statistics 24, 559—585 (1953).

The following process is considered in this paper: two alternatives with probabilities p and $1 - p$ are given, and successive trials are made. The probabilities are altered by a linear transformation Q , whenever one event E_i out of t possible ones happens. The authors mention, without proof in this paper, a „trapping theorem“ which states that if a starting value of p is inside calculable limits, it remains there, otherwise it will get inside the interval, or tend to one of the limits monotonically. The difference equation for the moments of the distribution of the possible values for p after n events is derived, assuming that the probability distribution of the events, when they occur, is known. Later, alternatives and events are identified and approximate bounds are derived for the first two moments. The problem of estimating the parameters of the scheme is discussed for various special cases and the model is illustrated by examples taken from learning situations of human and of animal subjects. S. Vajda.

Bellman, Richard: On a generalization of classical probability theory. I. Markoff chains. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1075—1077 (1953).

Der Verf. betrachtet verallgemeinerte Markoffsche Ketten, in denen an Stelle einer gewöhnlichen Variablen semifinite Matrizen als Elemente treten. Er formuliert im Sinne einer Vorankündigung gewisse Sätze bezüglich Transformation und Konvergenz solcher Ketten — ein ausführlicher Bericht soll später folgen. W. Sauer.

Franckx, E.: La génération d'une chaîne de Markoff. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 53, 145—151 (1953).

Die Potenzen P^h der stochastischen Matrix $P = \{p_{ij}\}$ werden mittels der Identität $P^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P^i$ ($\alpha_i =$ Matrizeninvarianten, $n =$ Matrizenordnung) für $h > n$ rekursiv dargestellt. B. de Finetti.

Jensen, Arne: Markoff chains as an aid in the study of Markoff processes. Skand. Aktuarietidskr. 1953 (36), 87—91 (1953).

Es ist zweckmäßig, Markoffsche Prozesse ($P'(t) = A \cdot P(t)$) auf Markoffsche Ketten ($B_n = B^n$) folgendermaßen zurückzuführen: $B = I + \alpha^{-1} A$, $P(t) =$

$\sum_n e^{-\alpha t} B^n(\alpha t)^n/n!$ [A = Matrix der Übergangswahrscheinlichkeitsintensitäten a_{ij} , $(a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij})$, $\alpha \geq \max |a_{ii}|$, I = Einheitsmatrix, B und P Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten der Markoffschen Kette bzw. des Markoffschen Prozesses].
B. de Finetti.

Perfect, Hazel: Methods of constructing certain stochastic matrices. Duke math. J. 20, 395—404 (1953).

The author gives the statement and his own proof of a theorem due to A. Brauer (this Zbl. 46, 12, Theorem 27 of this note). As an application, the following theorem is proved: for the $n + 1$ real numbers $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ with $|\lambda_i| \leq 1$ ($i = 0, \dots, n$) to be a possible set of eigenvalues of a simple Markoff matrix of order $n + 1$, it is sufficient that there should be a possible subdivision of the set into subsets, each subset having the property that the sum of moduli of the negative integers in the set does not exceed the greatest positive integer of the subset. K. Yosida.

● Blanc-Lapierre, A. et Robert Fortet: Théorie des fonctions aléatoires. Paris: Masson et Cie. 1953. XVI, 693 p. 6.000 fr.

This extensive book, written by a physicist and a probabilist, addresses both these groups of scientists and is intended to bridge the gap between them. To give an intuitive background, Ch. I presents a collection of physical problems involving stochastic functions. Ch. II contains prerequisites from the general theory of probability whereas Ch. III gives the outlines of the theory of stochastic functions, including such topics as continuity, integrability, and the insufficiency of the probability field generated by the finite-dimensional distributions. Ch. IV contains a classification of stochastic processes and also the main facts about Wiener and Poisson processes. Ch. V discusses processes derived from the latter by assuming that each event gives rise to a more or less lasting (random or non-random) effect, the observed functions $X(t)$ being the sum of these effects. Chs. VI—VII are devoted to the theory of Markov processes, Chs. VIII—X to harmonic analysis and linear operations (filters) applied to processes (not necessarily stationary) with finite covariance functions. Ch. XI then particularly treats the stationary processes (wide sense) and Ch. XII the Gaussian processes. Chs. XIII—XIV are devoted entirely to applications, viz. the problems of noise and turbulence; the latter is written by Kampé de Fériet. The closing Ch. XV is a supplement on general mathematical concepts such as sets, measure, integrals, Hilbert and Banach spaces, etc. When reviewing a book of the present type it seems appropriate to draw particular attention to traits and topics inspired by the applications. Among these are the above-mentioned extended Poisson-processes; a section on additive functionals of Markov processes; the theory of filters and the detailed examples in Chs. VIII—X; the application to light theory of the Gaussian processes; and, of course, the two large chapters on noise and turbulence. The emphasis is throughout on making physicists familiar with mathematical ideas, and vice versa. Accordingly, there is no great stress on mathematical rigor. Many proofs are sketched or omitted. There are few references in the text; instead, there is a large bibliography at the end of the book and short references at the end of the main sections. G. E[rl]ving.

Lévy, Paul: Processus markoviens et stationnaires du cinquième type (infinité dénombrable d'états possibles, paramètre continu). C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1630—1632 (1953).

This paper is a continuation of the author's papers (this Zbl. 44, 338; 48, 362). Let F_1 be the set of all instantaneous states of a stationary Markoff process P with an enumerable number of possible states. Discarding on the t -axis all points which correspond to states outside F_1 , a new stationary Markoff process P_1 is derived. For the process infinity of states are no longer instantaneous. Let the (possibly void) set of the totality of the instantaneous of P_1 be F_2 , and derive the process P_2 from P_1 as we have derived P_1 from the original process P . Repeat such derivation indefinitely and transfinitely, and let ϱ be the smallest ordinal number (of finite or enumerable type) for which P_ϱ has no instantaneous states. The original process P is, under the above situation, called of order ϱ of the 5th type. The author has previously considered the case $\varrho = 1$. As an application, the following result is proved: Let E_k^α be the closure of the t -set at which the state A_k is realized. Then the number of those t belonging to more than one E_k^α is at most enumerable. K. Yosida.

Blanc-Lapierre, André: Sur l'application de la notion de fonction caractéristique à l'étude de certains problèmes de mécanique statistique. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1635—1637 (1953).

Rohde, K. und H. Störmer: Durchlaßwahrscheinlichkeit bei Vermittlungseinrichtungen der Fernmeldetechnik. Mitteil.-Bl. math. Statistik 5, 185—200 (1953).

Die Verf. behandeln den Verkehrsfluß über Vermittlungseinrichtungen, die eine unter mehreren freien Leitungen aussuchen und dann die Verbindung durchschalten. Sie geben zunächst eine kurze Übersicht über die allgemeine statistische Behandlung des Problems und untersuchen dann den Einfluß verschiedener Einrichtungen auf die Zahl der ausführbaren Vermittlungsaufträge. Die Mitwirkung der Koppelschaltung wird durch eine „Durchlaßwahrscheinlichkeit“ $\mu(x, v_2)$ erfaßt, wobei v_2 die Zahl der Abnehmerleitungen und x die Zahl der in einem Zeitpunkt durchgeschalteten Gespräche ist. Das Ergebnis der Formelentwicklungen und Rechnungen sind „Durchlaßkennlinien“ für Koppelschaltungen mit verschieden gut „gemischten“ Koppelanordnungen, dargestellt beispielsweise für $v_2 = 40$ Abnehmerleitungen.
P. Lorenz.

Barbot, Jacques: Étude mathématique généralisée du jeu de Nain Jaune. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 64, 95—348 (1953).

This long paper examines in great detail a game called „Grand Linder“ which is defined as follows: The game consists of a succession of rounds. At the beginning of the n -th round a pool contains an amount u_n . At the beginning of the next round there is a probability $p(x)$ ($x = 1, 2, \dots, m$) that the pool amounts to $u_{n+1} = u_n \cdot x + m_{n+1}$ (where the m_{n+1} may be considered as stakes, and the values of x above 1 may be indications of fines). The author is mainly concerned with studying the distribution of the values u_n , in particular for large n , using Markov techniques. He derives formulae for the first two moments. [The bibliography to which he refers is out of date by present standards, but it should be mentioned that the paper was written in 1949.] Special cases of Grand Linder are certain card games which the author calls, by their French names, Loterie, Bog, Guimbarde, Nain Jaune, and Poque. S. Fajda.

Berge, Claude: Le problème du gain dans la théorie généralisée des jeux sans informations. Bull. Soc. math. France 81, 1—8 (1953).

The author deals with „Neumannian“ games as defined in his earlier paper (this Zbl. 50, 356) and derives necessary and sufficient conditions for a theorem analogous to the minimax theorem in the theory of games. The results are expressed in terms of the structure of information and are of an abstract nature. S. Fajda.

Shapley, L. S.: Stochastic games. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1095—1100 (1953).

Es wird eine weitgehende Verallgemeinerung des (2-Personen-0-Summen-)Matrixspiels behandelt. N Positionen $1, \dots, N$ durchlaufen zwei Spieler A, B in der folgenden Weise: In der Position k wählen A und B unabhängig voneinander je eine natürliche Zahl i bzw. j , $1 \leq i \leq m_k$, $1 \leq j \leq n_k$. Nachdem B an A den Betrag a_{ij}^k bezahlt hat, geht das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit s_{ij}^k zu Ende und mit der Wahrscheinlichkeit p_{ij}^{kl} zur Position l über, wo in der gleichen Weise verfahren wird. $(a_{ij}^k), (s_{ij}^k), (p_{ij}^{kl})$ sind also für jedes k bzw. k, l definierte Matrizen mit reellen Koeffizienten, $s_{ij}^k + \sum_l p_{ij}^{kl} = 1$. Wird in k begonnen, so sei dadurch das Spiel I^k erklärt. Die Zusammenfassung (I^1, \dots, I^N) nennt Verf. das „stochastische Spiel“ Γ . I^k ist ein 2-Personen-0-Summenspiel. Wegen der nicht beschränkten Länge der einzelnen Partien ordnet sich I^k jedoch nicht unmittelbar in den Gültigkeitsbereich des Minimax-Prinzips J. v. Neumanns ein. Es wird aber gezeigt: I^k besitzt einen Wert Φ^k derart, daß A bzw. B durch gemischte Strategien im Mittel über eine genügend große Partienzahl Φ^k bzw. $-\Phi^k$ als Gewinn beliebig genau erzwingen kann. $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^N)$ stellt sich als einzige Lösung des Systems

$$\Phi^k = \text{val} \left(a_{ij}^k + \sum_l p_{ij}^{kl} \Phi^l \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

dar, wobei allgemein $\text{val}(r_{ik})$ der Wert des zur Matrix (r_{ik}) gehörigen Matrixspiels im v. Neumannschen Sinne ist. Unter den optimalen Strategien existieren für beide Spieler sogenannte stationäre, das sind solche, bei denen das Verhalten der Spieler in jeder Position k nur von k und nicht auch von dem vorausgegangenen Spielablauf abhängt.
W. Gaschütz.

Statistik:

● Clark, C. E.: *An introduction to statistics*. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1953. X, 266 p. \$ 4,25.

Dieses Buch wendet sich an den Nicht-Mathematiker und Nicht-Statistiker, der in seiner Forschungsarbeit oder Praxis auf die Verwendung statistischen Gedankengutes oder auf Mitarbeit von Statistikern angewiesen ist, und beabsichtigt, ihm Einblick in den Sinn statistischer Verfahren zu gewähren, in ihm Verständnis für die statistische Denkweise zu erwecken. Im Gegensatz zu den bereits vorhandenen, allzu zahlreichen „Einführungen in die Statistik“ sucht diese Schrift nicht, dem Laien alle Einzelheiten der beschreibenden Statistik zu vermitteln, sondern die Grundgedanken der statistischen Schlußweisen, also der Stichprobentheorie zu erklären; der Akzent liegt keineswegs auf dem technischen Verfahren, sondern ausschließlich auf den tragenden Ideen. Demgemäß werden keinerlei mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt oder verwendet, und es wird sowohl auf jeglichen mathematischen Formalismus verzichtet, als auch auf fast alle mathematischen Beweise. Die Grundgedanken werden an Hand von numerischen Beispielen ausführlich und anschaulich dargelegt; jedem Abschnitt folgt eine Reihe angemessener Übungsaufgaben, deren Lösungen am Schlusse des Buches gegeben werden. Naturgemäß ist der Stoffumfang bescheiden: Grundbegriffe, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Signifikanzteste und Confidenzschluß, Binomial- und Normalverteilung, Beurteilung und Vergleich von Mittelwerten und Häufigkeiten in Stichproben, Varianzanalyse (einfachster Fall), χ^2 -Test, Korrelationskoeffizient. Die im Anhang abgedruckten Tabellen der Normal-, Student-, F - und χ^2 -Verteilung werden im Text durch geeignete Nomogramme veranschaulicht. *M. P. Geppert.*

Savage, I. Richard: *Bibliography of nonparametric statistics and related topics*. J. Amer. statist. Assoc. 48, 844—906 (1953).

Lewis, T.: 99,9 and 0,1% points of the χ^2 distribution. Biometrika 40, 421—426 (1953).

Verf. gibt in zwei Tabellen für $n = 1, 2, \dots, 30, 40, \dots, 100, 120$ bzw. $n = 40, 50, \dots, 100, 120$ die $P = 0,999$ bzw. $0,001$ entsprechenden Fraktile der χ^2 -Verteilung mit n Freiheitsgraden, tabuliert also die Lösung χ^2 der Gleichung:

$$\int_{\chi^2/2}^{\infty} \frac{e^{-t} t^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} dt = P,$$

und zwar als Lösung von $f(v) = f(\chi^2/2) = 0$ mit

$f(v) = 1 + v + v^2/2! + \dots + v^{n/2-1}/(n/2-1)! - P \cdot e^v$ (n gerade) bzw.

$$f(v) = \sqrt{2/\pi} \cdot e^v \int_{\sqrt{2v}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \frac{v^{1/2}}{(1/2)!} + \frac{v^{3/2}}{(3/2)!} + \dots + \frac{v^{n/2-1}}{(n/2-1)!} - P \cdot e^v \quad (n \text{ ungerade}).$$

Die bis zur 8-ten Dezimalstelle genauen Werte ergeben sich durch iterative Approximation und beruhen auf Reihenentwicklung von χ^2 nach fallenden Potenzen

von $n/2$, deren Koeffizienten Polynome der durch $P = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$ bestimmten

Fraktile x der Normalverteilung sind. Diese Reihe wird verglichen mit den bekannten Approximationen der χ^2 -Verteilung durch Normalverteilung nach R. A. Fisher bzw. nach Wilson-Hilferty. *M. P. Geppert.*

Azorin Poch, Francisco: Über die nicht zentrale t -Verteilung. Verallgemeinerungen und verwandte Verteilungen. Trabajos Estadist. 4, 173—198 und 307—337 (1953) [Spanisch].

The author surveys formulae concerning the non-central t -distribution (the case where the numerator contains the central chi-squared, and that when it contains a non-central chi-squared) and then considers transformations to approximate more closely to normal distributions. He mentions various applications and adds remarks on a generalisation to more dimensions. *S. Vajda.*

Weibull, Martin: The distribution of t - and F -statistics and of correlation and regression coefficients in stratified samples from normal populations with different means. Skand. Aktuarietidskr., Suppl. 36, Nr. 1/2, 1—106 (1953).

The paper starts with a useful survey of the non-central normal, chi-squared, t - and F -distributions, defined in such a way that the chi-squared appearing in the denominator of t and F is also allowed to be non-central. The formulae are then used to study the distributions of the usual statistics arising in stratified sampling from normal populations with different means, but equal variances. Regression analysis and multidimensional statistics are also considered. Some of the results have already been communicated by the author in earlier papers (this Zbl. 44, 143).

S. Vajda.

Gieseke, Hanswalter: Die Anwendung der statistischen Prüfverfahren auf Reihen mit Erhaltungsneigung und kontinuierliche Gesamtheiten. Mitteil.-Bl. math. Statistik 5, 103—124 (1953).

Die theoretische Begründung der statistischen Prüfverfahren, wie t -Test (Prüfen von Durchschnitten), F -Test (Prüfen von Streuungen) usw. beruht bekanntlich auf den beiden Voraussetzungen, das untersuchte Merkmal befolge die Normalverteilung und die betrachteten Einzelwerte seien voneinander stochastisch unabhängig. Die vorliegende Abhandlung befaßt sich mit der Frage, ob die statistischen Prüfmethode auch anwendbar seien auf Stichproben, die aus Reihen mit Erhaltungsneigung oder kontinuierlichen Gesamtheiten stammen. In tiefgründigen Ausführungen wird dargelegt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Man hat einen effektiven Stichprobenumfang N_{eff} zu bestimmen — der sowohl von der Struktur der Grundgesamtheit als auch von der jeweiligen Problemstellung abhängig ist —, für welchen dann die klassischen Testmethoden sinngemäß gelten. Für zwei einfache Klassen von Modellfunktionen, nämlich „Zufallsfolgen mit Wiederholung“ und „geglättete Zufallsfolgen“, ergeben sich für N_{eff} besonders übersichtliche Ansätze.

W. Wegmüller.

Gebelin, Hans: Einige Bemerkungen und Ergänzungen zum graphischen Verfahren von Mosteller und Tuckey. Mitteil.-Bl. math. Statistik 5, 125—142 (1953).

Der Verf. greift ein von Mosteller und Tuckey (dies. Zbl. 32, 419) stammendes nomographisches Verfahren auf. Es handelt sich um eine allgemeine Methode, um auf graphische Art die bei statistischen Schlüssen und Prüfverfahren gewünschten Auskünfte über Streuungen und Seltenheitsgrade zu erhalten. Gebelin gebührt das Verdienst, die Grundlagen des Prüfverfahrens durch eigene theoretische Untersuchungen kritisch beleuchtet zu haben. Ausgangs-

lage bildet die binomische Verteilung $f(n_0) = \binom{n}{n_0} p^{n_0} (1-p)^{n-n_0}$; vermöge der Transformation $p = \cos^2 \beta$ erhält man für die Erwartungswerte: $E(n_0) = n p = n \cos^2 \beta$ und $E(n_1) = E(n - n_0) = n \sin^2 \beta$ sowie für die Streuung $\text{Str}(n_0) = \text{Str}(n_1) = [n p(1-p)] = [n \cos \beta \sin \beta]$. Werden $E(n_0)$ und $E(n_1)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszisse und Ordinate aufgetragen, so entsteht das Geradenbüschel $y/x = \tan^2 \beta = (1-p)/p$. Bildet man aus einer Grundgesamtheit mit der Elementarwahrscheinlichkeit p Stichproben vom Umfange n und zeichnet die beobachteten Werte (n_0, n_1) im Diagramm auf, so ist die Abweichung des Punktes (n_0, n_1) zur Geraden mit dem betreffenden p entscheidend für die Beurteilung des empirischen Befundes (n_0, n_1) . Das Prüfen des in Streuungseinheiten gemessenen Abstandes vereinfacht sich wesentlich, falls im Sinne von Mosteller und Tuckey die Quadratwurzeln von n_0 und n_1 als Abszissen- und Ordinatenmaßstab gewählt werden. Sinnvolle Beispiele erläutern das Prüfverfahren. Wertvoll ist im weiteren der theoretische Nachweis, daß sich auch der mit dem F -Test durchzuführende Vergleich zweier Streuungen näherungsweise graphisch beurteilen läßt. Das nomographische Verfahren kann aber auch für die drei endlichen Schlußweisen, nämlich den Inklusions-, Repräsentations- und Transponierungsschluß verwendet werden; hierzu bedarf es einfacher Zusatzkonstruktionen.

W. Wegmüller.

Darmois, G.: Analyse générale des liaisons stochastiques. Etude particulière de l'analyse factorielle linéaire. Revue Inst. internat. Statist. 21, 2—8 (1953).

Das Wichtigste der Theorie der Faktor-Analyse wird kurz zusammengefaßt. Mehrere Ergebnisse und Beweise werden verallgemeinert und vereinfacht, bei Benutzung von Funktionalgleichungen für die charakteristischen Funktionen, wie z. B. $q_x(a u + c v) q_y(b u + d v) = q_X(u) q_Y(v)$, und des Satzes von Marcinkiewicz-Dugué.

B. de Finetti.

Ogasawara, Tōzō and Masayuki Takahashi: Orthogonality relation in the analysis of variance. I, II. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 457—470 (1953); 17, 27—41 (1953).

I. Der Grundgedanke der Varianzanalyse besteht in der Zerlegung einer Gesamtsumme von Abweichungsquadraten in voneinander stochastisch unabhängige

quadratische Formen, die ebenfalls Summen von Abweichungsquadraten sind und die Grundlage für die Anwendung statistischer Tests zur Prüfung bestimmter Hypothesen bilden. Zum formalen Studium dieser Zerlegung definiert Verf. Klassifikationen und ihnen zugeordnete projektive Operatoren, und beweist 9 Hilfssätze und 23 Theoreme über Orthogonalität, Kommutativität der gewöhnlichen und Wechselwirkungs-(interaction)-Operatoren und Freiheitsgrade der entsprechenden quadratischen Formen. — II. Verf. untersucht Struktur und Bedingungen der die Zerlegung einer Wechselwirkung in Klassifikationen als Spezialfall umfassenden Zerlegungen von Klassifikationen in Klassifikationen. Bezüglich der in den 4 Hilfssätzen und 7 Theoremen enthaltenen Einzelresultate muß ebenso wie bei Teil I auf die Originalarbeit verwiesen werden. *M. P. Geppert.*

Johnson, N. L.: Some notes on the applications of sequential methods in the analysis of variance. *Ann. math. Statistics* **24**, 614—623 (1953).

The author remarks that recent statistical investigations have made it possible to apply sequential tests to a comparison of composite hypotheses and studies the conditions under which they can be constructed, in particular for testing linear hypotheses (for a definition of such hypotheses, see S. Kolodziezyk, this Zbl. **11**, 220). He discusses an appropriate probability ratio test and its limiting form for large samples. Special cases and alternative procedures are also considered.

S. Vajda.

Yoneda, Keizo: On the use of the Neyman's allotation. *Yokohama math. J.* **1**, 117—123 (1953).

Einer geschichteten Population, deren Schichten $i = 1, \dots, m$ die relative Größe P_i und Varianz σ_i^2 haben, werde eine geschichtete Stichprobe mit den Schichtumfängen n_i und Varianzen s_i^2 entnommen. Verf. befaßt sich mit den Fällen, in welchen Neyman-Schichtung bei Ersatz der unbekannten σ_i durch s_i , d. h. mit n_i proportional $P_i s_i$, zu größerer Mittelwert-Varianz

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m P_i \frac{\sigma_i^2}{s_i} \sum_{j=1}^m P_j s_j$$

führt als P_i -proportionale Schichtung. Er untersucht die Verteilung von $\xi = \sum P_j s_j$ und $\eta = \sum P_i \sigma_i^2 / s_i$, weist deren asymptotische Normalität für $n_0 = \min n_i \rightarrow \infty$ nach, und folgert daraus eine auf der — auf Grund einer Pilotenprobe zu beurteilenden — Größe $\sum P_i \sigma_i / \sqrt{\sum P_j s_j^2}$ beruhende Verhaltensregel für die Entscheidung zwischen Neyman- und gewöhnlicher Proportionalerschichtung, derart, daß die Wahrscheinlichkeit, die genauere Methode (d. h. mit kleinerem σ_x^2) zu wählen, mindestens 0,99 beträgt. *M. P. Geppert.*

Krooth, Robert S.: The sampling variances of some statistics used in univariate discrimination. *Ann. Eugenics* **17**, 302—306 (1953).

Zur Entscheidung, ob ein Objekt mit dem Werte x der betrachteten Variablen aus Population 1 oder 2 stamme, wobei x in diesen normal verteilt sei:

$$y_i = N_i (2 \pi \sigma_i^2)^{-1/2} \exp [-(x - m_i)^2 / 2 \sigma_i^2] \quad (i = 1, 2),$$

sind von B. L. Welch (dies. Zbl. **22**, 63), C. A. B. Smith [*Ann. Eugenics* **13**, 272—282 (1947)], L. S. Penrose [*Ann. Eugenics* **13**, 228—237 (1947); **16**, 134 (1951)] unter verschiedenen Voraussetzungen über die m_i und σ_i die kritischen Werte

$$T_1 \text{ oder } T_2 = \frac{m_1 \sigma_2^2 - m_2 \sigma_1^2 \pm \sigma_1 \sigma_2 [(m_2 - m_1)^2 + 2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \log (\sigma_1 N_2 / \sigma_2 N_1 k)]^{1/2}}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2},$$

$$\theta = \frac{1}{2} (m_2 + m_1) + \sigma^2 (m_2 - m_1)^{-1} \log (N_1 k / N_2), \quad C = (m_2 \sigma_1 + m_1 \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2),$$

Z = Wurzel von $d(y_1/y_2)/dx = 0$ für x hergeleitet worden. Wenn $N_1, N_2, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ unbekannt sind, werden diese Größen durch Schätzungen auf Grund einer Stichprobe ersetzt, und T_1, T_2, θ, C, Z sind Stichprobenparameter. Verf. berechnet ihre Varianzen mit Hilfe der Näherung

$$\text{var } Q = (\partial Q / \partial a)^2 \cdot \text{var } a + (\partial Q / \partial b)^2 \cdot \text{var } b + \dots \quad M. P. Geppert.$$

Truax, Donald R.: An optimum slippage test for the variances of k normal distributions. *Ann. math. Statistics* **24**, 669—674 (1953).

Verf. betrachtet ein dem von E. Paulson (dies. Zbl. 47, 382) behandelten ähnliches Problem; er geht aus von k unabhängig voneinander normal verteilten Gesamtheiten Π_i ($i = 1, \dots, k$) mit unbekannten Mittelwerten m_i und Varianzen σ_i^2 , deren jeder eine Stichprobe vom Umfang n entnommen wird. Gesucht wird ein Test, der es gestattet zu entscheiden, ob eine und welche der Gesamtheiten eine wesentlich größere Varianz zeigt als die übrigen. Sei D_0 die Entscheidung $\sigma_1 = \dots = \sigma_k$. D_j die Entscheidung, daß D_0 falsch ist und $\sigma_j = \max(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Die Gesamtheit Π_i „weicht nach rechts ab“ (has slipped to the right), wenn $\sigma_1 = \dots = \sigma_{i-1} = \sigma_{i+1} = \dots = \sigma_k$ und $\sigma_i = \lambda \sigma_1$, wobei $\lambda > 1$. Verf. zeigt auf Grund der Theorie der Entscheidungsfunktionen (A. Wald: Statistical decision functions, New York 1950, dies. Zbl. 40, 364), daß der von W. G. Cochran [Ann. Eugenics 11, 47–52 (1941)] vorgeschlagene Test:

$$\text{Falls } s_M^2 / \sum_{i=1}^k s_i^2 = L_\alpha \text{ wähle } D_M, \text{ falls } s_M^2 / \sum_{i=1}^k s_i^2 = L_\alpha \text{ wähle } D_0,$$

— wobei M die Gesamtheit mit der größten Varianz in der Stichprobe bezeichnet und L_α so bestimmt ist, daß, wenn alle Populationsvarianzen gleich sind, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ zugunsten von D_0 entschieden wird— unter Symmetrie- und Invarianzbedingungen, die denen bei Paulson analog sind, optimal ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, die richtige Entscheidung zu treffen, maximal macht.

M. P. Geppert — O. Ludwig.

Fisher, Walter D.: On a pooling problem from the statistical decision viewpoint. *Econometrica* 21, 567—585 (1953).

Eine Population bestehe aus K einander ausschließenden Kategorien oder Zellen (Schichten?) ($i = 1, 2, \dots, K$), in denen die stochastische Variable x die unbekannten Mittelwerte θ_i und bekannten Varianzen σ_i^2 habe, und denen bekannte Gewichte π_i zugeordnet seien. Auf Grund einer Stichprobe, bestehend aus K x -Werten, die (einer je Zelle) aus den K Zellen unabhängig voneinander zufallsmäßig ausgewählt werden, sollen die K Zellen zu einer beliebigen, geringeren Zahl von Oberzellen zusammengefaßt (Aufteilung P der K Elemente) und allen zu einer Oberzelle vereinigten Zellen i soll ein gleicher für dieselbe charakteristischer Zahlenwert t zugeordnet werden. Die Aufteilung P und Entscheidungsfunktion $\{t_{1P}, \dots, t_{KP}\}$ sollen im Sinne A. Walds Bayes-Lösungen sein, d. h. den Erwartungswert einer Verlustfunktion $W(\theta, t_P)$ minimalisieren. Verf. löst dieses Verwickelungsproblem (pooling problem) unter den einer speziellen ökonomischen Aufgabe entsprechenden Voraussetzungen über die a-priori-Verteilung $g(\theta)$ und die bedingte Verteilung $p(x, \theta)$ (Bezeichnungen nach Wald) und erörtert mögliche Ausdehnungen dieser Fragestellung, klärt ihre Beziehungen zur Diskriminanzanalyse, zum Klassifikationsproblem und zur Faktoranalyse und versucht eine dem Entscheidungsprinzip entsprechende, nämlich die Risikofunktion berücksichtigende Interpretation des Signifikanzbegriffs.

M. P. Geppert.

King, E. P.: On some procedures for the rejection of suspected data. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 531—533 (1953).

Liegt eine Zufallsstichprobe mit den nach der Größe geordneten Beobachtungen $x_1, \dots, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ vor, so kann der Entscheid., wann $u = \max(u_1, u_n)$, mit $u_1 = (x - x_1)/\sigma$ und $u_n = (x_n - x)/\sigma$ zu verwerfen ist, gestützt auf die von F. E. Grubbs (dies. Zbl. 36, 210) untersuchte Verteilung von u_n getroffen werden, wobei auf die Verdoppelung der Sicherheitsschwelle zu achten ist. Die Überlegung gilt sinngemäß für $r = \max(r_1, r_n)$, mit $r_1 = (x_2 - x_1)/(x_n - x_1)$ und $r_n = (x_n - x_{n-1})/(x_n - x_1)$; als Standard dient die von W. J. Dixon (dies. Zbl. 44, 146) untersuchte Verteilung von r_n .

W. Wegmüller.

Good, I. J.: The serial test for sampling moments and other tests for randomness. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 49, 276—284 (1953).

Let n_{r_1}, \dots, n_{r_n} be the number of sequences r_1, \dots, r_n in a finite cyclical sequence of digits, each of them being one of the numbers $0, 1, \dots, t$. Define

$$\psi_v^{-2} = \sum_{r_1, \dots, r_n} \frac{(n_{r_1, \dots, r_n} - N t^{-n})^2}{N t^{-n}}.$$

$[\psi_v^{-2}$ has been used by Kendall and Babington-Smith in *J. Roy. statist. Soc.* 101, 147—166 (1938) and *Suppl. J. Roy. statist. Soc.* 6, 51—61 (1939) for their serial test of randomness]. He shows that $E(\psi_v^{-2}) = t^n - 1$, from which it follows that their distribution can not be that of chi-squared. The asymptotic distribution is derived when t is prime and it is shown that when first and second differences are taken, the resulting functions have asymptotically a chi-squared-distribution. Similar results hold if a non-cyclical sequence is considered.

S. Vajda.

Dixon, W. J.: Power functions of the sign test and power efficient for normal alternatives. *Ann. math. Statistics* **24**, 467—473 (1953).

The paper contains tables of the power functions for the sign test, for various sample sizes and levels. These power functions are compared with those of the t -test for samples from normal populations, by means of the power efficiency function as defined by Walsh. The method of constructing the tables is described. *S. Vajda.*

Waerden, B. L. van der: Order tests for the two-sample problem. II, III. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 303—310, 311—316 (1953).

Continuing his investigation in this Zbl. **48**, 118, the author deals with the cases where (a) g is large and h much larger, and (b) g and h are both large, but of equal order of magnitude. (For notation see review of previous paper.) He finds that the power functions of Wilcoxon's as well as Student's tests are asymptotically normal and that the efficiency of the former test is $3/\pi$, in both cases. His results are then extended to the two-sided test. He treats also Smirnov's test (this Zbl. **23**, 249) and the number-of-runs-test of Wald and Wolfowitz (this Zbl. **23**, 248). In the examples considered, these tests have less satisfactory powers than the other two tests. In order to throw light on the applicability of his earlier results (see previous review and the earlier paper mentioned therein) to non-normal distributions and unequal variances, the author compares in part III the power functions of the t -test, the X -test, and Wilcoxon's test for $g = 4$, $h = 6$ and level of significance $= 0,05$, when x and y are evenly distributed, the former in $(0,1 + m)$, and the latter in $(0, 1)$. He lists 10 „conclusions“, too long to be summarised here. *S. Vajda.*

Vaart, H. R. van der: An investigation on the power function of Wilcoxon's two sample test if the underlying distributions are not normal. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 438—448 (1953).

Continuing his investigation in this Zbl. **36**, 213, the author derives formulae for the power of Wilcoxon's test under a slightly more restrictive assumption than before. In particular, he introduces conditions concerning the parent distribution which are sufficient to make the test biased. This bias can (under the stated conditions) be avoided by making the two samples of equal size. *S. Vajda.*

Owen, Donald B.: A double sample test procedure. *Ann. math. Statistics* **24**, 449—457 (1953).

Die hier betrachteten Doppel-Stichprobentests (double sample tests) können aufgefaßt werden als Spezialfälle von (gestützten) Sequenztests, bei denen die Beobachtungen gruppenweise genommen werden (A. Wald, Sequential analysis, New York 1947, dies. Zbl. **29**, 158). Verf. betrachtet zur Prüfung der Hypothese $H_0: m = m_0$ gegen $H_1: m < m_0$ (m = Mittelwert einer normal verteilten Variablen mit bekanntem σ) den folgenden Prüfplan: Es sei die Zahl n der Beobachtungen bei einem einfachen (single sample) Test so bestimmt, daß man, wenn $m = m_1 < m_0$, eine gegebene Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art erhält. Dann werden $n_1 < n$

Beobachtungen gemacht und $\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i}{n_1}$ und $u_1 = \frac{\sqrt{n_1}(\bar{x}_1 - m_0)}{\sigma}$ berechnet. H_0 wird

angenommen oder abgelehnt, je nachdem $u_1 > -\sqrt{p}h + \theta$ oder $< -\sqrt{p}h - \theta$ ist, wobei

$$p = \frac{n_1}{n}, \quad G(-h) = \int_{-\infty}^{-h} e^{-t^2/2} dt = \alpha \quad \text{und} \quad \alpha^{-1}(1 - \alpha)G(-\sqrt{p}h - \theta) = G(\sqrt{p}h - \theta). \quad \text{Ist}$$

$-\sqrt{p}h - \theta \leq u_1 \leq \sqrt{p}h + \theta$, so werden n zusätzliche Beobachtungen genommen, $\bar{x}_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n} \frac{x_i}{n}$

und $u_2 = \sqrt{n}(\bar{x}_2 - m_0)/\sigma$ berechnet und H_0 angenommen oder abgelehnt, je nachdem $u_2 \geq -h$ ist. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß in seinem zweiten Teil die erste (Teil-)Stichprobe nicht mehr verwertet wird. Verf. betrachtet ähnliche Tests, die das Material noch besser ausnutzen. Er zeigt an Beispielen, daß die Tests so eingerichtet werden können, daß der Erwartungswert der Anzahl der Beobachtungen, die für den Doppel-Stichprobentest benötigt werden, $< n$ ist. Die Potenzen (powers) der Tests werden i. a. angegeben und mit denen der einfachen Tests verglichen. Zum Schluß wird gezeigt, wie die Tests im Falle der Student-Hypothese (σ unbekannt) durchzuführen sind.

M. P. Geppert — O. Ludwig.

Weiss, Lionel: A higher order complete class theorem. *Ann. math. Statistics* **24**, 677—680 (1953).

Im Merkmalraum Z seien die Verteilungsfunktionen $F_1(x), \dots, F_m(x)$ zugelassen, $x \in Z$. Auf Grund einer Beobachtung finde die Entscheidung zwischen d_1, \dots, d_L mit Hilfe der randomisierten Entscheidungsfunktion = Test $\eta(x) = \{\eta_1(x), \dots, \eta_L(x)\}$ statt. In Verallgemeinerung der Waldschen Theorie mögen zu vorgegebenen F_i und η_i die endlich vielen Verlustfunktionen W_{ijk} mit $k = 1, \dots, s$ gehören, was z. B. dann der Fall ist, wenn jeweils s verschiedene wahre Situationen zwar zur gleichen Verteilungsfunktion führen, aber die Verluste bei falscher Entscheidung verschieden sind. Zu $\eta(x)$ gehört dann der „Risikopunkt“ r_{η} „der Ordnung s “, η heißt besser als η' , wenn $r_{ik} \leq r'_{ik}$ für alle i und k ist mit Gültigkeit der Ungleichheit für wenigstens eine Komponente (i, k) . Definition der Zulässigkeit von Tests, der Vollständigkeit von Testklassen und der Bayes-Lösungen wie üblich. Aus der Bemerkung, daß die Verschiedenheit der Verteilungsfunktionen in der Waldschen Theorie nicht in die Beweise eingeht, folgt: Die Klasse aller zulässigen Tests ist eine minimale vollständige Klasse. Jeder zulässige Test ist eine Bayes-Lösung. — Die Ausdehnung der Betrachtung auf unendlich viele F_i und d_i sowie auf Sequenztests liefert die entsprechende Verallgemeinerung bekannter Wolfowitzscher Sätze über ε -Vollständigkeit. H. Richter.

Laderman, J., S. B. Littauer and Lionel Weiss: The inventory problem. *J. Amer. statist. Assoc.* **48**, 717—732 (1953).

Birnbaum, Z. W.: On the power of a one-sided test of fit for continuous probability functions. *Ann. math. Statistics* **24**, 484—489 (1953).

A. Wald und J. Wolfowitz (dies. Zbl. **21**, 424) haben gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ einer kontinuierlichen Gesamtheit für alle x stets $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ ist, eine von $F(x)$ unabhängige Funktion $P_n(\varepsilon)$ ist. Hierbei ist $F_n(x)$ die empirische kumulative Verteilungsfunktion (bei geordneter Stichprobe $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$):

$$F_n(x) = 0 \text{ für } x < X_1, = k/n \text{ für } X_k \leq x < X_{k+1}, = 1 \text{ für } X_n \leq x.$$

Verf. verwendet $P_n(\varepsilon)$ zur Testung der Hypothese $F(x) = H(x)$; Gegenhypothese: $F(x) = G(x)$. Unter der Annahme, daß $\sup_{-\infty < x < +\infty} |H(x) - G(x)|$ einen vorge-

schriebenen Wert δ habe, werden Schranken (von n, ε, δ abhängig) für die Potenz (power) des Tests gegeben. Verf. zeigt, daß diese Schranken nicht verschärft werden können, und gibt für die untere Schranke unter Verwendung einer Formel von N. Smirnow (dies. Zbl. **22**, 245) Näherungsausdrücke für $n \rightarrow \infty$ an.

M. P. Geppert — O. Ludwig.

Wagner, Gustav: Folgetest für die Abnahmeprüfung von Mengen mit großen und kleinen Stückzahlen. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* **5**, 89—102 (1953).

Der Waldsche Folgetest (sequential test) für die Hypothese H_0 , daß der Parameter p einer Binomialverteilung p_0 sei, gegen die Hypothese $H_1: p = p_1 < p_0$ (A. Wald, *Sequential analysis*, New York 1947, dies. Zbl. **29**, 158) wird hier nochmals beschrieben und im Anschluß daran der Fall der endlichen Ausgangsgesamtheit (Große N) (hypergeometrische Verteilung) betrachtet: $H_0: M = M_0; H_1: M = M_1; M$ = Anzahl der „schlechten“ Stücke. In dem in der Qualitätskontrolle wichtigen Fall $M_0/N = p_0 < 0,1; M_1/N = p_1 < 0,1$ wird unter Benutzung einer Näherungsformel von P. P. Coggins [*Poll. Syst. Techn. J.* **7**, 44 (1928)] und anderer Approximationen ein graphischer Prüfplan konstruiert, bei dem Annahme- und Rückweisungsbereich durch drei Geraden — zwei mit positivem Anstieg und eine parallel zur Abszisse — festgelegt sind. Für $N \rightarrow \infty$ geht der Prüfplan in den entsprechenden Waldschen (zwei parallele Geraden) über. Graphische Prüfpläne für verschiedene Werte von p_0, p_1 und N ($\alpha = \beta = 0,1$) sind der Arbeit beifügt. Die Formulierungen bei der Erklärung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{1,m}$ und $P_{0,m}$ auf S. 93 und S. 96 sind nicht einwandfrei. M. P. Geppert — O. Ludwig.

Lieberman, Gerald J.: A note on Dodge's continuous inspection plan. *Ann. math. Statistics* **24**, 480—484 (1953).

H. F. Dodge schlägt [*Ann. math. Statistics* **14**, 264—279 (1943)] folgenden Plan der Stichprobenerhebung zur Qualitätskontrolle vor: a) Man untersuche jedes Stück, bis eine Folge (Iteration) von i fehlerfreien Stücken (hintereinander) auftritt. b) Von da ab wird nach dem Prinzip der zufälligen Stichprobenerhebung so verfahren, daß nur noch der k -te Teil der Stücke untersucht wird. c) b) wird solange fortgesetzt, bis man ein schadhaftes Stück erhält, dann wieder durch a) ersetzt usw. d) Alle schadhaften Stücke werden durch fehlerfreie ersetzt. — Dodge zeigt, daß man, wenn der Produktionsprozeß „im Zustand der statistischen Kontrolle“ ist,

d. h. wenn Bernoulli-Versuche vorliegen, eine durchschnittliche Grenzqualität (Average Outgoing Quality Limit; AOQL) definieren und bestimmen kann. Verf. macht sich von der Voraussetzung der „statistischen Kontrolle“ frei. Es sei v_j = Zahl der im Zyklus j übersehenen schadhafte Stücke — ein Zyklus ist eine Periode, in der b) angewandt wird —, T_{j+i} = Zahl der Stücke, auf die nach dem $(j-1)$ -ten Zyklus a) angewandt wird ($T_j \geq 0$), N_j = Zahl der Gruppen von k Stücken im j -ten Zyklus ($N_j \geq 1$). Dann ist AOQL die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß für jeden Produktionsprozeß die Wahrscheinlichkeit dafür = 0 ist, daß

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^m \frac{v_j}{m} \right] \left/ \left[\sum_{j=1}^m \frac{T_j + i + k N_j}{m} \right] \right. > L$$

ist. Verf. zeigt, daß $\text{AOQL} = (k-1)/(k+i)$. (Der Beweis benutzt u. a. das „starke Gesetz der großen Zahlen“, dessen Anwendbarkeit mit Hilfe des Kolmogoroff-Kriteriums gezeigt wird.)

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Hyrenius, Hannes: On the use of ranges, cross-ranges and extremes in comparing small samples. J. Amer. statist. Assoc. 48, 534—545 (1953).

Bei der Qualitätskontrolle stellt sich das Problem, einfache Kriterien zur Beurteilung von Güte und Variabilität zu besitzen. Gestützt auf die bei zwei Zufallsstichproben ($i = 1, 2$) vom Umfange N_i vorkommenden kleinsten u_i bzw. größten Merkmalswerte v_i leitet der Verf. als teilweisen Ersatz für den t -Test und F -Test neue Prüfverfahren her. Die Maßzahlen lauten: $T = (u_2 - u_1)/(v_1 - u_1)$; $U = (v_2 - u_2)/(v_1 - u_1)$ und $V = (v_2 - u_1)/(v_1 - u_1)$, wobei $u_1 \leq u_2$ vorausgesetzt wird. Die theoretische Begründung der Tests — insbesondere die Bestimmung der Sicherheitsgrenzen — beruht auf der Annahme einer gleichverteilten Grundgesamtheit $p(x) dx = B^{-1} dx$, $0 \leq x \leq B$. Der Verf. glaubt, daß die Prüfverfahren allgemein für symmetrisch und schwach asymmetrisch verteilte Grundgesamtheiten Gültigkeit besitzen; gewisse Untersuchungen scheinen dies zu bestätigen.

W. Wegmüller.

Epstein, Benjamin and Milton Sobel: Life Testing. J. Amer. statist. Assoc. 48, 486—502 (1953).

Bei verschiedenen Versuchsanordnungen, wie z. B. Bestimmung der Brenndauer von Glühlampen oder Elektronenröhren, Materialproben, Überlebenszeit von Tieren nach erfolgter Behandlung, entsteht eine geordnete Folge von Beobachtungen. Was läßt sich bereits aus den r ersten Messungen folgern? Die Tatsache der speziellen Anordnung von Beobachtungsdaten fand bisher wenig Beachtung; bekannt sind Arbeiten von P. H. Jacobson (dies. Zbl. 29, 371), J. E. Walsh (dies. Zbl. 39, 149) und M. Halperin (dies. Zbl. 47, 133). — In vorliegender Abhandlung wird gezeigt, daß unter den Voraussetzungen: 1. einer exponentiell verteilten Grundgesamtheit $f(x; \theta) = \theta^{-1} e^{-x/\theta}$, $x > 0$, $\theta > 0$, 2. einer geordneten Beobachtungsfolge $x_{1,n} \leq x_{2,n} \leq \dots \leq x_{r,n} \leq \dots \leq x_{n,n}$, 3. einer Unterbrechung des Versuches nach der r -ten Beobachtung — der Parameter θ am besten mit $\hat{\theta}_{r,n} = [x_{1,n} + x_{2,n} + \dots + x_{r,n} + (n-r)x_{r,n}]/r$ geschätzt wird. Es ist dies ein zuverlässiger, wirksamer und erschöpfender Schätzwert, der überdies der „maximum-likelihood“-Bedingung genügt. $\hat{\theta}_{r,n}$ befolgt eine nur von r und nicht von n abhängige χ^2 -Verteilung $f_r(y) = [1/(r-1)!] (r/\theta)^r y^{r-1} e^{-ry/\theta}$, $y > 0$. Im weiteren werden die Bedingungen aufgezeigt, um bei r Elementen einen im Sinne von Neymann-Pearson „besten“ Schätzwert zu erhalten.

W. Wegmüller.

Epstein, Benjamin and Chia Kuei Tsao: Some tests based on ordered observations from two exponential populations. Ann. math. Statistics 24, 458—466 (1953).

Es seien $x_{11} \leq x_{12} \leq \dots \leq x_{1n}$ und $x_{21} \leq x_{22} \leq \dots \leq x_{2n}$ zwei zufällige Stichproben aus Gesamtheiten mit den Verteilungsdichten $f(x, A_1, \theta_1)$ bzw. $f(x, A_2, \theta_2)$, wobei $f(x, A, \theta) = (1/\theta) e^{-(x-A)/\theta}$. Es sollen die Hypothesen $H_1: \theta_1 = \theta_2$ (A_1, A_2 bekannt), $H_2: \theta_1 = \theta_2$ ($A_1 = A_2$, aber unbekannt), $H_3: \theta_1 = \theta_2$, $H_4: A_1 = A_2$ (θ_1, θ_2 bekannt), $H_5: A_1 = A_2$ ($\theta_1 = \theta_2$, unbekannt), $H_6: A_1 = A_2$, $H_7: A_1 = A_2, \theta_1 = \theta_2$ auf Grund der ersten r_1 bzw. r_2 Rangzahlen (order statistics) in den Stichproben (S_{n1} und S_{n2}), die dann die Verteilungsdichten $g(x_{11}, \dots, x_{1r_1}; A_1, \theta_1)$ bzw. $g(x_{21}, \dots, x_{2r_2}; A_2, \theta_2)$ mit

$$g(x_1, \dots, x_r; A, \theta) = \frac{n!}{(n-r)! \theta^r} \exp \left[\sum_{i=1}^r (x_i - A) + (n-r)(x_r - A) \right]$$

haben, getestet werden. Diese Fragestellung hat u. a. Anwendungen zur Testung der Lebensdauer (z. B. für Elektronenröhren) oder in Ermüdungsproblemen. Verf. gibt die Wahrscheinlichkeits-Verhältnis-Tests (likelihood ratio tests) in allen Fällen und zeigt mit Hilfe von 6 Hilfs-

sätzen, daß diese in den Fällen H_1, \dots, H_6 auf gleichwertige Tests zurückgeführt werden können, die sich nur auf F - oder χ^2 -Verteilungen stützen. Einige Eigenschaften der reduzierten Tests werden angeführt. *M. P. Geppert—O. Ludwig.*

Goodman, Leo A.: Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 503—530 (1953).

Beurteilt werden verschiedene Verfahren, um die Lebensdauer von im Gebrauch stehenden Erzeugnissen, z. B. Glaswaren, zu prüfen, falls es nicht möglich ist, einzelne Aufzeichnungen zu machen. Im wesentlichen handelt es sich um eine spezielle Anwendung der Erneuerungstheorie, indem fehlerhafte Stücke immer wieder durch neue gleicher oder anderer Art ersetzt werden. Aus der jeweiligen Zusammensetzung der betrachteten Gesamtheit kann bei Kenntnis der Ausgangslage und der verstrichenen Zeit auf die Lebensdauer der einzelnen Arten von Erzeugnissen geschlossen werden. Erwähnt sei, daß die theoretischen Darlegungen nicht überzeugend wirken und an Präzision und Klarheit zu wünschen übrig lassen. *W. Wegmüller.*

Deming, W. Edwards: On a probability mechanism to attain an economic balance between the resultant error of response and the bias of nonresponse. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 743—772 (1953).

Roshwalb, Irving: Effect of weighting by card-duplication on the efficiency of survey results. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 773—777 (1953).

Terpstra, T. J.: The exact probability distribution of the T statistic for testing against trend and its normal approximation. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 56, 433—437 (1953).

Verf. greift ein von ihm bereits behandeltes Problem auf (T. J. Terpstra, dies. Zbl. 46, 363) und leitet für die exakte Verteilung der dort untersuchten Testgröße T die Rekursionsformel

$$P_{n_1, \dots, n_l}(T) = N^{-1} \sum_{i=1}^l n_i P_{n_1, \dots, n_{i-1}, \dots, n_l}(T - n_{i-1} - \dots - n_i)$$

her. Mit deren Hilfe werden die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion $F_{n_1, n_2, n_3}(T)$ für $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ und die den Signifikanzniveaux $\alpha = 0,005; 0,010; 0,025; 0,050; 0,100$ entsprechenden kritischen Werte von T tabuliert.

M. P. Geppert.

Mattila, Sakari: The decomposition of a series of observations by the method of iterated moving averages. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A* 156, 16 S. (1953).

This paper is concerned with preparations for a test of the hypothesis that the trend of a time series is linear, by applying twice an averaging process and using the residuals in a manner similar to that used in the analysis of variance. *S. Vajda.*

Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz: Sequential decision problems for processes with continuous time parameter. Problems of estimation. *Ann. math. Statistics* 24, 403—415 (1953).

The authors find optimal estimation procedures for parameters of continuous stochastic processes. With appropriate weight functions, viz. the ratio of the squared error to the variance (or a slight generalisation) for the Poisson, Gamma and Negative Binomial processes, and a non-decreasing non-negative function of the modulus of the error for the Normal (Wiener) process, it turns out that the minimax rule is in all these cases a fixed term rule, i. e. the time of observation depends on the cost function, or on the weight function, but not on the sample values. Results for processes with discrete time parameters can be derived from this and interval estimation is also discussed. *S. Vajda.*

Dalenius, T.: The multivariate sampling problem. *Skand. Aktuarietidskr.* 36, 92—102 (1953).

Osawa, Junjiro: On the sampling distributions of classical statistics in multivariate analysis. *Osaka math. J.* 5, 13—52 (1953).

Durch systematischen Ausbau eines Gedankens von G. Elfving (dies. Zbl. 30, 405) gelingt es Verf., die Wishart-Verteilung und Bartlett's Zerlegungstheorem derselben, die normale Regressionstheorie im ein- und mehrdimensionalen Fall, die Verteilungen der multiplen und partiellen Korrelationskoeffizienten und die von Hotellings T^2 auf einheitliche Weise herzuleiten. Sukzessive Betrachtung bedingter Verteilungen führt hierbei auf nicht-zentrale χ^2 -, t - und F -Verteilungen.

M. P. Geppert.

Roy, S. N.: On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. Ann. math. Statistics 24, 220—238 (1953).

Verf. stellt dem auf dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis (likelihood-ratio) unter Nullhypothese H_0 und Alternativen H_i beruhenden üblichen Prinzip der Test-Konstruktion (II) Prinzip I gegenüber, welches auf Vereinigung der kritischen Bereiche für H_0 gleicher „Größe“ β gegen die Alternativen H_i beruht und bei zusammengesetzten H_0 und H_i die Existenz ähnlicher kritischer Bereiche und eines potentesten ähnlichen Bereiches für H_0 gegen H_i voraussetzt. Die dementsprechenden beiden Klassen von statistischen Kriterien I, II greifen ineinander über. Während alle bekannten klassischen Tests der uni- und multivariablen Analyse Typ II angehören, lassen sich zwar die klassischen Kriterien für Mittelwerte, Mittelwertdifferenzen, totale, partielle, multiple Korrelation, Regression, F -Test der Varianzanalyse, Varianzenvergleich, Hotellings T -Test bei Stichproben aus normalverteilten Populationen auch nach Prinzip I erklären, aber nicht alle klassischen Tests bezüglich multinormaler Verteilungen, und zwar infolge des Fehlens potentester ähnlicher kritischer Bereiche. Durch eine Ausdehnung des Prinzips I für solche Fälle gelingt es Verf., unter Betrachtung linearer Transformationen auch für die Prüfung der Hypothesen 1. gleicher Kovarianz-Matrizen zweier p -normalverteilter Populationen, 2. gleicher Mittelwert-Vektoren für k mit gleicher Kovarianzmatrix p -normalverteilter Populationen, 3. der Unkorreliertheit von p_1 Variablen bezüglich der p_2 übrigen Variablen in einer $(p_1 + p_2)$ -normalen Population, Testverfahren vom Typ I zu gewinnen, die sich aber nicht mit den entsprechenden Kriterien vom Typ II decken. Er benutzt hierbei die Wurzeln gewisser Determinantengleichungen und bekannte Sätze über deren Simultanverteilung. Die Kriterien vom Typ I sind in den vorliegenden Fällen rechnerisch einfacher als die vom Typ II und erlauben leichtere Bestimmung brauchbarer unterer Grenzen für die Potenzfunktion (power-function).

M. P. Geppert.

Hsu, P. L.: On symmetric, orthogonal, and skew-symmetric matrices. Proc. Edinburgh math. Soc., Ser. II 10, 37—44 (1953).

Problems of the following type arose in multi-variate statistical analysis and have been playing rôles of central importance; i. e. to find the joint probability density of the characteristic roots $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_r > 0$ of a real, symmetric, positive definite and random square matrix S of degree p , given the joint probability density $f(S)$ of its $p(p+1)/2$ distinct elements. This problem was solved by R. A. Fisher and P. L. Hsu for the special case, where the random matrix S is that of the sample central-moments of 2nd degree formed by a random sample drawn from a p -dimensional normal population whose variance-covariance matrix is the unit one. In this paper the author intends to refine mathematically his method used in the above quoted paper. From the point of view of mathematical techniques, the points are the selection of an appropriate (not necessarily linear) transformation of the variates matrix, the calculation of the Jacobian of this transformation and lastly the evaluations of certain definite integrals. The author adopted the transformation $S = [2(I + X)^{-1} - I] D_\theta [2(I + X)^{-1} - I]'$ where X is a skew-symmetric, D_θ diagonal and I unit matrix of degree p . $p(p+1)/2$ distinct elements s_{ij} ($i \leq j$) of S are transformed into $p(p-1)/2$ distinct elements x_{ij} ($i < j$) of X and p θ 's. The Jacobian is calculated to be $J = 2^{p(p-1)/2} |I + X|^{-(p+1)} \prod_{i < j} (\theta_i - \theta_j)$. See the Description in Walter L. Dee-

mer and Ingram Olkin (this Zbl. 43. 342).

K. Shoda.

Craig, C. C.: Combination of neighboring cells in contingency tables. J. Amer. statist.-Assoc. 48, 104—112 (1953).

Die Unabhängigkeit (Homogenität) zweier Merkmale mit den Klassen $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, s$ testet man auf Grund einer beobachteten $r \times s$ -Aufteilung $\{v_{ij}\}$ von n Beobachtungen mit den Randhäufigkeiten $v_{i.}$, $v_{.j}$, bekanntlich mit Hilfe des mit $(r-1)(s-1)$ Freiheitsgraden χ^2 -verteilten χ^2 -Ausdruckes; dieser wird gebildet mit den Erwartungswerten $E(v_{ij}) = n \hat{p}_{i.} \hat{p}_{.j} = v_{i.} v_{.j} / n$, die auf den Maximum-likelihood-Schätzungen $\hat{p}_{i.} = v_{i.} / n$, $\hat{p}_{.j} = v_{.j} / n$ der unbekannten Randwahrscheinlichkeiten beruhen. Ist die hierfür nötige Voraussetzung, daß alle $r \times s$ Erwartungswerte über 10 liegen, nicht erfüllt, so tritt durch die übliche Zusammenlegung ganzer benachbarter Zeilen oder Spalten eine unnötige Vergrößerung ein. Verf. bestimmt daher die Maximum-likelihood-Schätzungen der Randwahrscheinlichkeiten und die Anzahl der Freiheitsgrade der entsprechenden χ^2 -Verteilungen, wenn nicht ganze Spalten oder Zeilen, sondern nur benachbarte Zellen zu w zusammengelegt werden; u. zw. für Zusammenlegungen

der Form:

$v_{11} + v_{12} = w$; $v_{11} + v_{12} + v_{21} + v_{22} = w$; $v_{11} + \dots + v_{1s_1} + \dots + v_{r_1 1} + \dots + v_{r_1 s_1} = w$;
 $v_{11} + v_{12} = v$, $v_{21} + v_{22} = w$; $v_{11} + v_{12} = v$, $v_{23} + v_{24} = w$; $v_{11} + v_{12} = v$, $v_{13} + v_{14} = w$.
 Bei teilweisem Übergreifen der zusammenfassenden Zellen bez. Spalten (oder Zeilen) wie
 $v_{11} + v_{12} = v$, $v_{22} + v_{23} = w$, führt die Maximum-likelihood-Schätzung hingegen auf eine eindeutig lösbare quadratische Gleichung.
M. P. Geppert.

Aoyama, Hirojiro: On the chi-square test for weighted samples. *Ann. Inst. statist. Math.* **5**, 25—28 (1953).

Einer in R Schichten ($i = 1, 2, \dots, R$) und M Merkmalsklassen ($j = 1, 2, \dots, M$) simultan aufgeteilten Population vom Umfang

$$N = \sum_i \sum_j N_{ij} = \sum_i N_i = \sum_j N_{(j)} \quad \text{mit} \quad N_i = \sum_j N_{ij}, \quad N_{(j)} = \sum_i N_{ij}$$

sei eine geschichtete zufällige Stichprobe vom Umfang n mit entsprechend definierten Anzahlen n_{ij} , n_i , $n_{(j)}$ entnommen. Sind nur N_i , $N_{(j)}$, aber nicht N_{ij} bekannt, so berechnet Verf. für

$$\chi^2 = \frac{n}{N} \cdot \sum_j \left[\sum_i N_i \frac{n_{ij}}{n_i} - N_{(j)} \right]^2 / N_{(j)}$$

$E(\chi^2)$ und $\text{var } \chi^2$ und weist nach, daß selbst bei proportionaler Stichprobenschichtung ($n_i/n = N_i/N$) i. a. $E(\chi^2) \neq M - 1$ ist. Außerdem berechnet Verf. die Erwartungswerte von $E(\chi^2)$ und $\text{var } \chi^2$ für den Fall, daß die Schichtung von $N_{(j)}$ in N_{ij} ($i = 1, \dots, R$) in der Population zufällig erfolge.
M. P. Geppert.

Halperin, Max: The use of χ^2 in testing effect of birth order. *Ann. Eugenics* **18**, 99—106 (1953).

Die Frage, ob das Auftreten eines Merkmals von der Geburtennummer des Individuums abhängt, wird auf Grund einer Stichprobe von n Merkmalsträgern, die nach Umfang j der Geschwisterreihe und Geburtennummer i in derselben aufgeteilt vorliegt (n_{ij}), üblicherweise durch Testung des aus den beobachteten Anzahlen o_i und den nach dem Maximum-likelihood-Prinzip zu erwartenden Anzahlen c_i gebildeten Ausdrucks

$$\sum_{i=1}^k (o_i - c_i)^2 / c_i = \sum_{i=1}^k \left\{ \left[n_i - \sum_{j=1}^k \frac{n_{ij}}{j} \right]^2 / \sum_{j=1}^k \frac{n_{ij}}{j} \right\}$$

mit $n_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}$, $n_{ij} = \sum_{i=1}^j n_{ij}$ mittels χ^2 -Verteilung mit $k - 1$ Freiheitsgraden beantwortet. Verf. beweist mit Hilfe eines Satzes von P. L. Hsu (dies. Zbl. **39**, 143), daß obiger Ausdruck nicht χ^2 -verteilt ist, und schlägt daher an seiner Stelle den mit $k - 1$ F. G. asymptotisch χ^2 -verteilten Ausdruck $\chi^2 = \sum_{i,j=1}^k S^{ij} (o_i - c_i) (o_j - c_j)$ vor, wo $\{S^{ij}\}$ die Inverse einer aus den n_{ij} auf komplizierte Weise zu gewinnenden, $(k - 1)$ -zeiligen und -spaltigen Matrix $\{S_{ij}\}$ ist.
M. P. Geppert.

Benard, A. and Ph. van Elteren: A generalization of the method of m rankings. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 358—369 (1953).

Consider k_{mn} (non-negative, but not necessarily 1) observations for each of the random variables x_{mn} , which are ranked for each m . The nul-hypothesis states that the different rankings are independent and that for each of them all possibilities of dividing the given set of ranks into the cells of given sizes are equally likely. For this problem, the authors develop a test and investigate properties of the statistic on which it is based. This statistic is a generalisation of Friedman's χ_r^2 [*J. Amer. statist. Assoc.* **32**, 675—701 (1937)].
S. Vajda.

Seal, K. C.: On certain extended cases of double sampling. *Sankhya* **12**, 357—362 (1953).

Let three independent samples be given consisting, respectively, of measurements on y , on (x_1, \dots, x_k, y) and on (x_1, \dots, x_k) . Assuming that y is normally distributed with mean η and known variance, and that the x_i follow a multivariate normal distribution with means ξ_i and known covariances, the maximum likelihood estimate η is derived. The author then proceeds to estimating η by a method of weighted

least squares when $k = 1$ and to calculate the efficiency of such an estimate. He also studies the best allocation of sample sizes.

S. Vajda.

Foot, Richard J.: The mathematical basis for the Bean method of graphic multiple correlation. J. Amer. statist. Assoc. 48, 778—788 (1953).

Smith, C. A. B.: The linear function maximizing intraclass correlation. Ann. Eugenics 17, 286—292 (1953).

Einer in k Klassen C_1, \dots, C_k zerfallenden p -dimensionalen Population sei eine N -gliedrige Stichprobe entnommen, von der n_i zu C_i gehören, und für jedes Individuum derselben seien die p Werte der Variablen x_r ($r = 1, 2, \dots, p$) bekannt. Covarianzanalyse führt zu Schätzungen v_{Wrs} und v_{Mrs} der wahren Binnen- und Zwischen-Covarianzen für x_r, x_s . Für jede lineare Combination $G = g_1 x_1 + \dots + g_p x_p$ der p Variablen wird die Intraklassenkorrelation geschätzt durch

$$r(G) = \frac{\sum \sum v_{Mrs} g_r g_s}{[\sum \sum v_{Mrs} g_r g_s + \sum \sum v_{Wrs} g_r g_s]}.$$

Verf. beweist, daß die Gewichte g_r , die $r(G)$ maximalisieren, durch den zum größten Eigenwert λ_1 der Matrix $v_{Wrs}^{-1} v_{Mrs}$ gehörenden latenten Vektor u_1 gegeben sind, und gibt im Anschluß an A. C. Aitken (dies. Zbl. 17, 147) eine Methode zu ihrer Bestimmung an.

M. P. Geppert.

Quenouille, M. H.: Modifications to the variate-difference method. Biometrika 40, 383—408 (1953).

The problem which the author treats is that of finding coefficients of a linear combination of variate differences which minimize, under stated conditions, the variance of that combination. He derives equations which determine the coefficients and the value of the minimal variance. He deals also with the problem of estimating covariances and discusses the applicability of his methods when not only trend but serial correlations are also present. A number of examples illustrate the procedure.

S. Vajda.

Sundrum, R. M.: Moments of the rank correlation coefficient τ in the general case. Biometrika 40, 409—420 (1953).

Sind die Merkmale der zu beurteilenden Werteverbindungen (x, y) nicht direkt meßbar, sondern nur ihrem Range nach zu kennzeichnen, so wird die wechselseitige Verbundenheit mittels des Rangkorrelationskoeffizienten (rank correlation coefficient) von Spearman $-1 < \tau < 1$ gemessen. Stellt p die Wahrscheinlichkeit dar, daß zwei Beobachtungen (x_i, y_i) und (x_j, y_j) harmonisch (concordant) sind, d. h. $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$, dann gilt $\tau = 2p - 1 = p - q$, mit $q = 1 - p$. Der Verf. leitet die Null- und Hauptmomente dritter und vierter Ordnung des Rangkorrelationskoeffizienten her, wobei er sich weitgehend auf eine Arbeit von W. Hoeffding (dies. Zbl. 29, 308) stützt. Die auftretenden zehn Parameter werden im Falle der Unabhängigkeit sowie einer doppelt normal verteilten Grundgesamtheit explizit bestimmt.

W. Wegmüller.

Williams, E. J.: Tests of significance for concurrent regression lines. Biometrika 40, 297—305 (1953).

Liegen m Sätze ($i = 1, 2, \dots, m$) von n_i Wertepaaren (x_i, y_i) vor, so sei die Hypothese zu prüfen, daß die entsprechenden m Regressionsgeraden sich in einem Punkte (ξ, η) schneiden, bzw. sei dessen Abszisse ξ mittels Fiducialgrenzen zu schätzen. Diese bereits von K. D. Tocher (dies. Zbl. 46, 368) behandelte Aufgabe löst Verf. für den (z. B. bei gleichen x -Werten für alle Sätze erfüllten) Spezialfall $\sum x_i = x n_i$, $\sum x_i^2 = X^2 n_i$, sowohl bei bekanntem η als auch bei unbekanntem η . In beiden Fällen ergibt sich die entsprechende Restquadratsumme der Varianzanalyse als größte charakteristische Wurzel einer 2×2 -Matrix. Durch Betrachtung beider charakteristischen Wurzeln gewinnt Verf. zwei χ^2 -verteilte Testgrößen, die der Prüfung der Hypothese eines gemeinsamen Schnittpunktes und der Bestimmung von Fiducialgrenzen für denselben dienen. Verf. findet Zusammenhänge mit früheren

Resultaten (E. J. Williams, dies. Zbl. 46, 361) und vergleicht seine Methode mit der von Tocher an Zahlenbeispielen. *M. P. Geppert.*

Prais, S. J.: A note on heteroscedastic errors in regression analysis. *Revue Inst. internat. Statist.* 21, 28—29 (1953).

H. Theil (dies. Zbl. 44, 144) behandelte die stochastische Gleichung $y_i = \alpha + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ji} + u_i$ ($i = 1, \dots, n$) (x_{ji} bekannte Parameter, u_i Zufallsvariable); Voraussetzungen: $E(u_i) = 0$, $E(u_i u_j) = 0$, $E(u_i^2) = C \cdot (E(y_i))^2$. Mittels Matrizendarstellung (Methode von A. C. Aitken, dies. Zbl. 11, 266): $y = X\beta + \varepsilon$, wobei y = Vektor der y_i , ε = Vektor der u_i , usw., $\sigma^2 A$ = Varianzmatrix zu ε , gewinnt Verf. die von Theil gefundene ineffiziente Schätzung von β (Prinzip der kleinsten Quadrate): $b = (X'X)^{-1} X'y$ mit $\text{var } b = \sigma^2 (X'X)^{-1} (X'A^{-1}X) (X'X)^{-1}$, wobei Xb ohne Berechnung der 4-ten Momente A liefert, und überdies die effizientere Schätzung $b^* = (X'A^{-1}X)^{-1} X'A^{-1}y$ mit $\text{var } b^* \approx \sigma^2 (X'A^{-1}X)^{-1}$. Das Verfahren läßt sich iterieren. *M. P. Geppert — O. Ludwig.*

Geary, R. C.: Non-linear functional relationship between two variables when one variable is controlled. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 94—103 (1953).

Als Erweiterung des Problems der statistischen Bestimmung der Koeffizienten α, β der linearen Gleichung $v = \alpha + \beta u$ (vorausgesetzt, daß diese existiert) zwischen den Werten zweier zufälliger Variablen $x = u + e$, $y = v + f$ (e, f zufällige Fehler), wird der Fall untersucht, daß die Gleichung zwischen diesen Werten von der Form $v = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3$ ist, die besonders interessant für die Analyse einiger Kollektive durch die Methode von Fisher ist. Die Berechnung der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, begründet in der Anwendung der Momente, wird mit einigen Beispielen erklärt. *J. Ma. Orts.*

Wolffowitz, J.: The method of maximum likelihood and the Wald theory of decision functions. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 56, 114—119 (1953).

It is the author's aim to explain, by an argument which does not claim to be rigorous throughout, why maximum likelihood estimators are asymptotically efficient. He bases his explanation on the fact that, in the sense of the theory of decision functions, a complete class of estimators for the parameter of a frequency distribution consists of Bayes solutions, and he points out that such solutions become asymptotically maximum likelihood estimators. The latter have, therefore, asymptotically no competitors. Reference is made to remarks due to v. Mises [*Math. Z.* 4, 1—97 (1919)], and another observation of his in *Ann. Math. Statistics* 9, 256—259 (1938) is referred to in connection with the problem in Neyman and Scott, this Zbl. 34, 76. *S. Vajda.*

Wolffowitz, J.: Estimation by the minimum distance method. *Ann. Inst. statist. Math.* 5, 9—23 (1953).

Zweck der Veröffentlichung ist die Weiterentwicklung der „Minimum distance method“, die Verf. 1952 in einer Abhandlung (dies. Zbl. 48, 66) entwickelt hat, zum Beispiel der Art $X = \xi + u$ und $Y = \alpha + \beta \xi + v$, wobei α und β unbekannte Konstante, u und v normal verteilte zufällige und ξ eine irgendwie nur nicht normal verteilte zufällige (oder auch nicht zufällige) Veränderliche ist. Eine Folge von zufälligen Veränderungen heißt eine Folge von zuverlässigen (consistenten) Schätzwerten von θ , wenn sie stochastisch nach θ konvergiert. Die Distanz zwischen zwei Verteilungsfunktionen $T_1(x)$ und $T_2(x)$ wird definiert durch $\delta(T_1, T_2) = \sup |T_1(x) - T_2(x)|$, wobei die Verteilungsfunktionen empirisch gegeben sein können. Verf.

betrachtet hier solche Folgen, die mit der Wahrscheinlichkeit 1 nach θ konvergieren, und nennt sie superkonsistent. Die entwickelte Methode hat den Vorzug, superkonsistente Schätzwerte zu liefern sogar in manchen Fällen, in denen z. B. die „maximum likelihood method“ nicht einmal konsistente liefert. Nach den Problemen der linearen Ausgleichung und der von Neyman und Scott sogenannten strukturellen Parameter bei zweidimensionalen Verteilungen behandelt er den Fall, daß ξ keine zufällige Veränderliche ist, und den Fall verschiedener Streubreiten der Fehler. *P. Lorenz.*

Proschan, Frank: Confidence and tolerance intervals for the normal distribution. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 550—564 (1953).

Für normal verteilte Ausgangsgesamtheiten mit bekannten bzw. unbekannten Mittelwert μ und Standardabweichung σ und ihr entnommene Stichproben mit \bar{x} und s stellt Verf. die Bestimmung von Confidenzintervallen für μ sowie für den Mittelwert einer zweiten Stichprobe einerseits und von Toleranzintervallen, die im Mittel einen gegebenen Anteil der Population bzw. in $\gamma\%$ aller Fälle mindestens einen gegebenen Anteil der Population umfassen, andererseits einander gegenüber und tabuliert die hierbei auf Grund von Normal-, t - und χ^2 -Verteilung zu bestimmenden Faktoren. Die Verwandtschaft zwischen Confidenz- und Toleranzintervallen wird durch einen Satz von A. Paulson [*Ann. math. Statistics* 14, 90—93 (1943)] gekennzeichnet. M. P. Geppert.

Raj, Des: On moments estimation of the parameters of a normal population from singly and doubly truncated samples. *Ganita* 4, 79—84 (1953).

Zur Schätzung des unbekannten Mittelwertes und der unbekannten Varianz einer normal verteilten Population auf Grund gestutzter Stichproben wendet Verf. die Momentenmethode an und zeigt, daß sie im Falle zweiseitig gestutzter Stichproben mit unbekannter Anzahl ungemessener Beobachtungen (I) bzw. bekannten Anzahlen derselben für beide Schwänze (II) bzw. bekannter Gesamtzahl derselben (III) zum gleichen Resultat führt wie die von A. C. Cohen (dies. Zbl. 40, 222) verwendete Maximum-likelihood-Methode. M. P. Geppert.

Good, I. J.: The population frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika* 40, 237—264 (1953).

Let a random sample of size N be drawn from an infinite population of animals of a finite number of species and let n_r be the number of those species which have precisely r representatives in the sample. The author suggests that $(r+1)n'_{r+1}/N n'_r$ is a better estimate than r/N of the population frequency of a species represented by r items, where n'_r is a „smoothed“ value of n_r . From this there follows an estimate of the proportion of the population belonging to species which are represented in the sample. Estimates are also made of various measures of heterogeneity of the population. Special assumptions about the parent population lead to more explicit formulae in terms of the population parameters. Examples are given relating to biological data, philological studies, and chess openings. S. Vajda.

Haldane, J. B. S.: The estimation of two parameters from a sample. *Sankhya* 12, 313—320 (1953).

Eine n -gliedrige Stichprobe mit der empirischen Verteilung n_r ($r = 1, 2, \dots, m > 3$) sei einer Population mit der zwei Parameter ξ, η enthaltenden erwartungsgemäßen Verteilung $a_r = f_r(\xi, \eta)$ zufällig entnommen. Zur Schätzung der unbekannten Parameter ξ, η auf Grund der Stichprobe empfiehlt Verf. an Stelle der Maximum-likelihood-Methode die von ihm [J. B. S. Haldane, *Proc. internat. statist. Conferences*, 2, 231—248 (1951)] bereits für die Schätzung eines einzigen Verteilungsparameters vorgeschlagene Methode der „minimalen Diskrepanz“, bei der $\sum_r \frac{[f_r(x, y)]^2}{n_r + 1}$ minimalisiert wird. Verf. vergleicht die beiden Schätzmethoden durch approximative Berechnung der Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der entsprechenden Schätzungen x, y für ξ, η in den beiden Fällen sowie von $E(x - \xi)$ und $E(y - \eta)$. M. P. Geppert.

Fisher, Ronald: Dispersion on a sphere. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 217, 295—305 (1953).

The author considers, on the surface of the unit sphere, the distribution with frequency density proportional to $e^{k \cos \vartheta}$ where ϑ is the angular displacement (subtended at the centre of the sphere) from the pole. $k (> 0)$ is a measure of precision.

He shows how to estimate the position of the pole, and how to estimate the precision when the position of the pole, or its axis, is known, or when they are both unknown. He obtains the simultaneous distribution of amplitude and direction of the vector sum of random unit vectors and derives from this a „studentised“ test of significance. Numerical illustrations are appended.

S. Vajda.

● **Großmann, Walter:** *Grundzüge der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie.* Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. VIII, 261 S. Ganzleinen DM 19,80.

Das umfangreiche Gebiet der Ausgleichsrechnung wird hier von einem erfahrenen Fachmann in einzigartiger Weise auf verhältnismäßig engem Raum dargestellt. Ausgehend von der Fehlertheorie führt das Buch über die Verfahren der vermittelnden und bedingten Beobachtungen bis zu den höheren Formen der Ausgleichsrechnung, die freilich in dem gegebenen Rahmen nur kurz behandelt werden konnten. Die Auswahl des Stoffes ist jedoch so glücklich getroffen, daß das Werk als Lehrbuch und Nachschlagewerk die Wünsche eines breiten Benutzerkreises voll auf befriedigt und damit eine Lücke im einschlägigen Schrifttum ausfüllt. Die Klarheit der Darstellung, die das wesentliche nachdrücklich hervortreten läßt, und die Exaktheit der theoretischen Begründung sowie die große Zahl durchgerechneter Beispiele machen das Werk dem Lernenden wie dem erfahrenen Praktiker gleich wertvoll. Das Buch wird auch allen denen eine willkommene Hilfe sein, die sich in Naturwissenschaft und Technik gelegentlich mit der Auswertung und Interpretation von Beobachtungen befassen und sich zu diesem Zweck der Fehlertheorie und der Methode der kleinsten Quadrate bedienen wollen.

W. Hofmann.

Stange, K.: *Über das Ausgleichen von Kurven in Parameterdarstellung.* Z. angew. Math. Mech. **33**, 212—213 (1953).

Verf. geht davon aus, daß die Ausgleichung einer mit Meßfehlern behafteten Punktreihe bei stärkerer Streuung der Meßwerte zu einem in unübersichtlicher Weise verfälschten Ergebnis führt, falls die Meßfehler einseitig nur dem x -Wert oder dem y -Wert zur Last gelegt werden. Anknüpfend an eine frühere Arbeit, in der das Problem der fehlerhaften Punktreihe unter Berücksichtigung der korrelativen Verknüpfung der Meßfehler ganz allgemein behandelt ist (dies. Zbl. **46**, 368), wird nun die entsprechende Ausgleichungsbedingung für den Fall hergeleitet, daß der funktionale Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Meßpunkte durch eine Parameterdarstellung gegeben ist. Als Ausgleichungsprinzip ist auch hier die Forderung zugrunde gelegt, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte an den gegebenen Meßpunkten in bezug auf die gesuchten ausgeglichenen Punkte für die gesamte Meßreihe möglichst groß wird. Die Verbesserungen der gemessenen Wertepaare x, y ergeben sich dann in Abhängigkeit von der Streumatrix an der betreffenden Meßstelle.

W. Hofmann.

Binet, F. E.: *The fitting of the positive binomial distribution when both parameters are estimated from the sample.* Ann. Eugenics **18**, 117—119 (1953).

Soll eine empirische 1-dimensionale Verteilung von N x -Werten durch eine Binomialverteilung $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ mit unbekannten n, p ausgeglichen werden, so ergibt sich die beste Schätzung von n und p auf Grund der iterativ zu lösenden Maximum-likelihood-Gleichung für \hat{n} mit $\hat{p} = x/\hat{n}$; für genügend große n ist aber auch Schätzung von n, p auf Grund der Momentenmethode hinreichend effizient. Verf. untersucht die Verteilung der Maximum-likelihood-Schätzung n^* für n bei Berücksichtigung seiner Ganzzahligkeit unter Heranziehung der Ergebnisse von J. M. Hammett (dies. Zbl. **40**, 222) und illustriert seine Überlegungen an einem Zahlenbeispiel aus der Verkehrsstatistik.

M. P. Geppert.

Rao, C. Radhakrishna: *On transformations useful in the distribution problems of least squares.* Sankhya **12**, 339—346 (1953).

The following problems are considered: (i) find the distribution of the minimum value of

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_{i1} t_1 - \dots - a_{ik} t_k)^2$$

when the parameters t_j are subject to linear conditions and the y_i are independent

observations from a normal population with known variance, and with a mean which is a known linear combination of the parameters; (ii) find the distribution of the ratio of two such minimal values, the sum in the numerator containing only part of the terms in the denominator. The results [which are not new, cf. the author's paper in *Sankhya* 7, 237 (1946) and his book „Advanced statistical methods in biometric research“, New York 1952] are derived by suitable orthogonal transformations.

S. Vajda.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Jager, J. de: Stochastic investigations on mortality tables. *Verzekeerings-Arch.* 30, *Bijvoegsel actuar.* 76—92 (1953).

Untersuchungen über die Streuung der beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeit, teilweise im Anschluß an Untersuchungen von VanPesch, Derksen und Smid.

E. Zwinggi.

Dussart, R. L. G.: Sur le complexe invalidité-décès. *Verzekeerings-Arch.* 30, *Bijvoegsel actuar.* 23—31 (1953).

Aus einem Bestand aktiver Personen scheiden Elemente endgültig durch Tod aus oder treten infolge Erwerbsunfähigkeit endgültig zum Bestande der Invaliden über. Aus dem Invalidenbestande gehen die Personen ausschließlich durch Tod ab. Verf. leitet verschiedene Beziehungen zwischen den Ausscheide- und Übertrittswahrscheinlichkeiten und den entsprechenden Intensitäten ab.

E. Zwinggi.

Hoek, U. H. van der: A practical method for the calculation of a_x at various rates of interest; with numerical data based on the Dutch mortality table G. B. M. 1947—1949 (Makeham graduation). *Verzekeerings-Arch.* 30, *Bijvoegsel actuar.* 65—75 (1953).

Für den Barwert der Leibrente a'_x zum (variierten) Zinssatz i' setzt der Verf. $a'_x = [1 - (1 + h)^{-n}] / h$, wobei $n = a_x - h \alpha_{x,\bar{h}} + h^2 \beta_{x,\bar{h}}$ angenommen ist, a_x den Leibrentenbarwert zum Zinssatz i bedeutet und $h = i' - i$. Näherungsweise können α und β von h unabhängig angesetzt werden, und es gilt

$$\alpha_x = v S_{x+1} / D_x - \alpha_x (1 + a_x) / 2, \quad \beta_x = v^2 S_{x+1}^{(2)} / D_x - \alpha_x (a_x + \frac{1}{2}) - [a_x (1 + a_x) (2 + a_x)] / 6.$$

Die Güte der Näherung wird an der nach Makeham ausgeglichenen Sterbetafel G. B. M. 1947—1949 belegt.

E. Zwinggi.

Moreno Olmedo, Miguel: Note über die Schuldentilgung und die Lebensversicherungen. *Gac. mat., Madrid* 5, 194—196 (1953) [Spanisch].

Lah, Ivo: Das Zinsfußproblem der Anwartschaften. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 53, 155—165 (1953).

Der Verf. zeigt, daß die Behandlung des Zinsfußproblems mittelst der Poukka-schen Funktionen auch auf kompliziertere Anwartschaften als Leibrenten wie Invalidenrenten usw. übertragen werden kann. Numerische Kontrollbeispiele.

W. Saxer.

Stelson, H. E.: Note on finding the interest rate. *Amer. math. Monthly* 60, 703—705 (1953).

Arfvedson, G.: Research in collective risk theory. The case of equal risk sums. *Skand. Actuarietidskr.* 1953 (36), 1—15 (1953).

Sei x die über eine bestimmte Periode in den Risikofonds eingebrachte Netto-risikoprämie und u der anfängliche Risikofonds; dann besteht zwischen der Wahr-scheinlichkeit $F(x, u)$, daß der Risikofonds über die Periode positiv bleibt, und $G(x, u)$, der Ruinwahrscheinlichkeit, die Beziehung $F(x, u) + G(x, u) = 1$. Der Verf. nimmt sodann an, daß die Risikoprämie um den Sicherheitsfaktor λ erhöht werde und gibt verschiedene Formeln für F und G an unter der Annahme, daß λx und u ganzzahlig sind.

E. Zwinggi.

Yntema, L.: Some notes on the principle of discrete equivalence. *Verzekerings-Arch.* 30, Bijvoegsel actuar. 32—40 (1953).

Sofern sich ein Vorgang $F(t)$ zeitlich so entwickelt, daß $F(t + T) = e^{\delta T} F(t)$, so nennt der Verf. den Ablauf als nach dem „principle of discrete equivalence“ erfolgend; T ist die „Periode“ und δ die „Intensität“ der Äquivalenz. Die Entwicklung einer Bevölkerung im Sinne der Theorie von A. J. Lotka und die Bestimmung des Effektivzinssatzes von Kapitalanlagen werden vom Verf. als besondere Fälle des „principle of discrete equivalence“ dargestellt. Im letztgenannten Beispiel treten neben der reellen Zinsintensität δ komplexe Intensitäten von der Form $\delta = 2\pi i/T$ auf.

E. Zwinggi.

● **Bellman, Richard:** An introduction to the theory of dynamic programming. (Report No. 245) Santa Monica, Cal.: The Rand Corporation 1953. III, 154 p.

Dynamic programming deals with problems in planning of multi-stage processes, where time plays an essential role and where the order of operations is important, since the outcome of an operation is a guide to future operations. To begin with, the author states seven illustrative problems, of which the following is a typical one: 2 goldmines, A and B , contain amounts of gold x and y respectively. There is one single mining machine which can bring up a proportion r from A , the probability of the machine still being usable afterwards being p_1 ; for B , the corresponding values are s and p_2 . How should one proceed to maximise the amount of gold obtained? It is easily seen that $f(x, y)$, the expected amount of gold obtained by an optimal sequence of choices between A and B , satisfies the functional equation

$$f(x, y) = \text{Max}_{x, y \geq 0} \{p_1 [r x + f(1-r x, y)], p_2 [s y + f(x, 1-s y)]\}.$$

Given the solution, it is also easy to derive the optimal procedure. The author treats the functional equation $f(p) = \text{Max}_k \{T_k(f)\}$ where T_k is an operator and p a point in abstract space. He presents existence and uniqueness theorems, and theorems concerned with properties of the solution $f(p)$, as to continuity and boundedness. In the last chapter, games of survival are considered as a special case of the general theory, i. e. games which terminate when two players with finite fortunes have repeatedly played the game $\left(\begin{smallmatrix} -1 & a \\ c & -b \end{smallmatrix}\right)$ and one of them has lost all his fortune. The resulting functional equation is

$$f(x) = \text{Min}_q \text{Max}_p [p_1 q_1 f(x-1) + p_1 q_2 f(x+a) + p_2 q_1 f(x+c) + p_2 q_2 f(x-b)].$$

S. Vajda.

Bellman, Richard: Some functional equations on the theory of dynamic programming. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 39, 1077—1082 (1953).

Der Verf. publiziert ohne Beweise einige Sätze betr. Funktionalgleichungen, die in der Theorie des „dynamic programming“ vorkommen und in der vorstehend besprochenen Monographie der Rand Corporation behandelt werden. Er bespricht insbesondere die „Gold-Minen-Gleichung“ als ein Beispiel eines Sequential-Decision-Problems.

W. Saxer.

Pichler, O.: Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben. *Ingenieur-Arch.* 21, 119—140 (1953).

Die Arbeit handelt von der Anwendung des Matrizenkalküls auf betriebswirtschaftliche Aufgaben. Verf. legt im einzelnen dar, wie sich die Betriebsvorgänge eines Teilbetriebs in vielen Fällen mit hinreichender Genauigkeit durch eine Matrix beschreiben lassen. Aus den Matrizen der einzelnen Teilbetriebe läßt sich eine Matrix des Gesamtbetriebes herstellen, welche die Struktur desselben charakterisiert. Die Nützlichkeit des Matrizenkalküls zeigt sich in vollem Umfang, wenn eine Kopplung zwischen mehreren Betrieben besteht. Verf. untersucht verschiedene Arten der Kopplung. Einer Folge von hintereinander geschalteten Teilbetrieben („unverzweigte Betriebskette“) entspricht Multiplikation der Matrizen der einzelnen Betriebe. Eine besondere Art der Kopplung liegt bei der Betriebskette mit Rückführung vor. Für diesen

Fall wird die Methode und die Aufstellung der entsprechenden Matrizen zuerst für einen Teilbetrieb erläutert, dann auf eine endliche Zahl von Teilbetrieben ausgedehnt. Auch betriebswirtschaftliche Fragen lassen sich bei Kenntnis der Strukturmatrix beantworten. Im letzten Abschnitt werden praktische Verfahren zur Ermittlung der Elemente der Matrizen der einzelnen Teilbetriebe mitgeteilt. *W. Quade.*

Pichler, O.: Anwendung der Matrizenrechnung zur Erfassung von Betriebsabläufen. Ingenieur-Arch. 21, 157—175 (1953).

Im Anschluß an die vorstehend besprochene Arbeit untersucht Verf., wie sich mit Hilfe der von ihm vorgeschlagenen Methode allgemeinere Kopplungsbedingungen unter den Teilbetrieben berücksichtigen lassen, besonders den Fall, daß die Kopplungsbedingungen „konform“ sind. Danach werden Transformationen betrachtet, die gestatten, aus der Strukturmatrix eines Betriebes Größen zu gewinnen, die für die wirtschaftliche oder technische Beurteilung des Betriebsablaufs von Bedeutung sind. Es wird ein Umkehrproblem erörtert, das bei Berücksichtigung von Zwischenproduktentnahmen auf eine Matrixgleichung vom Typus $a = \lambda \mathfrak{P} a + \mathfrak{P} r$ führt (für $r = 0$ reduziert sich diese Gleichung auf eine Eigenwertgleichung). Die Lösung des Umkehrproblems kann in denjenigen Fällen, in denen keine gleichmäßige Verteilung der Komponenten gefordert wird, leicht angegeben werden. *W. Quade.*

Geometrie.

Analytische Geometrie:

● **Pickert, Günter: Analytische Geometrie.** (Mathematik und ihre Anwendung in Physik und Technik. Reihe A, Bd. 24.) Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1953. X, 397 S. DM 26,—.

Die vorliegende Darstellung der analytischen Geometrie ist aus den Vorlesungen des Verf. an der Universität Tübingen entstanden. Das Buch unterscheidet sich von anderen Lehrbüchern der analytischen Geometrie zunächst dadurch, daß hier die analytische Geometrie weder auf elementargeometrische Kenntnisse zurückgeführt noch bloß als lineare Algebra verstanden wird; sie wird axiomatisch begründet. Das Buch besteht aus drei Teilen, die bzw. der affinen, der metrischen und der projektiven Geometrie gewidmet sind. — Die affine Geometrie wird auf den beiden primitiven Begriffen „Punkt“ und „Vektor“ begründet; diese werden durch geeignete Axiome festgesetzt; in den Axiomen erscheint der Vektor als eine eindeutige Zuordnung von Punkten zu Punkten; die Grundoperationen auf Vektoren werden in den Axiomen selbst erklärt; es entsteht so der affine Raum mit einer beliebigen Anzahl n von Dimensionen. Wir geben hier die Titel der Kap. des 1. Teiles: Reelle affine Räume, Vektorräume, Gerade und Ebene, Vektorscharen und lineare Unterräume, kanonische Basis einer Vektorschär, Linearformen, lineare Gleichungen, affine Abbildungen, lineare Abbildungen und Matrizen, Multiplikation von linearen Abbildungen und Matrizen, Determinanten, Unterdeterminanten, Eigenwerte und Eigenvektoren, Orientierung. — Der Übergang zur metrischen Geometrie geschieht durch Hinzufügung der Begriffe „Länge eines Vektors“, „Senkrechtsein für Vektoren“, welche ebenfalls durch Axiome festgesetzt werden. Titel der Kap.: Metrische Räume, das innere Produkt, Winkel, Bewegungen, Inhalt, das vektorielle Produkt, Kreis und Kugel, Komplexe metrische Räume, Hyperflächen 2. Ordnung. — Im dritten Teil erklärt man die projektiven Räume als Inbegriff aller Punkte und aller eindimensionalen Vektorscharen eines affinen Raumes. Die Entwicklung folgt ohne Schwierigkeiten: Projektive Räume, Koordinaten und Doppelverhältnisse, Kollineationen, Projektionen, Korrelationen, Polaritäten und Nullsysteme, Quadriken, id. bei 2 und 3 Dimensionen, Übergang zur affinen und zur metrischen Geometrie, Linienkoordinaten bei Dimension drei. — Es folgen noch drei Anhänge, über die trigonometrischen Funktionen, die durch Umkehrung

des Integrals $\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ analytisch gewonnen werden; über die direkte axiomatische Kenn-

zeichnung der projektiven Ebene; und über die Automorphismen des Körpers der reellen Zahlen. — Eine andere bemerkenswerte Kennzeichnung des Buches besteht in der Art der Behandlung, welche immer so eingerichtet wird, daß es möglich wäre, einen beliebigen Schiefkörper, an Stelle des Körpers der reellen Zahlen, zugrunde zu legen. Verf. „weiß wohl, daß sich durch das Heranziehen des Schiefkörperbegriffs sowie durch die axiomatische Grundlegung für den Anfänger zusätzliche Verständnisschwierigkeiten ergeben“; er ist aber der Meinung „daß die so erreichte frühzeitige Heranführung des Lernenden an die Begriffsbildungen und die Gedankengänge der heutigen Mathematik es lohnt, diese Schwierigkeiten in Kauf zu nehmen“. Die Sache könnte

natürlich weiter diskutiert und auch verschieden gelöst werden: jedenfalls ist es aber unzweifelhaft, daß das vorliegende Werk die Anerkennung einer vortrefflichen wissenschaftlichen und modernen Behandlung der analytischen Geometrie verdient und unter die guten Lehrbücher dieses Gebietes der Mathematik eingereicht werden muß.

E. Togliatti.

• **Walker, R.: Cartesian and projective geometry.** London: Edward Arnold 1953. 320 p. 21 s.

• **Tuckey, C. O. and W. Armistead: Coordinate geometry.** London: Longmans 1953. XI, 464 p. 12 s. 6 d.

Das Buch ist eine elementare und leicht verständliche Einführung in die analytische Geometrie der Euklidischen (x, y) -Ebene. Der Stoff entspricht ungefähr dem Umfang, wie er für die Reifeprüfung eines Gymnasiums gefordert wird, wobei etwas ausführlicher auf reelle Kegelschnitte eingegangen wird. Homogene Koordinaten und nicht-reelle Figuren werden nur nebenbei behandelt. Für den Anfänger sind die zahlreichen Aufgaben (mit Lösungen) von großem Werte. Die vielen gut versorgten Figuren erleichtern das Eindringen in den Stoff außerordentlich.

R. W. Weitzenböck.

Hjelmslev, Johannes: La géométrie sensible. III. Enseignement math. 39, 210—236 (1953).

Der Titel dieser 3. Mitteilung ist: *La géométrie dans l'espace* (für die beiden ersten Mitteilungen vgl. dies. Zbl. 24, 60 und 27, 80), die Kapitel sind: I. *Les deux tableaux*, II. *La géométrie de la chambre*, III. *L'espace arithmétique*. Vom anschaulichen Umgang mit elementaren geometrischen Gegenständen ausgehend entwickelt der Verf. die räumliche Geometrie und gelangt zu dem üblichen Formalismus der analytischen Geometrie in vektorieller Darstellung.

F. Bachmann.

• **Smail, Lloyd L.: Analytic geometry and calculus.** New York: Appleton-Century Crofts, Inc. 1953. 672 p.

Muracchini, Luigi: Osservazioni sulle trasformazioni puntuali analitiche fra spazi euclidei. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 40—43 (1953).

L'A. dimostra i due teoremi seguenti: a) Una trasformazione puntuale analitica fra piani euclidei che sia conforme e conservi le aree è una similitudine. b) Una trasformazione puntuale analitica fra spazi euclidei che conservi le aree è una similitudine.

C. F. Manara.

• **Goodstein, R. L. and E. J. F. Primrose: Axiomatic projective geometry.** Leicester: University College 1953. XI, 140 p. 15 s. net.

Die synthetische projektive Geometrie bietet ein schönes Beispiel eines deduktiven Systems mit anschaulich deutbaren Ergebnissen. In für Anfänger bestimmten Büchern werden jedoch Grundlagenfragen entweder aufgeschoben oder unvollständig erledigt, und zwar aus didaktischen Gründen. Die Verf. haben es unternommen, einen ziemlich lückenlosen Aufbau der ebenen projektiven Geometrie zu geben, der Anfänger nicht abzuschrecken braucht. So wird z. B. recht bald der Hauptsatz der projektiven Geometrie als Axiom eingeführt. Damit hat man die Grundlage für den Pappos-Pascalschen Satz, aber die Rolle des Desargueschen Satzes wird hierbei etwas verschleiert. Linien und Kegelschnitte werden nicht als Punktmenge betrachtet, sondern als selbständige Objekte, die in gewissen Inzidenzrelationen zu den Punkten stehen. Auch Fragen der komplexen Geometrie werden in den Vordergrund gerückt und metrische Sätze der Elementargeometrie als Spezialfälle von projektiven Sätzen hergeleitet. Kurz und gut, das übliche Programm, aber in korrekter Form zusammengefaßt in einem engen Raum. Die Gefahr der Trockenheit ist dabei völlig vermieden. Eine Fülle von Aufgaben mit Lösungen erhöht den Wert des hübschen Büchleins.

J. C. H. Gerretsen.

Andress, W. R., W. Saddler and W. W. Sawyer: Perspective triads. Math. Gaz. 37, 247—255 (1953).

Die beiden erstgenannten Verf. untersuchen analytisch die Beziehungen mehrfach perspektiver Punkttripel einer Ebene: Liegen zwei Tripel dreifach perspektiv, so gibt es ein Tripel, zu dem sie beide sechsfach perspektiv liegen, und umgekehrt. Es gibt ∞^2 zu einem gegebenen Tripel dreifach perspektive Tripel, die untereinander paarweise dreifach perspektiv liegen. Das Tripel der Perspektivitätszentren zweier dreifach perspektiven Tripel liegt zu jedem von diesen dreifach

perspektiv. Die beiden Tripel der Perspektivitätszentren zweier sechsfach perspektiven Tripel bilden mit diesen ein geschlossenes System derart, daß je zwei der vier Tripel sechsfach perspektiv liegen und die anderen beiden Tripel die Zentren der Perspektivitäten bilden. Zum Schluß werden die Eigenschaften dreifach perspektiver Punkttupel eines Kegelschnitts untersucht. — Der dritte Verf. leitet die Existenz sechsfach perspektiver Dreiecke aus der bekannten Konfiguration der neun Wendepunkte einer ebenen Kubik her.

M. Zacharias.

Noi, Salvatore di: Le varie metriche del piano proiettivo. Periodico Mat., IV. Ser. 31, 296—313 (1953).

Um eine Metrik in der projektiven Ebene festzulegen, wird ein Absolutes γ , der Ort der absoluten Punkte der Geraden der Ebene, und eine Einhüllende der absoluten Geraden aller Geradenbüschel der Ebene fixiert. Eine Gruppe Γ_γ von Kollineationen, die γ in sich überführen, wird als Bewegungen bezeichnet. Distanz zweier Punkte und Winkel zweier Geraden werden in üblicher Weise durch Doppelverhältnisse definiert. Das Absolute einer Geraden wird von zwei (reell verschiedenen, reell zusammenfallenden oder konjugiert imaginären) Punkten gebildet. Das Absolute eines Geradenbüschels wird dual definiert. Durch Kombination der verschiedenen Möglichkeiten des Absoluten der Geraden und Büschel ergeben sich neun verschiedene Metriken. Metrik (r, s) heißt eine Metrik, in der das Absolute einer Geraden von r ($= 0, 1, 2$) reellen Punkten und das Absolute eines Büschels von s ($= 0, 1, 2$) reellen Geraden gebildet wird. $(0, 0)$ ist die elliptische, $(1, 0)$ die euklidische und $(2, 0)$ die hyperbolische Metrik. Neu sind die sechs übrigen Fälle. Sie bilden den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. — Die Metrik $(0, 1)$ ist dual zur euklidischen Metrik. Das Absolute der Metrik $(1, 1)$ besteht aus einer Geraden und einem ihrer Punkte; sie ist zu sich selbst dual. Das Absolute γ der Metrik $(2, 1)$ besteht aus zwei reellen Geraden und ihrem Schnittpunkt. Die Punkte des einen der beiden Winkel von γ heißen eigentliche, die des andern ideale Punkte. Dual zu dieser Metrik ist $(1, 2)$. Die Annahme $(0, 2)$ ergibt eine der hyperbolischen duale Metrik: Das Absolute ist ein realer, allgemeiner Kegelschnitt γ . Seine äußeren Punkte sind die eigentlichen, seine inneren die idealen Punkte. Die Geraden außerhalb von γ sind die eigentlichen Geraden; das Absolute eines Geradenbüschels sind die beiden realen Tangenten vom Büschelzentrum an γ . In der Metrik $(2, 2)$ sind die eigentlichen Punkte die Punkte außerhalb des realen absoluten Kegelschnitts γ und die eigentlichen Geraden die Sekanten von γ .

M. Zacharias.

Deaux, R.: Sur deux complexes quadriques associés à un système de vecteurs. Mathesis 62, 102—110 (1953).

Zu einem räumlichen Kraftsystem Σ gehört ein linearer Komplex Γ_1 von Nullstrahlen. Nullpolaren bezüglich Σ tragen komplementäre Kräfte r, r' von Σ . Sollen die Kräfte r einen vorgegebenen festen Betrag haben, so liegen ihre Wirkungslinien in einem quadratischen Komplex Γ_2 , dessen sämtliche ebene Komplexkurven Kreise (mit dem Nullpunkt der Ebene als Mittelpunkt) und dessen Komplexkegel Drehkegel sind (deren Drehachsen zur Nullebene des Scheitels normal sind). Γ_1 und Γ_2 durchdringen sich in einer isotropen Kongruenz. Die komplementären Kräfte r' haben Wirkungslinien, die gleichfalls einen quadratischen Komplex Γ'_2 bilden; Γ_2 und Γ'_2 sind zueinander bezüglich des linearen Komplexes Γ_1 nullpolar. Die ebenen Komplexkurven von Γ'_2 sind Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, welche den Nullpunkt ihrer Ebene als Brennpunkt haben; die Komplexkegel von Γ'_2 haben die Nullebene ihres Scheitels als eine zyklische Ebene. — Es werden die Eigenschaften der beiden quadratischen Komplexe Γ_2 und Γ'_2 eingehender untersucht. Die Komplexe selbst kommen schon früher bei C. Segre, E. Study, E. Turrière vor.

K. Strubecker.

Bompiani, Enrico: Complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 719—723 (1953).

Ein bis auf einen skalaren Faktor gegebener Trivektor a_{ikl} ; $i, k, l = 0, 1, \dots, 5$ bestimmt bekanntlich einen linearen Ebenenkomplex in P_5 mit der Gleichung $a_{ikl} p^{ikl} = 0$. Ein solcher Komplex ordnet jeder Geraden r^{ik} die polare Hyperebene $a_{ikl} p^{ikl} = 0$ zu und jedem Punkte z' einen linearen Geradenkomplex $r_{ik} = a_{ikl} r^l$. Der Komplex a_{ikl} heißt singular, wenn jede Ebene durch einen bestimmten Punkt, das Zentrum genannt, ihm angehört. Die zugehörige kanonische Form eines singularen Komplexes ist entweder $p^{123} + p^{145} = 0$ oder $p^{123} = 0$. Ein nicht-singularer Komplex ist entweder spezial oder nicht spezial. Die Form der kanonischen Gleichungen ist $p^{031} + p^{145} + p^{2:3} = 0$ bzw. $\alpha p^{024} + \beta p^{135} = 0$. Die 4 Fälle korrespondieren mit den bekannten 4 möglichen Formen eines Trivektors in E_6 (W. Reichel, Diss. Greifswald 1907).

J. A. Schouten.

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Il contrasto fra continuo e discontinuo e la geometria algebrica. *Archimede* 5, 221—225 (1953).

Godeaux, L.: L'involution de Geiser. *Bull. Soc. math. Belgique* 1952, 4—7 (1953).

Si l'on rapporte le réseau de cubiques passant par sept points fixes, dont les sections variables définissent l'involution de Geiser, à un réseau de plans de l'espace, on obtient une surface cubique sur laquelle six droites et un point O correspondent aux points-base du réseau. L'involution est formée par les points alignés avec O , d'où sur la surface une involution T' dont l'A. donne l'équation: si T' est une homologie harmonique, l'involution de Geiser se particularise; O est un point d'Eckardt de la surface et les trois droites y passant s'appuient respectivement à deux des 6 droites images des points-base, en sorte que les sept points-base du réseau des cubiques planes sont 2 à 2 alignés avec le septième. La transformation fait alors correspondre au réseau des droites celui des quintiques passant doublement par six points.

B. d'Orgeval.

Chisini, Oscar: Piani multipli e questioni topologiche connesse. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 1, 78—87 (1953).

L'A. espone lo stato attuale delle questioni riguardanti le varietà di diramazione delle funzioni algebriche di più variabili. Egli si sofferma in particolare ad esporre le questioni riguardanti le curve di diramazione dei piani n -pli, perchè il caso delle funzioni algebriche di due variabili è quello che offre (in confronto alle funzioni di una sola variabile) le difficoltà caratteristiche e fondamentali per la dimostrazione dei teoremi di esistenza. Sussiste infatti il Teorema: „Una superficie (algebraica) $\Phi(x, y, u) = 0$ è di diramazione per una funzione ad n determinazioni quando la sezione con un piano generico di un fascio sia curva di diramazione per una funzione ad n valori di due variabili“. Ed il Teorema si estende alle funzioni algebriche di un numero qualunque di variabili. L'A. espone inoltre le proprietà di un modello topologico tridimensionale („treccia algebrica“) atto a rappresentare nello S_3 le proprietà topologiche di immersione di una curva algebrica rispetto al piano proiettivo (complesso) a cui essa appartiene, e perciò particolarmente atto alla trattazione delle questioni che si collegano alle curve di diramazione dei piani multipli. La esposizione è corredata da ampia bibliografia.

C. F. Manara.

Marchionna, Ermanno: Sulle quartiche piane razionali invarianti per un gruppo trirettangolo di omografie. *Periodico Mat.*, IV, Ser. 31, 229—245 (1953).

Nella presente Nota, l'A. stabilisce alcune proprietà caratteristiche delle quartiche piane razionali mutate in sé dalle omografie di un gruppo trirettangolo, e dimostra che queste curve sono tutte e sole le quartiche razionali aventi (almeno) un biflecnodo. Inoltre dà le condizioni affinché due di esse siano proiettivamente identiche.

M. Piazzolla-Beloch.

Rosina, B. A.: Ulteriori osservazioni sulle coniche generalizzate. *Ann. Univ. Ferrara* 2, 117—127 (1953).

Dans cette Note l'A. étudie les courbes algébriques planes d'ordre $2n$ avec deux points simples à l'infini (distincts ou coïncidents) ayant en chacun d'eux un contact n -ple avec la droite à l'infini, et montre que ces courbes présentent les mêmes propriétés diamétrales des coniques, et appartiennent donc à la famille des coniques généralisées. — Cela posé, l'A. démontre que les coniques généralisées, elliptiques et hyperboliques, sont les seules courbes algébriques planes d'ordre pair ayant deux, et deux seuls, diamètres principaux (rectangulaires) et ayant tous les diamètres à deux à deux mutuellement conjugués. — Les coniques généralisées paraboliques sont les seules courbes algébriques planes, ayant un seul diamètre principal.

M. Piazzolla-Beloch.

Andreotti, Aldo: Osservazioni intorno alla classificazione delle superficie irregolari. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 263—264 (1953).

This is a report on some researches by the author about the classification of irregular algebraic surfaces. Let F be a given surface with irregularity q ; consider the two q -dimensional Picard varieties V_q (introduced by Severi) relative to the Riemann matrix of the periods of the

simple integrals of the first kind on F , and V'_q (considered by Castelnuovo) which is the image of the linear systems of a continuous q -dimensional system of curves on F . The author proves first that each one of the two varieties, V'_q, V''_q , is the image of the linear systems of a ∞^q continuous system of hypersurfaces on the other. Secondly, for $q \geq 3$, the author, starting from a result due to Severi — according to whom any surface F of irregularity q , which does not possess pencils of genus q , admits a rational transform Φ belonging to V'_q — proves that, in case Φ has no multiple points, the mapping $F \rightarrow \Phi$ is one-to-one, but for some exceptional cases. It is so possible to have a model of such surfaces F imbedded in a Picard variety, what allows the birational classification of the concerned surfaces. It is to be emphasized that the possibility of giving such a classification is due to the choice, as imbedding space for F , of a Picard variety whose superficial irregularity is just q ; the classification would be much more complicate, if one considered F as imbedded in a linear space, which has superficial irregularity zero. The author has moreover characterized all the cases when the mapping $F \rightarrow \Phi$ is not one-to-one, i. e. when Φ is a multiple model of F ; this is possible only in two cases, each of which may actually occur: a) F and Φ are both elliptic, and the pencil, of genus $q-1$, of elliptic curves on F has some multiple curves; b) Φ has torsion and $\sigma_F < \sigma_\Phi$, σ being the number of Severi.

M. Rosati.

Matsusaka, Teruhisa: On algebraic families of positive divisors and their associated varieties on a projective variety. *J. math. Soc. Japan* **5**, 113—136 (1953).

This is one of the series of papers of the author on Picard varieties. In this *Zbl.* **47**, 148, Zariski introduced the notion of arithmetic genus $p_a(X)$ of a divisor X on any normal projective model V . The author first establishes that p_a has the same value on any algebraically equivalent divisors on V provided V is non-singular. This assertion is false if V is merely normal. He then generalizes to arbitrary non-singular variety over the universal domain of any characteristic main results of Albanese on the structure of maximal algebraic families on a non-singular surface (cf. Zariski, *Algebraic Surfaces*, Berlin 1935, Chap. V, esp. Sec. 2, pp. 79—82, this *Zbl.* **10**, 371). The most important result, which is truly based on the above lemma, is the following. When X is an arbitrary positive divisor on V , then by adding to X a sufficiently high multiple of a plane section C of V we can obtain a member $X + mC$ of a maximal algebraic family, which generates the Picard variety P of V and every member of which determines a complete linear system of the same dimension. The Chow variety of such a maximal algebraic family is a strict fibre-space over P whose fibre is a projective space.

J. Igusa.

Nakai, Yoshikazu: On the divisors of differential forms on algebraic varieties. *J. math. Soc. Japan* **5**, 184—199 (1953).

In this paper the author discusses about the connection between the divisor (ω) of a differential form ω on a projective model V and the divisor $(\bar{\omega})$ of the „trace“ $\bar{\omega}$ of ω on a general plane section W of V , which is generic over a field of definition k of ω , hence also of V . The main result is the following: Let p be the degree of ω and r the dimension of V . Then, if $p \leq r-2$ we have $(\bar{\omega}) = (\omega) \cdot W$, and if $p = r-1$ we have $(\bar{\omega}) = (\omega) \cdot W + X$. Thereby X is a positive W -divisor, every component of which has specializations over k such that V is covered by them. Hence the components in $(\omega) \cdot W$ and in X are entirely different. The method of the proof is elementary, but is certainly ingenious.

J. Igusa.

Conforto, Fabio: Un nuovo indirizzo nella teoria delle funzioni abeliane. *Atti IV. Congr. Intern. mat. Ital.* **1**, 141—163 (1953).

The new view point in the study of abelian functions, which the title of the paper refers to, is the theory of abelian modular functions of $p-1$ variables; its relationship with the theory of abelian functions is a very large generalization of the relationship of the classical theory of elliptic modular functions with that of elliptic functions, corresponding to the case $p=1$. In this theory — which the author has recently exposed in a series of lectures at the Istituto Nazionale di Alta Matematica in Rome (collected in his book „Funzioni abeliane modulari“ Vol. I, Roma 1951, this *Zbl.* **45**, 109) — the fundamental problems are: 1. study of the set I , whose elements are the distinct fields of abelian functions in p variables; 2. study of the functions which are defined (in a proper manner) on the set I . — This paper gives a clear exposition of the up to date methods and results in approaching the solution of problem 1, and states exactly the still unsolved questions. Since a field K of abelian functions determines its Riemann matrix ω up to the equivalence expressed by the relation: $\omega' = \alpha \omega A$, α being non singular and A unimodular (so that two matrices belonging to distinct fields are dis-equivalent), problem 1 amounts to the same as the study of the set of equivalence classes of the ω 's. We can then suppose that the matrices ω have Krazer's normal form $\omega = \|\Delta^{-1} \Omega\|$, where the diagonal matrix Δ 's elements are the elementary divisors of K and $\Omega = \|\omega_{hk}\| = \|\omega'_{hk} + i \omega''_{hk}\|$ is a symmetric

complex matrix whose elements satisfy only a finite number of inequalities. If we represent : matrix ω of a given „level“ A , i. e. an ω belonging to given divisors, with a point — whose coordinates are the ω'_{hk} 's and ω''_{hk} 's ($h \leq k$) — of a suitable region R of a real Euclidean space $S_{2(p+1)}$, the equivalence of two matrices ω, ω' which are generic (in a definite sense which will be specified below) coincides with the congruence of the two representative points with respect to a properly discontinuous group of transformations of the region R onto itself: the restricted modular group G of the level A . The construction of a fundamental domain R^* for the group G gives in general the solution of problem 1, so that the union of all domains R^* belonging to the different levels may be taken as a model of the set I . The expression „in general“ means that in particular cases, when ω satisfies some arithmetic relations of singularity (in the sense of Scorza), more precise statements become necessary, which will require further researches on singular Riemann matrices from the view point of equivalence. The difficulties in the construction of R^* (which was already known by Siegel for the level $A = U$, U being the $p \times p$ unit matrix) in the case of an arbitrary level, have been overcome by the author in his quoted book by means of a thorough study of group-theoretical and arithmetic properties of the corresponding group G and a suitable generalization of the arithmetic theory of quadratic forms by Minkowski. The solution of problem 1 is the natural premise for further developments of the theory (problem 2), which will lead to define and build the abelian modular functions as single-valued analytic functions of the point of R , invariant for the transformations of G ; they will prove to be rational functions on a proper algebraic model of R^* . The theory of abelian modular functions is particularly important with respect to the theory of automorphic functions, of which it gives a quite significant model; moreover it may lead to important contributions to the most advanced problems of algebraic geometry (problem 1 rephrases that of birational classification of p -dimensional Picard varieties) including the uniformization for algebraic varieties. Finally, a whole set of interesting problems which belong to the field of differential geometry is connected with this theory. In fact, a suitable extension of the group G leads to the symplectic group U , a $p(2p+1)$ -parameters continuous group, absolutely transitive in the region R , and consequently to an Riemannian metric in R (which thus becomes a Riemannian manifold) with respect to which the transformations of U are motions. These remarkable and interesting differential properties of R , already known through Siegel's work (to them contributions have also been given by the author and by B. Segre), form the subject of symplectic geometry which reduces to Poincaré's hyperbolic geometry for $p = 1$. — This wide account is concluded by a short hint to some related problems and by bibliographic references on the subject.

M. Rosati.

Dedò, M.: Una classica superficie del quarto ordine ed eleganti questioni ad essa collegate. II. III. Periodico Mat., IV. Ser. 31, 176—185, 207—228 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 50, 158.) Verf. gibt in der zweiten Abhandlung weitere Eigenschaften der desmischen Fläche, im besonderen der Flächen: 1. $(x^2, y^2, z^2, t^2) = -1$; 2. $(x^2, y^2, z^2, t^2) = F$ ($F = -e^{2\pi i/3}$, $F = -e^{4\pi i/3}$). In der dritten Abhandlung behandelt Verf. die Flächen vierter Ordnung, welche Schmiegungsdoppelpunkte besitzen (d. h. Doppelpunkte D , in welchen der Tangentenkegel aus Geraden gebildet ist, die in D die Fläche vierfach berühren). Ferner wird bewiesen, daß die desmische Fläche die einzige Fläche vierter Ordnung mit 12 Schmiegungsdoppelpunkten ist.

M. Piazzolla-Beloch.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Julia, Gaston: Cours de géométrie infinitésimale. Fasc. 1: Vecteurs et tenseurs, théorie élémentaire.** (Cours de l'École Polytechnique.) 2. éd. Paris: Gauthier-Villars 1953. XV, 102 p. Fr. 2000,—.

Dieses Buch ist entstanden aus Vorlesungen an der „École Polytechnique“. Im ersten Kapitel werden die elementaren Operationen der Vektoranalysis geometrisch eingeführt und daneben analytisch gedeutet. Im zweiten Kap. wird ein Tensor (Affinor der Valenz zwei in bezug auf orthogonale Koordinaten) definiert als eine lineare Transformation für Vektoren. Die Operationen (wie z. B. Überschiebungen) für symmetrische Tensoren werden geometrisch gedeutet mittels der zugehörigen quadratischen Fläche (Indikatrix). Kap. III handelt über die verschiedenen Integralsätze für Vektoren und Tensoren. Die Formeln werden in direkter Schreibweise angeschrieben. Das letzte Kap. enthält die Darstellung in bezug auf nicht orthogonale Cartesische Koordinaten. Dabei bedient Verf. sich der Komponentendarstellung.

J. Haantjes.

Candido Gomes, Marco Expedito: Reeller Drehungsoperator. *Gac. mat., Madrid* 5, 106—113 (1953) [Portugiesisch].

Fulton, Curtis M.: Generalized Weierstrass tensors. *Tensor, n. Ser.* 3, 23—25 (1953).

Es ist bekannt, daß in einem eingebetteten und eingespannten Raum die Koordinaten des Überraumes als überzählige Koordinaten verwendet werden können. Die Idee geht wohl auf Weierstrass zurück und wurde schon in einer früheren Arbeit des Verf. (*Amer. Math. Monthly* 59, 544—547 (1952)) erwähnt. Tensoren im Unterraum können auch in bezug auf diese überzähligen Koordinaten definiert werden, und dies bedeutet natürlich, daß sie als Projektionen von Größen des Überraumes aufgefaßt werden. Dies wird hier für eine V_n in V_m an einigen Beispielen erläutert. Die Größe Δ korrespondiert mit B_λ^α (Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, 2. Aufl., Bd. II, Groningen 1938, dies. Zbl. 19, 183), der Verf. bemerkt aber nicht, daß $\partial_j F_\alpha$ mit C_γ^α korrespondiert. Die Behandlung könnte durch Verwendung von C_γ^α , B_b^α , B_λ^α bedeutend vereinfacht werden.
J. A. Schouten.

Kawaguchi jr., Michiaki: On some theorems in the g -extensor analysis. *Tensor, n. Ser.* 3, 46—52 (1953).

g -Extensors have been defined by the author in a former paper (this Zbl. 47, 403). In this paper several g -extensors both ordinary and reduced ones are constructed starting from two ordinary extensors $U^{\alpha i}$ and $V_{\alpha i}$ by using the operators introduced by A. Kawaguchi (this Zbl. 23, 169).
J. Haantjes.

Sasayama, Hiroyoshi: On extensors in the space of non-integral order. *Tensor, n. Ser.* 3, 53—64 (1953).

The line-element of order μ for a non-integral positive real number of a curve $x^i = x^i(t)$ is based upon the notion of fractional differentiation. It consists of the infinite set of derivatives $x^{(\alpha)i}$, $\alpha = \mu, \mu - 1, \dots$. A quantity $V^{\alpha i}$ transforming under the transformation $x'^i = x'^i(x^i)$ as the derivatives $x^{(\alpha)i}$ is called a contravariant exvector of grade μ . A quantity $W_{\alpha i}$ transforming as the derivatives $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) (\partial_i F)^{(\mu-\alpha)}$ ($\mu - \alpha = 1, 0, \dots$) of a function $F(x^i)$ is called a covariant exvector of grade μ . Several theorems are obtained concerning these exvectors and the corresponding crossed exvectors.
J. Haantjes.

Truesdell, C.: The physical components of vectors and tensors. *Z. angew. Math. Mech.* 33, 345—356 (1953).

Verf. erläutert zunächst Ricci's und Levi-Civita's „composants de vecteurs selon les lignes coordonnées“ und die Schwierigkeiten, die sich einstellen, will man ko- und kontravariante Komponenten in jedem Falle physikalisch interpretieren, insbesondere auch dann, wenn sie die physikalische Dimension des Vektorfeldes verloren haben, zu dem sie gehören. So sind z. B. die Komponenten eines Skalars $f(x_1, x_2)$ in Polarkoordinaten $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ durch die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial r$, $\partial f / \partial \theta$ gegeben. Ist nun $f(x_1, x_2)$ etwa ein Geschwindigkeitspotential, so hat $\partial f / \partial r$ die physikalische Dimension Länge/Zeit $\partial f / \partial \theta$ jedoch die physikalische Dimension $(\text{Länge})^2/\text{Zeit}$. Verf. behandelt weiterhin verschiedene Beiträge zu diesem Problem der physikalischen Interpretation, darunter insbesondere Arbeiten von Murnaghan, Mc. Connel, Synge, Schild, Green und Zerna. Besondere Schwierigkeiten zeigen sich in diesem Zusammenhang in der Elastizitätstheorie. — Für eine systematische Behandlung des Problems empfiehlt es sich, die Definition „physikalischer Komponenten“ eines kontravarianten Vektorfeldes λ^i gemäß $\lambda(i) = \sqrt{g_{ii}} \lambda^i$ (nicht summieren) an die Spitze zu stellen. Die $\lambda(i)$ unterliegen jetzt komplizierteren Transformationsgesetzen als die λ^i , nämlich $\lambda(i) = \sqrt{\bar{g}_{ii}/g_{jj}} (\partial \bar{x}^i / \partial x^j) \lambda(j)$ (nur über j summieren). Die physikalischen Komponenten $\lambda(i)$ können auch aus den kovarianten Komponenten λ_j gewonnen werden: $\lambda(i) = \sqrt{g_{ii}} g^{ij} \lambda_j$ (nur über j summieren). Zunächst sind jetzt skalare und vektorielle Produkte durch physikalische Komponenten darzustellen. In orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen kann dies nach den Formeln der elementaren Vektorrechnung durchgeführt werden. Sodann werden eingehend die physikalischen Dimensionen der physikalischen Komponenten von Vektoren und Tensoren zweiter Stufe untersucht. Da rechtwinklig kartesische Koordinaten Spezialfälle Riemannscher Normalkoordinaten darstellen, die örtlich

in jedem Riemannschen Raum zur Verfügung stehen, und solche Normalkoordinaten die Dimension von Längen haben, kann man allen Vektorkomponenten in Riemannschen Normalkoordinatensystemen die gemeinsame Dimension von Längen zuteilen, die Verf. die natürliche Dimension des Vektorfeldes nennt. Diese natürliche Dimension wird jetzt mit der physikalischen Dimension identifiziert. Für ein gegebenes gemischtes Tensorfeld a^i_j , zweiter Stufe und ein beliebiges kontravariantes Vektorfeld λ^i lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, um für $a^i_j \lambda^j$ bzw. $\lambda^i a^i_j$ die physikalische Dimension von $a(ij)\lambda(j)$ bzw. $\lambda(ij)(ji)a$ zu erhalten (in irgendeinem Koordinatensystem). Insbesondere sind die Spuren der Matrizen (a^i_j) , (a^i_j) , $(i\ j)a$ und $a(i\ j)$ gleich. Auch gilt $(i\ j)a = a(j\ i)$ im Falle symmetrischer Tensoren (die Matrix der „linksphysikalischen Komponenten“ ist die transponierte Matrix der „rechtsphysikalischen Komponenten“). Ferner ergibt sich: in einem orthogonalem Koordinatensystem ist die Matrix der linksphysikalischen Komponenten eines symmetrischen Tensors gleich der Matrix der rechtsphysikalischen Komponenten und ist eine symmetrische Matrix. Für ein Tensorfeld a^i_j haben alle rechts- und alle linksphysikalischen Komponenten dieselbe physikalische Dimension und diese Dimension ist die natürliche Dimension des Feldes. Die vier Matrizen a^i_j , a^j_i , $(i\ j)a$, $a(i\ j)$ haben gemeinsame Eigenwerte. Die Links-(Rechts-)Hauptachsen von a^i_j fallen mit denjenigen der Matrix ihrer linksphysikalischen (rechtsphysikalischen) Komponenten $(i\ j)a$ ($a(i\ j)$) zusammen. Wenn a^i_j symmetrisch ist, so haben die vier Matrizen a^i_j , a^j_i , $(i\ j)a$, $a(i\ j)$ gemeinsame Hauptachsen. Sodann werden höhere Tensoren und kovariante Ableitungen (Gradienten) im Falle orthogonaler Koordinaten untersucht. Allgemein, bemerkt Verf., haben alle entwickelten Ergebnisse Gültigkeit in beliebigen n -dimensionalen Riemannschen Räumen mit Ausnahme der Resultate, die Vektorprodukte betreffen.

M. Pinl.

● Beyer, Rudolf und Ernst Schörner: Raumkinematische Grundlagen. Graphisch behandelt und plastisch gesehen als Einführung in die räumliche Mechanik. München: Verlagsbuchhandlung J. A. Barth 1953. 104 S., 33 Strichzeichnungen im Text und 16 farb. Raumbilder. DM 9.60.

Die beiden Verff. bringen in neuer und origineller Weise eine Einführung in die räumliche Mechanik und geben dem Techniker und angewandten Mathematiker an Hand von vielen, wohl ausgeführten Beispielen nicht nur die Hilfsmittel und Grundlagen für die Analyse und Synthese eigentlicher Raumgetriebe, sondern auch überhaupt für die räumliche graphische Kinematik, Statik und Dynamik. Die vektoranalytische Behandlung wird gleichzeitig mit vektorgeometrischen Konstruktionen auf Grund von Abbildungsprinzipien oder Verfahren und Zeichenvorschriften der Darstellenden Geometrie gebracht. Zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens und zur Einführung und besseren Erfassung der Fragestellungen der räumlichen Kinematik, Statik und Dynamik sind 16 Anaglyphenbilder beigelegt, die ein plastisches Schen ermöglichen. Die Fragestellungen und Methoden der technischen Anwendungen stehen überall im Vordergrund, trotzdem kann auch der Mathematiker und Geometer seine Freude an diesem sauber ausgestatteten Büchlein haben und mannigfachen Nutzen, nicht nur in pädagogischer Hinsicht ziehen. — Kurze Inhaltsangabe: 1. Grundbegriffe der Vektorrechnung in rechnerischer und zeichnerischer Darstellung, wobei auch kurz auf die Differentialgeometrie der Raumkurven eingegangen wird. Vektorprodukt als Drehvektor und Momentvektor. Momentanschräubung und deren Geschwindigkeitszustand. Räumliche Zwei-Punkteführung. Zeichnerische Ermittlung des Skalarproduktes, Kraftreduktion, Gleichgewichtskraft, Stabspannungen, Führungs- und Gelenkkräfte. Abbildung von Mayor-Mises. Grundaufgaben der Raumstatik. — 2. Zusammensetzung räumlicher Bewegungen, insbes. zweier Momentanschräubungen, mit Sonderfällen. Schrotten der Achsenflächen bei einem räumlichen Bewegungsvorgang, schrotende Drehhyperboloide, Schraubenträger-Getriebe, Drehungen mit sich schneidenden Achsen (Drehungen im Bündel), sphärische Kurbelgetriebe, allgemeine Raumgetriebe. — 3. Beschleunigungsverhältnisse der Schraubenbewegung, Schieb- und Winkelbeschleunigung, Beschleunigung eines Systempunktes, Beschleunigungspol, Zentralpunkt, Krümmungsmittelpunkte von Punktbahnen, Beschleunigungszustand bei gegebenem Beschleunigungspol, räumliche schwingende Kurbelschleife.

H. R. Müller.

Tonolo, Angelo: Sopra un problema di Darboux relativo alla meccanica dei mezzi continui. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 578—582 (1953).

Bei der Deformation einer R_3 gibt es zu jeder Transformation in jedem Punkte drei gegenseitig senkrechte Richtungen, die bei der Transformation gegenseitig senkrecht bleiben. Darboux hat untersucht, bei welchen Transformationen diese korrespondierenden Richtungen jeweils parallel bleiben und überdies Γ_2 -normal sind. Die erste Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die X , Y , Z als Funktionen der x , y , z Bestimmungszahlen eines Gradientenvektors $\xi_x U$, $\xi_y U$, $\xi_z U$ sind, und die zweite dann und nur dann, wenn U eine Differentialgleichung dritter Ordnung erfüllt. Anschließend an seine früheren Arbeiten [Rend. Sem. mat. Univ. Roma

[V. Ser. 2, 1—23 (1941); dies. Zbl. 36, 230; Commentationes Pontificia Acad. Sci. 13, 29—53 (1949)] zeigt der Autor, wie sich die Bedingungen mit Hilfe von drei Differentialinvarianten ausdrücken lassen.

J. A. Schouten.

Billimovitch, A.: Sur l'homogénéisation des équations de nature vélocidique. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 5, 29—34 (1953).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Majorov, V. M.: Invariante Charakterisierung des verallgemeinerten Potentialnetzes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 965—968 (1953) [Russisch].

Verf. versteht unter einem verallgemeinerten Potentialnetz der Ebene ein solches, bezüglich dessen als Koordinatennetz sich g_{11} und g_{22} in der Gestalt $\partial w / \partial u$ und $\partial w / \partial v$ mit einer gewissen Funktion $w(u, v)$ schreiben lassen. Es wird gezeigt, daß ein solches Netz, sofern es nicht ein Čebyševsches ist, durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet werden kann: Es bildet mit den Feldlinien des sog. Čebyševschen Vektors $v = -(2g)^{-1} \partial g_{22} / \partial u, (1/2g) \partial g_{11} / \partial v$ ein Sechseckgewebe. Bei den bekannten Netzen ohne Umwege fallen die verallgemeinerten Potentialnetze mit den rhombischen zusammen. Ein weiteres Beispiel dafür sind zwei Parallelenbüschel der Lobačevskischen Ebene.

W. Burau.

Wintner, Aurel: On the local rôle of the theory of the logarithmic potential in differential geometry. Amer. J. Math. 75, 679—690 (1953).

Let $g_{ij} du^i du^j$ be a two-dimensional riemannian metric of class C^n [i. e. g_{ij} are functions of class C^n and satisfy the conditions $g_{ij} > 0, \det(g_{ij}) > 0$]. The main result of the paper is the following theorem. If $n > 1$ and the metric has a curvature $K(u^1, u^2)$ of class C^{n-1+m} , where $0 \leq m \leq 2$, then the given metric is isometric to a conformal metric [i. e. a metric of the form $h(x, y)(dx^2 + dy^2)$] of class C^{n+m} , possessing a curvature of class C^{n-1+m} in terms of the new parameters x, y . The necessity of the restriction $0 \leq m \leq 2$ remains undecided (for every n). Some consequences and variants of this theorem are also given. *L. A. Santaló.*

Antonescu, M.: Sur un théorème de Hilbert dans la géométrie non euclidienne de Lobatschewski-Bolyai. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 197—208, russische und französ. Zusammenfassung. 208—209, 210—211 (1953) [Rumänisch].

Bekanntlich hat Beltrami gezeigt, daß auf der Pseudosphäre die hyperbolische nicht-euklidische Geometrie gilt. Aber es ist nicht möglich, auf dieser Fläche die hyperbolische Ebene vollständig abzubilden; denn es gilt der Satz von Hilbert, daß es keine Fläche konstanter negativer Krümmung gibt, die überall regulär ist. Hilberts Beweis dieses Satzes geht davon aus, daß auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung die Asymptotenlinien ein Tschebyscheffsches Netz (T. N.) bilden. Verf. gibt einen neuen Beweis des Hilbertschen Satzes. Er untersucht die T. N., die man in der hyperbolischen Ebene konstruieren kann, und beweist, daß es in dieser Ebene eine Kurve gibt, für die die Winkel des T. N. Null werden, und daß diese Kurve eine Einhüllende der Netzkurven ist. Wenn es nun eine überall reguläre Fläche konstanter negativer Krümmung gäbe, die also in jedem Punkt zwei Asymptotenlinien mit einem von Null oder einem ganzen Vielfachen von π verschiedenen Winkel besitzt, so würde das System dieser Asymptotenlinien, weil es ein T. N. ist, einem in der hyperbolischen Ebene konstruierten T. N. Punkt für Punkt entsprechen. Die Asymptotenlinien der Fläche müßten demnach eine Hüllkurve besitzen. Das widerspricht aber der Annahme der Regularität der Fläche.

M. Zacharias.

Grötemeyer, K. P.: Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen. Math. Z. 59, 258 (1953).

Aus den Formeln der früheren Arbeit des Verf. „Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattenlinie ist“ (dies. Zbl. 50, 380) läßt sich ohne weiteres der dort nicht ausdrücklich hervorgehobene Satz folgern: In der Gesamtheit der zu einer derartigen Fläche F isometrischen Flächen ist F dadurch ausgezeichnet, die kürzeste Gesamtlänge 2π des sphärischen Bildes der Randkurve zu besitzen. Dieser Satz kann natürlich auch für endliche Verbiegungen formuliert werden.

E. Rembs.

Grotemeyer, K. P.: Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen. Math. Z. 59. 278—289 (1953).

Mützen sind ebenrandige konvexe Kalotten mit eindeutiger Orthogonalprojektion auf die Randebene. Ihre an sich bekannte Starrheit bei Gleitverbiegungen beweist Verf. mit seiner vektoriellen Integralformel für infinitesimale Verbiegung; mit dem Stellungsvektor e der Randebene multipliziert lautet sie $\oint (\eta \eta' e) ds = 2 \iint (\alpha \delta - \beta \gamma) (\xi e) d\sigma$, wobei alle Größen wie in Blaschkes Lehrbuch (Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I, Berlin 1945) bezeichnet sind. Der Integrand rechts hat, wo er nicht verschwindet, überall dasselbe Vorzeichen. Interessant ist die Umwandlung des linken Integranden. Für Gleitverbiegungen kann man $(e \delta) = (e \delta') = (e \eta \xi') = 0$ fordern, so daß wegen $\eta' = \delta a \xi' + \delta b \eta$ (vgl. Blaschke, Streifentheorie) $(\eta \eta' e) = \delta b (\eta \eta e) = \delta b \delta (e \eta)$ folgt, was sich mit $(e \eta) = \sin q$ weiter auf die Form $k (\delta q)^2$ bringen läßt. Bei genauer Beachtung der Vorzeichen zeigt sich, daß die des linken Integranden verschieden von denen des rechten sind. Es müssen also beide verschwinden: $\delta q = 0$ am Rande, $\alpha \delta - \beta \gamma$ überall im Innern. — Mit derselben Integralformel wird bewiesen: Die Mützen lassen keine infinitesimalen Verbiegungen mit $\oint \delta^2 k ds \leq 0$ zu. (Bem. des Ref.: Die Unmöglichkeit von $\oint \delta^2 k ds < 0$ folgt jetzt sofort aus der vom Ref. kürzlich (nach Erscheinen dieser Arbeit) angegebenen Formel $\oint \delta k ds = 0$ in Verbindung mit dem Satz von Fenchel $\oint k ds \geq 2\pi$.) — Etwas mehr Rechnung erfordert dann der Beweis des folgenden Satzes: Zwei isometrische Mützen sind notwendig kongruent oder symmetrisch, für den die bekannte vektorielle Integralformel des Verf. für endlich verschiedene isometrische Flächen benutzt wird. — Zum Schluß wird gezeigt, daß man die vektorielle Integralformel für infinitesimale Verbiegung aus der für endlich verschiedene isometrische Flächen ableiten kann. E. Rembs.

Pogorelov, A. V.: Über die Stabilität isolierter Kantenpunkte auf einer konvexen Fläche bei Verbiegung. Uspechi mat. Nauk 8. Nr. 3 (55), 131—134 (1953) [Russisch].

Verf. gibt in dieser Note ein Beispiel dafür, daß eine konvexe glatte Fläche in eine solche verbogen werden kann, deren Glattheit in einzelnen Punkten gestört ist. Verf. glaubte ursprünglich selber nicht an eine solche Möglichkeit. Die in diesem Beispiel auftretende Fläche erstreckt sich ins Unendliche und ist als Rand der konvexen Hülle zweier Kugeln, einer Halbgeraden sowie einer Strecke definiert; sie besitzt an den Endpunkten der Strecke Spitzen. Der Nachweis, daß sie sich in eine überall glatte Fläche verbiegen läßt, ist nicht ganz einfach und erfordert die Konstruktion einer Folge von Flächen, als deren Grenzfläche erst die gewünschte glatte Fläche auftritt. W. Burau.

Pogorelov, A. V.: Zur Frage der Existenz einer konvexen Fläche mit vorgegebener Summe der Hauptkrümmungsradien. Uspechi mat. Nauk 8. Nr. 3 (55), 127—130 (1953) [Russisch].

Von Christoffel ist behauptet worden, daß eine konvexe Fläche durch die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien $F(\xi)$ in Abhängigkeit von der Normalen ξ bestimmt ist. Dabei hat die Funktion $F(\xi)$, außer daß sie größer gleich 0 ist, nur die Bedingung zu erfüllen, daß das Integral $\int \xi F(\xi) d\sigma$, erstreckt über die Einheitskugel, verschwindet. Von Alexandrov (s. dies. Zbl. 15, 410) ist jedoch erkannt worden, daß diese Bedingungen entgegen der Behauptung Christoffels nicht ausreichen. In der vorliegenden Note zeigt Verf., daß jedenfalls die weitere Bedingung $\lambda(\xi, t) = 0$ ausreicht. Hierbei ist $\lambda(\xi, t) = F(\xi) - F_{\xi\xi}(\xi)$ gesetzt und λ als Funktion des Punktes ξ auf der Einheitskugel K und der von ξ ausgehenden Tangenten t aufzufassen. Diese Abhängigkeit tritt in der Definition von λ rechts in der doppelten Ableitung nach der Bogenlänge s des die Tangente t in ξ berührenden Großkreises in Erscheinung. W. Burau.

Sem'in, Ferruh: Sur une propriété caractéristique des cyclides de Dupin et des surfaces de révolution. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 18, 288—297 (1953).

Let S be a surface in ordinary space and P a point on S . The locus of the centers of curvature of the D -curves of S through P (D -curves = curves with the osculating sphere at every point tangent to S) is, in general, an algebraic curve C of 8. degree. The surfaces for which C is a plane curve (for every P) have been considered by

Blaschke, the reviewer and the author. In the present paper the author investigates the surfaces for which C is a spherical curve (for every P); the result is that these surfaces are the cyclides of Dupin and the surfaces of revolution (the quadrics being excluded). Some properties of C are also given. *L. A. Santaló.*

Gorowara, K. K.: Skewness of distribution of the generators of certain ruled surfaces and their parameters of distribution. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **18**, 223—230 (1953).

Gegeben ist die Regelfläche $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1$ ($a =$ Einheitsvektor der Erzeugenden, $\bar{a} =$ Momentenvektor bezüglich des Nullpunkts, $\varepsilon^2 = 0$) und dazu eine Regelfläche $A^* = a^* + \varepsilon a^*$, deren Erzeugende A_1^* durch die Kehlpunkte der Erzeugenden A_1 gehen. Bezeichnet man mit R. S. Mishra den Ausdruck $[a_1 a_1' a_1''] / (a_1'')^{3/2}$ als die „Schiefe“ (skewness of distribution) der Regelfläche A_1 , und betrachtet man außer der Fläche A_1 noch die Normalenfläche A_2 längs der Striktionslinie M und das Striktionsband A_3 , analog zu A_1^* noch A_2^* und A_3^* , so stellt sich die Arbeit die Aufgabe, Drall und Schiefe der Flächen A_1^* , A_2^* , A_3^* zu bestimmen. Aus den entstehenden Formeln folgt z. B.: liegt A_1^* in der Zentralebene von A_1 im Kehlpoint M und bildet A_1^* mit A_1 einen festen Winkel, so haben die Normalenflächen von A_1 und A_1^* gleiche Schiefe und gleichen Drall. Verschiedene andere Sonderfälle beziehen sich auf Regelflächen, deren Striktionslinie eine Böschungslinie oder eine Bertrandsche Kurve ist. (Viele Druckfehler!) *K. Strubecker.*

Sevrin, A.: Sur une surface réglée du quatrième ordre. *Mathesis* **62**, 303—314 (1953).

Wenn eine Gerade so längs zwei zueinander senkrechten Geraden des Raumes gleitet, daß der Abstand ihrer Schnittpunkte mit den beiden festen Geraden konstant bleibt, entsteht eine Regelfläche 4. Ordnung. Ihr Volumen, die Striktionslinie und eine Reihe differentialgeometrischer Invarianten werden berechnet. *H. Gericke.*

Bhattacharya, P. B. and Ram Behari: Fundamental equations of condition to be satisfied by the coefficients of Sannia's quadratic forms. *Ganita* **4**, 14—17 (1953).

Es werden mit tensoriellen Methoden die beiden Bedingungsgleichungen hergeleitet, welche von den Koeffizienten der beiden Kummerschen quadratischen Differentialformen der differentiellen Liniengeometrie erfüllt sein müssen. Diese Gleichungen lassen sich besonders einfach schreiben, wenn man die Differentiationen kovariant nach dem Maßtensor des sphärischen Bildes der Linienkongruenz vornimmt. Ebenso werden auch die drei Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der quadratischen Differentialformen von Sannia hergeleitet. Durch Eintragen der ausführlichen Bedeutung der kovarianten Ableitungen erhält man die klassischen Formeln der Lehrbücher. *K. Strubecker.*

Mishra, Ratan Shanker and Shri Krishna: On the congruence of Ribaucour. *Ganita* **4**, 39—49 (1953).

Im Anschluß an Arbeiten von R. Behari und R. S. Mishra [*Proc. Indian Acad. Sci. A* **28**, 132—141 (1948); *Proc. nat. Inst. Sci. India* **15**, 85—92 (1949), **16**, 83—86 (1950)], R. S. Mishra [*Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **16**, 1—7 (1951)] und S. Krishna (dies. Zbl. **48**, 154) werden mit tensoriellen Methoden Ribaucoursche Kongruenzen untersucht: Sind S und S_1 zwei einander durch orthogonale Linienelemente entsprechende Flächen, so erhält man eine Ribaucoursche Kongruenz, wenn man durch die Punkte der Bezugsfläche S_1 Parallele zu den Normalen der Leitfläche S zieht. Daneben wird die reziproke Ribaucour-Kongruenz studiert, die man erhält, wenn man durch die Punkte von S Parallele zu den Normalen von S_1 zieht. Insbesondere werden verschiedene Deutungen der Bianchischen charakteristischen Funktionen Φ und Φ_1 dieser beiden Ribaucourschen Kongruenzen gegeben. *K. Strubecker.*

Upadhyay, M. D.: On Φ -congruences. *J. math. Soc. Japan* **5**, 95—104 (1953).

Ist eine Kongruenz durch eine Schar von Regelflächen gegeben, so bilden die Strahlen, welche benachbarte Erzeugende dieser Regelflächen unter dem festen Winkel Φ schneiden, eine neue Kongruenz (Φ -Kongruenz). Nach Ranga Chariar, *Bull. Calcutta math. Soc.* **37**, 133—136 (1945), liegen die Fußpunkte der Strahlen der Φ -Kongruenz auf den Striktionslinien der Regelflächen; ihr Ort kann als Bezugsfläche der Φ -Kongruenz dienen. Die mit tensoriellen Methoden durchgeführte Arbeit gibt Ausdrücke für den Drall und den Abstand des Zentralpunkts von der Bezugsfläche sowie jene Regelflächen der Φ -Kongruenz, deren sphärische Bilder Minimallinien sind. — Einige Anwendungen. *K. Strubecker.*

Upadhyay, M. D.: Some properties of Φ -congruences. *Ganita* **4**, 51—60 (1953).

Verf. setzt seine Betrachtung der im vorsteh. Referat eingeführten Φ -Kongruenzen (deren Strahlen benachbarte Strahlen einer gegebenen Kongruenz unter

dem festen Winkel Φ schneiden) fort. Er gibt die Ausdrücke der quadratischen Differentialformen von Sannia und Kummer für die Φ -Kongruenz an und erhält daraus die Werte der Abstände des Zentralpunktes der Regelflächen der Φ -Kongruenz von der Bezugsfläche und den Drall dieser Regelflächen, sowie verschiedene andere Formeln.

K. Strubecker.

Finikov, S. P.: Stratifizierbare Paare, die zu einer parabolischen Kongruenz von allgemeinen Loten gehören. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 3—12 (1953) [Russisch].

Verf. betrachtet in dieser Arbeit solche schichtbaren Paare von Geradenkongruenzen, bei denen die gemeinsamen Senkrechten zugeordneter Strahlen eine parabolische Kongruenz bilden, d. h. eine solche mit nur einer Brennfläche. Der Ausgangspunkt ist eine derartige parabolische Kongruenz K , die im Sinne Cartans durch bewegliche Dreibeine und zugehörige Differentialformen beschrieben wird. Hierauf wird erst ein Paar zugeordneter Kongruenzen K_1 und K_2 definiert, von denen je ein Strahl r_1 und r_2 den Strahl r von K senkrecht schneiden sollen. Die Bedingung der Schichtbarkeit des Paares K_1, K_2 drückt sich dann in dem Verschwinden eines Systems von Differentialformen 2. Grades aus, deren Lösbarkeit diskutiert wird. Im wesentlichen werden K_1 und K_2 dabei durch 4 Ortsfunktionen $h_1, h_2, \alpha_1, \alpha_2$ festgelegt, wobei die Abstände h_1, h_2 die Schnittpunkte der Geraden r_1, r_2 mit r und die Winkelfunktionen α_1, α_2 die Lage der beiden Strahlen gegenüber den Fokalebenen des Strahls r in K bestimmen. Ein bemerkenswerter Sonderfall liegt bei den sog. symmetrischen Paaren vor, bei denen $(h_1 + h_2)^2$ und $(\alpha_1 + \alpha_2)^2$ beide durchweg verschwinden.

W. Burau.

Berezina, L. Ja.: Einige Sätze über zweiseitig stratifizierbare Paare mit reellen Fokallflächen. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 101—110 (1953) [Russisch].

Verf. behandelt die stratifizierbaren Paare von Kongruenzen in derselben Weise, wie es in der Arbeit von Finikov (vgl. vorhergehend. Refer.) geschieht, d. h. die beiden Kongruenzen werden auf die Kongruenz der gemeinsamen Senkrechten zugeordneter Strahlen bezogen. Es wird mit diesen Hilfsmitteln die wohl zuerst von Finikoff [Finikov, Mat. Sbornik, n. Ser. 12 (54) 287—314 (1943)] gestellte Frage nach den doppelt stratifizierbaren Paaren von Kongruenzen untersucht. In einer Reihe von Sätzen werden Bedingungen zwischen den das Paar festlegenden Winkel- und Abstandsfunktionen angegeben, die zusammen mit einer von Finikoff (s. o.) angegebenen Bedingung ausreichen, um die zweiseitig stratifizierbaren Paare zu kennzeichnen.

W. Burau.

Blaschke, W.: Zur topologischen Differentialgeometrie. J. reine angew. Math. 191, 153—157 (1953).

Anwendung halbinvarianter alternierender Differentiationen (vgl. G. Bol, dies. Zbl. 43, 94) auf ebene Kurven-3-Gewebe und auf Flächen-4-Gewebe. Stellen etwa $\sigma_i = a_i dx + b_i dy = 0$; $i = 1, 2, 3$ die Richtungen eines ebenen 3-Gewebes in der (x, y) -Ebene dar, und ist die Normierung so gewählt daß $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, so sind noch Umnormungen der σ_i mit dem gleichen Faktor ϱ möglich. Setzt man $d\sigma_1 = h_1 \sigma_2 \wedge \sigma_3$, $d\sigma_2 = h_2 \sigma_3 \wedge \sigma_1$, $d\sigma_3 = h_3 \sigma_1 \wedge \sigma_2$ so ist $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ und für die Form $\pi = h_3 \sigma_2 \wedge h_2 \sigma_3 \wedge h_1 \sigma_3 \wedge h_3 \sigma_1 \wedge h_2 \sigma_1 \wedge h_1 \sigma_2$ gilt bei unseren Umnormungen $\pi^* = \pi \cdot d \log \varrho$. Bei der Differentiation von Halbinvarianten läßt sich dann π als Reeb'sche Form verwenden. $d\pi = 0$ kennzeichnet die Sechseckgewebe. Entsprechend im Raum, hier kennzeichnet $d\pi = 0$ die Flächensechseckgewebe. Vgl. auch nachstehendes Referat.

G. Bol.

Blaschke, Wilhelm: Osservazioni sui tessuti. Rend. Cir. mat. Palermo, II. Ser. 2, 36—39 (1953).

Stellen $u_i(x, y) = \text{konst.}$ ($i = 1, 2, 3$) die Kurvenscharen eines ebenen Dreigewebes dar und ist $T(u_1, u_1, u_3) = 0$, so ist die Pfaff'sche Form $\gamma = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \log T_i \right) du_i$

bis auf Addition totaler Differentiale invariant bei allen Änderungen der Darstellung des Gewebes; also bei Substitutionen $u_i' = f_i(u_i)$, bei Ummormungen $T'' = H(u_1, u_2, u_3) T$ und bei Transformationen $T''' = F(T)$ von T . Daher ist das äußere Differential $d\gamma$ für das Gewebe ein topologisch invariantes Oberflächenelement; unter Benutzung der Invarianz sieht man sehr leicht, daß es nur für die Sechseckgewebe identisch verschwindet. — Entsprechendes gilt für vier Flächenscharen im Raum, hier kennzeichnet $d\gamma = 0$ die Flächensechseckgewebe und man erhält einen besonders einfachen Beweis des Satzes von Dubourdieu: Wird in den Flächen dreier Scharen von denjenigen der anderen jeweils ein Sechseckgewebe ausgeschnitten, so gilt das gleiche für die vierte. G. Bol.

Bartsch, Helmut: Über eine Klasse von Hyperflächengeweben. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **34**, 349—364 (1953).

Verf. untersucht Gewebe aus $n + 1$ Hyperebenen-scharen im R_n , bei denen die in jedem dreidimensionalen linearen Schnitttraum von den nicht beteiligten Scharen ausgeschnittenen Ebenen-4-Gewebe geradlinige Diagonalen haben. Die Hyperebenen bilden dann $n + 1$ „Büschel“, deren „Zentren“ $(n - 2)$ -dimensionale lineare Räume sind, die auf einer algebraischen Hyperfläche liegen. Diese enthält ∞^{n-2} paarweise windschiefe Geraden, welche sämtliche Zentren treffen. — Projektiv verschiedene derartige Gewebe sind auch topologisch verschieden. Ist eines der Schnittgewebe ein Achteckgewebe, so gilt das für alle und das Gewebe läßt sich auf parallele Hyperebenen-scharen topologisch abbilden. Existieren Diagonalhyperflächenscharen (vgl. H. Bartsch, dies. Zbl. **44**, 362), so sind diese Hyperebenenbüschel. Gibt es eine Diagonalhyperflächenschar, so stets weitere. G. Bol.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Jonas, Hans: Die Differentialgleichung der Affinsphären in einer neuen Gestalt. *Math. Nachr.* **10**, 331—352 (1953).

Ausgehend von der Bemerkung, daß auf zwei bezüglich der nullteiligen Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ polaren Flächen (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') die Ebenen $\eta/\xi = u = \text{const}$ und $\zeta' = v = \text{const}$ konjugierte Netze ausschneiden, erhält Verf. durch Einführen der neuen Veränderlichen u, v die Differentialgleichung der Affinsphären in der neuen Gestalt (*) $(R_u/R^2 v^2)_u = (R^2 R_v/v^2)_v$. Sie hat u. a. den Vorteil, daß man zur Bestimmung einer Affinsphäre bei Vorkenntnis eines Integrals R nur noch zwei Quadraturen braucht. — Der Entdecker der Affinsphären, G. Tzitzéica [*C. r. Acad. Sci.*, Paris **146**, 165—166 (1908), **150**, 955—956, 1227—1229 (1910); *Rend. Circ. mat. Palermo* **25**, 180—187 (1908), **28**, 210—216 (1909)] verband mit den Affinsphären eine Biegungsklasse; Verf. zeigt, daß auch die Klasse der Flächen $s^2 - rt = (pq)^{4/3}$ mit den Affinsphären verbunden ist; durch Legendresche Transformation entsteht daraus die Klasse der Flächen $s^2 - rt = (xy)^{-4/3}$. — Es wird weiter bemerkt, daß die Bestimmung der Asymptotenlinien der Affinsphären nur Quadraturen erfordert. Sodann werden die Sonderfälle der windschiefen Affinsphären und der affinsphärischen Drehflächen an Hand der neuen Differentialgleichung (*) dieser Flächen behandelt. Den Abschluß bildet eine neue geometrische Deutung der Differentialgleichung (*) der Affinsphären und, damit zusammenhängend, die Bemerkung, daß von der Gleichung (*) auch ein auf die konjugierten Parameter u, v bezogener zusammengesetzter W -Verband abhängt, der in der einen Flächenschar zwei einzelne Affinsphären mit den Konstanten c und $1/c$ enthält, während sämtliche Flächen der anderen Schar Affinsphären mit der Konstanten 1 sind. Die Konstante c ist dabei der alten Tzitzéicaschen Eigenschaft der Affinsphären entnommen, daß ihr Krümmungsmaß K proportional zur vierten Potenz des Abstandes w der Tangentenebenen vom Nullpunkt ist ($K = -c^4 w^4$, $c = \text{const}$). K. Strubecker.

Blañuša, Danilo: Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans des espaces Euclidiens. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron.*, II. Ser. **8**, 3—21 u. serbo-kroat. Zusammenfassg. 22—23 (1953).

Mit elementaren Methoden wird bewiesen, daß es eine einzige Einbettung der elliptisch vermessenen Ebene E_2 in einen euklidisch vermessenen R_n niedrigster Dimension gibt, bei der die Geodätischen (Geraden) der Ebene in Kreise des R_n übergehen; dieser niedrigstdimensionale Raum ist der euklidische R_5 , in dem die

Fläche der kartesischen Darstellung

$$2x = R \sin 2\vartheta \sin \varphi, \quad 2y = R \sin 2\vartheta \cos \varphi, \quad 2z = -\sqrt{3} R (1 - \cos 2\vartheta),$$

$$2u = R \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, \quad 2v = R \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi$$

elliptische Metrik der Gaußschen Krümmung $1/R^2$ trägt. Diese algebraische Fläche Φ_2 liegt im R_5 auf einer Überkugel vom Radius $R/\sqrt{3}$, und die elliptischen Bewegungen erscheinen als Drehungen der Kugel. Ihre einzigen ebenen Kurven sind ihre geodätischen Kreise. Auch ihre Schnittfiguren mit linearen R_3 und R_4 sind leicht zu übersehen.

K. Strubecker.

Calapso, Renato: *Questioni di geometria conforme.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 287—318 (1953).

Die Differentialgeometrie in einer Gruppe hat in den letzten Jahrzehnten kalkülmäßig eine gewisse Vollendung erfahren. Die „orthodoxe“ Methode liefert einen Formelapparat, bei dem alle auftretenden Größen invariant sind gegenüber der zugrunde gelegten Gruppe (W. Blaschke, G. Thomsen u. a.). Die ältere „nicht-orthodoxe“ Methode behandelt die Differentialgeometrie in einer Gruppe auf der Basis einer ihrer Untergruppen. Verf. gibt über letztgenannte einen Überblick mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von P. Calapso (mit Literaturübersicht). — Es werden behandelt: Die Konforminvarianten einer Fläche, ausgedrückt durch die metrischen Invarianten. Die Isothermflächen und ihre Transformation C'_m sowie die Beziehungen zu den Flächen von Guichard. Die Projektivgeometrie der Flächen auf der Basis der affinen Geometrie und die Beziehung zur Konformgeometrie. Die Konformgeometrie von Orthogonalnetzen des euklidischen R_4 und Fragen der Konformabwicklung.

M. Barner.

Lenz, Hanfried: *Über kreistreue konforme Abbildungen zyklischer Flächen aufeinander und auf die Ebene.* S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 55—69 (1953).

Es werden teils mit synthetischen, teils mit Mitteln der elementaren Funktionentheorie die von einer räumlichen Kreisschar gebildeten Flächen studiert, wobei es gelingt, ältere Ergebnisse von G. Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. Paris 1896, S. 439 ff.), A. Demoulin, C. r. Acad. Sci., Paris 173, 341—344 (1921); Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., 1921, 499—507; 1922, 479—504; G. Desmarts, Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 2, 123—182 (1885); 4, 145—158 (1887); C. r. Acad. Sci., Paris 104, 217—220 (1887), A. Thybaut und P. Robert, dies. Zbl. 43, 368, auf einfachere Art herzuleiten. Es wird insbesondere nach jenen Flächen gefragt, die so auf die Ebene konform abgebildet werden können, daß die erzeugenden Kreise projektiv in Kreise übergeführt werden. Dies sind, wie sich zeigt, die Flächen, die längs ihrer erzeugenden Kreise von Dupinschen Zykliken berührt werden. Je nachdem, ob diese Berührung längs einer Krümmungslinie oder längs eines Loxodromenkreises erfolgt, handelt es sich um Kanalfächen oder um eine schon von Desmarts behandelte Flächenklasse, die aus Kreisschraubstreifen besteht. Die Abbildung auf die Ebene ist, außer wenn die erzeugenden Kreise eine isotherme Schar bilden (Fall der isozyklischen Flächen), bis auf eine Kreisverwandtschaft eindeutig bestimmt. [Bem. d. Ref. Einige der geometrischen Überlegungen des Verf., insbesondere in § 5, hätten an Kürze gewinnen können, wenn er sich der einfachen Zusammenhänge seines Gegenstandes mit der sphärischen Raumgeometrie bedient hätte, wie sie z. B. in der Note des Ref. in dies. Zbl. 2, 283 und der dort angegebenen Literatur dargestellt ist. Vor allem wäre es vielleicht zweckmäßig gewesen, die schon vorhandene Nomenklatur zu benützen. Z. B. sind die „Kreisschraubungen“ des Verf. sphärische Schraubungen, nämlich Schraubungen der Sphäre des Ref. usw.]

K. Strubecker.

Villa, Mario: *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 263—273 (1953).

In questa conferenza vengono richiamati taluni risultati di O. Borůvka [Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk. Nr. 72 e 85 (1926—1927)] e di E. Čech (questo Zbl. 41, 90) ricollegandoli ad altri di E. Bompiani (questo Zbl. 33, 215), L. Muracchini (questo Zbl. 51, 389) e A. Rolletto (questo Zbl. 39, 382). È opportuno qui segnalare che l'A. chiama problemi „in grande“ per una trasformazione puntuale tutti i problemi che non concernono unicamente i successivi intorni di una determinata coppia di punti corrispondenti, ossia i problemi che si riferiscono in generale a due regioni piane

corrispondenti: non è però detto che si tratti degli interi piani corrispondenti (contrariamente all'uso che prevale in altri capitoli della Geometria Differenziale).

P. Buzano.

Muracchini, Luigi: Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 417—424 (1953).

Die Geraden der Ebene $\pi_1(x, y)$ gehen durch die Punkttransformation $T[x = f(u, v), y = \varphi(u, v)]$ in Kurven der Ebene $\pi_2(u, v)$ über, die einer Differentialgleichung 2. Ordnung der Form (*) $v'' = a v'^3 + b v'^2 + c v' + d$ genügen, wobei a, b, c, d gewisse Funktionen von u, v sind. Die drei Systeme von Lösungen der Gleichung (**) $a v'^3 + b v'^2 + c v' + d = 0$ bilden die charakteristischen Kurven der Transformation T in der Ebene π_2 , denen in π_1 die charakteristischen Kurven von T in π_1 entsprechen. Beide dreifachen Kurvenscharen zusammen heißen die charakteristischen Systeme von T . Die Koeffizienten in (*) sind nicht beliebig wählbar, sondern müssen zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen, wenn (*) die transformierte der Differentialgleichung $y'' = 0$ der Geraden von π_1 sein soll; bei (**) ist noch ein Faktor $q(u, v) \neq 0$ zulässig, und es entstehen zwei analoge Integrabilitätsbedingungen für die charakteristischen Systeme. Verf. sucht die charakteristischen Systeme vom projektiven Standpunkte aus zu kennzeichnen, eine Klassifikation für sie aufzustellen und die Transformationen T von π_2 in π_1 zu kennzeichnen, die durch ein in π_2 gegebenes charakteristisches System bestimmt sind. Dabei stellt sich als wesentlich heraus das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Diskriminante Δ der kubischen Form $a \omega_1^3 + b \omega_1^2 \omega_2 + c \omega_1 \omega_2^2 + d \omega_2^3$. Ist $\Delta \equiv 0$, so gehen durch jeden Punkt (u, v) von π_2 drei verschiedene Linien des charakteristischen Systems (**), die ein Dreigewebe bilden; in der Klassifikation von O. Borůvka, Publ. Univ. Masaryk, Brno, Nr. 72 (1926), 85 (1927), gibt es dann (höchstens) ∞^4 Transformationen T 1. Art, für die das Dreigewebe charakteristisch ist. Ein Beispiel eines Dreigewebes, das zu genau ∞^4 Transformationen T gehört, bilden die Tangenten einer Kurve 3. Klasse; vermutlich ist dies auch der allgemeinste zu ∞^4 Transformationen führende Fall. Äquivalent zu dieser Vermutung ist der Hauptsatz der Nomographie von H. F. Gronwall [J. Math. pur. appl., VI. Sér. 8, 59—102 (1912)], der besagt: wenn die charakteristischen Dreigewebe einer Transformation T 1. Art geradlinig sind, so bilden sie notwendig ein Sechseckgewebe (und bestehen daher aus den Tangenten einer Kurve 3. Klasse). Nur in einigen Sonderfällen ist die Gronwall'sche Vermutung bisher bewiesen (Bol., dies. Zbl. 18, 425). — Auch über den Fall $\Delta \neq 0$ und einige zugehörige Sonderfälle werden verschiedene Bemerkungen gemacht, ohne daß immer abschließende Resultate vorgelegt werden konnten: bisherige Ergebnisse finden sich schon bei O. Borůvka, l. c. — Zum Abschluß wird die Frage nach Anzahl und Inbegriff der Transformationen aufgeworfen, für die zwei in π_1 und π_2 vorgegebene dreifache Kurvensysteme charakteristisch sein können; sie hängt zusammen mit den Transformationen eines dreifachen Kurvensystems von π_2 in sich.

K. Strubecker.

Buzano, Piero: Sulla determinazione delle trasformazioni puntuali tra due piani con direzioni caratteristiche tutte coincidenti. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 282—286 (1953).

Bei einer eindeutigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildung zweier Ebenen aufeinander gibt es bekanntlich an jeder Stelle drei charakteristische Richtungen, das sind solche, in denen Wendepunkte bei der Abbildung erhalten bleiben. Sie erzeugen die drei charakteristischen Kurvenscharen. Verf. betrachtet den Fall, in dem die drei Richtungen an jeder Stelle der Ebene zusammenfallen. Sind die charakteristischen Kurven in der Urbildebene parallele Geraden, so lassen sich die fraglichen Abbildungen explizit angeben, im allgemeinen Fall hängen sie ab von einem Gleichungssystem erster Ordnung vom Cauchy-Kowalewskischen Typus, dessen Lösungen von vier beliebigen Funktionen einer Veränderlichen abhängen. Geometrisch bedeutet das, das sich eine solche Abbildung in den Punkten einer Geraden der Urbildebene in zweiter Ordnung beliebig vorgeben läßt und dadurch im wesentlichen eindeutig festgelegt ist.

G. Bol.

Liber, A. E.: Zur Flächentheorie im projektiven Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 137—140 (1953) [Russisch].

Verf. zeigt einen gewissen Weg des Aufbaues der invarianten Theorie der m -dimensionalen Fläche in einem n -dimensionalen projektiven Raume im Falle $m^2 + 3m \leq 2n$ an.

W. Wrona.

Kovancov, N. I.: Das kanonische Büschel als Bild einer projektiven Symmetrie auf der Fläche. Ukrain. mat. Žurn. 5, 99—119 (1953) [Russisch].

Verf. bemerkt, daß alle klassischen Konstruktionen der Geraden des kanonischen Büschels (die Direktrizen von Wilczyński, die Greenschen Kanten, die Čechsche Achse und die Normale von Fubini) die folgenden zwei Eigenschaften besitzen: 1. sie nehmen in Anspruch nur die Grundinvarianten β und γ und ihre ersten partiellen Ableitungen. 2. sie sind symmetrisch in bezug auf das Asymptotenpaar. Ausgehend von diesen Eigenschaften gibt der Verf. einige Methoden der Einführung der bekannten kanonischen Geraden und führt eine ganz neue Gerade des kanonischen Büschels ein.

W. Wrona.

Ščerbakov, R. N.: Zur Frage der Erzeugung von Flächen durch Linien. Usspechi mat. Nauk 8, Nr. 2 (54), 147—156 (1953) [Russisch].

L'A. considera una superficie S nello spazio ordinario e su di essa un sistema ∞^1 di linee che assume come $v = \text{cost.}$: ciascuna di queste linee determina su S una striscia che viene sottoposta ad una trasformazione proiettiva (funzione di v). Si ottiene così un nuovo sistema ∞^1 di striscie le quali in generale non appartengono più ad una stessa superficie: l'A. stabilisce le condizioni perchè le striscie trasformate formino una nuova superficie S^* e trova che ciò avviene solo quando le curve di partenza sono piane. Se alle trasformazioni omografiche si sostituiscono delle affinità, la classe delle soluzioni diventa ben più estesa (∞^{11}) e comprende le curve piane e le curve cilindriche. Nel caso invece in cui alle trasformazioni omografiche suddette si sostituiscono dei movimenti, l'A. ritrova i risultati di D. Th. Jegoroff [Mat. Sbornik 31, 153—184 (1923)] e prova che anche in questo caso fra le soluzioni si trovano le curve ellindriche: esse sono poi le uniche soluzioni se i movimenti si riducono a sole traslazioni. I procedimenti di calcolo usati dall'A. sono quelli esposti in due suoi precedenti lavori (questo Zbl. 44, 177, 364). P. Buzano.

Godeaux, Lucien: Sur la suite de Laplace associée à une surface et dont trois points appartiennent à l'hyperquadrique de Klein. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 788—797 (1953).

Si on rapporte une surface à ses asymptotiques, on peut dans l'espace S^5 , lui associer deux points U, V , de l'hyperquadrique de Klein Q , définissant une suite de Laplace $\dots U_n, \dots U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, \dots, V_m, \dots$; dont les points U_1 et V_1 n'appartiennent pas à Q . On suppose que U_n ($n \geq 1$) appartient à Q . Etude des plans tangents au lieu de U_n et des polarités qui en résultent. On en déduit que la droite dont U_n est l'image engendre une congruence, dont on détermine les surfaces focales. Par le calcul, l'A. montre que le point U_{n+1} appartient au plan $V_{n+1} V_{n+1} V_{n+1+1}$. Deux plans conjugués par rapport à Q , $U_{n+1} U_{n+1+1} U_{n+1+2}$ et $V_{n+1} V_{n+1+1} V_{n+1+2}$ définissent une quadrique; la 1/2 quadrique correspondant au premier plan appartient au complexe linéaire dont U_{n+1} est seconde image; la 1/2 quadrique correspondant au 2° plan appartient au complexe linéaire dont la 2° image est U_{3n+1+2} . (On convient que $U_{-a-1} = V_a$, $V_{-a-1} = U_a$).

B. d'Orgeval.

Muracchini, Luigi: Sulle varietà del Veronese. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 412—416 (1953).

L'A. dimostra che se una V_3 non soddisfa ad alcuna equazione di Laplace e possiede ∞^3 superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,3}$, essa possiede ∞^4 curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$: allora per un teorema di E. Bompiani [Mem. Accad. Lincei 13, 452—474 (1921)] esteso da M. Villa (questo Zbl. 20, 258) essa è la V_3 di S_9 del Veronese. La proposizione si può estendere per ricorrenza.

P. Buzano.

Muracchini, Luigi: Sulle varietà V_3 analitiche pluririgate. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 138—144 (1953).

L'A. chiama μ -rigata una V_3 che contiene un sistema ∞^2 di rette delle quali per ogni punto di V_3 ne passano μ di cui mai 3 complanari. Per la determinazione di tali V_3 osserva che le tangenti asintotiche uscenti da un generico punto A di V_3 sono le generatrici-base di un sistema lineare di coni quadrici e ne deduce che $\mu = 6$ è il massimo numero finito di rette della V_3 che possono passare per A : se il massimo è raggiunto trattasi di una V_3 generale di S_4 [Sisam, Amer. J. Math. 52, 607—610 (1930)] mentre per $\mu = 3$ si ottengono le V_3^6 di Segre di S_7 (Blaschke und Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, p. 204, questo Zbl. 20, 67). Traseurando il caso $\mu = 5$, l'A. dimostra che il caso $\mu = 4$ conduce a una V_3^4 di S_5 base di un fascio

di V_4 quadriche. Per $\mu = 2$ non si trovano limitazioni per lo spazio ambiente: se questo ha dimensione > 10 la V_3 è luogo di ∞^1 quadriche di S_3 . P. Buzano.

● Hlavatý, Václav: Differential line geometry. Translation, based on the German text by Harry Levy, with the cooperation of Lucretia Switser Levy. Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1953. X, 495 p. D. fl. 22,50; cloth 25,—.

Das tschechische Original des vorliegenden Buches erschien 1941 im Verlag der Prager Akademie der Wissenschaften, eine deutsche Übersetzung von Max Pini 1945 bei P. Noordhoff in Groningen (Holland), im gleichen Verlag wie nun auch die englische Übersetzung von Harry Levy. Die drei Ausgaben unterscheiden sich nur geringfügig durch einige Verbesserungen oder kleinere Zusätze. — Man kann die Liniengeometrie der R_3 als projektive Geometrie einer Kleinschen Quadrik im R_3 (der K -Quadrik im K -Raum) auffassen. Der Linienraum ist also ein vierdimensionaler konform-euklidischer Raum. Regelflächen, Kongruenzen und Komplexen entsprechen dann auf der K -Quadrik Kurven, Flächen und dreidimensionale Flächen; Differentialinvarianten korrespondieren sich dabei. Es interessieren ebenso projektive wie affine und metrische Eigenschaften der Linienmannigfaltigkeiten; dabei wird nicht das von Blaschke benutzte, auf dem Study'schen Übertragungsprinzip beruhende vektorielle, sondern das tensorielle Verfahren bevorzugt, das einheitlich alle diese Fragen umfaßt. Diesem Standpunkt sind in der Literatur am nächsten Arbeiten von Takeda [Tôhoku math. J. 44, 356—369 (1937); dies. Zbl. 20, 68; 22, 261; 23, 71; 24, 280] und Kanitani (dies. Zbl. 7, 324). Die Arbeiten von Haack nehmen den affinen und metrischen Standpunkt ein und gehen auch auf Figuren der Punktgeometrie ein, auf die Verf. verzichtet [Bem. des Ref.: Auch das 1948 erschienene Büchlein von W. Haack, Differentialgeometrie II, Wolfenbüttel (dies. Zbl. 31, 270), hätte hier Erwähnung verdient]. — Inhalt: Buch (I) bringt eine algebraische Einführung (Linienkoordinaten p , Kleinsche Quadrik $p \times p = 0$, Lineare Komplexe und Kongruenzen, Projektive Metrik bezüglich der Kleinschen Quadrik). Buch (II) handelt von den Regelflächen $p(t)$, zunächst von Umgebungen 2. Ordnung (Klassifikation in windschiefe Regelflächen und Torsen, Berührungskorrelation, Liesche Schmieglequadrik), dann von Umgebungen höherer Ordnung (absoluter Differentiationsprozeß, Schmieglenetz, Schmieglekomplex, Begleitkomplexe, Frenetsche Formeln, Komplexregelflächen, Projektivbogen, Krümmungen, natürliche Gleichungen und Differentialgleichungen einer Fläche). Es folgen die Sonderfälle der affinen und metrischen Geometrie der Regelflächen. Buch (III) ist der Differentialgeometrie der Linienkongruenzen $p(\eta^I, \eta^{II})$ gewidmet (die jedoch nicht nach dem Vorgange von Kummer aufgebaut wird, welcher von den Trägerflächen Gebrauch macht). Ausgangspunkt ist die Bemerkung, daß die Größen $a_{\alpha\beta} = p_\alpha \times p_\beta = -p \times p_{\alpha\beta}$ einen kovarianten Tensor 2. Stufe bilden. (Flächenelemente, ihr projektiver Winkel, Torsen der Kongruenz, Brennflächen). Sonderfall der affinen und metrischen Geometrie der Kongruenzen (zylindrische Kongruenzen, affiner und metrischer Fundamentaltensor, Begleitkomplexe, ihre Winkelmetrik, skalare Krümmungen, Normalenkongruenzen, Hauptflächen, Drall, Brennflächen, Brennpunkte, Grenzpunkte, Hamiltonsche Gleichung, Plücker'sches Konoid, Existenzsätze. Einführung eines integrablen asymmetrischen metrischen Zusammenhangs mit besonderen Eigenschaften, sein Fernparallelismus, Fermatsche Gleichungen für die Flächen der Kongruenz, geometrische Deutung der geodätischen Krümmung, projektive Transformationen, Einführung eines konformen Zusammenhangs und der zugehörigen kovarianten Ableitung, Begleitkomplexe, Gaußsche Krümmung, Einbettungsfragen, Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen, Schmieglemannigfaltigkeiten, W -Kongruenzen). Buch (IV) behandelt nach ähnlichen Methoden die Linienkomplexe $p(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. (Fundamentaltensor, Hauptkorrelation, algebraische Komplexe, Beispiele, konformer Zusammenhang, Begleitkomplexe, Fundamentalgleichungen, Normierungen.) Es folgen projektive und metrische Eigenschaften der Regelflächen im Komplexen (Normalkrümmung, Extremflächen, Frenetformeln; Asymptotenflächen, metrischer Tensor, Winkel, Fundamentalflächen, integrable Zusammenhänge, absolute Pseudo- und Teleparallelismen). Sodann kommen die Kongruenzen eines Komplexes, vom projektiven Standpunkt aus behandelt (Einführung eines Zusammenhangs durch Projektion, Fundamentalgleichungen, Existenzsätze), danach Flächen in Kongruenzen des Komplexes (sphärische Elemente, innere und äußere Krümmung, Torsion, Asymptotenflächen, Zentralpunkte und -Flächen). — Buch (V) behandelt den Linienraum selbst nach ähnlichem Verfahren. Ein Anhang bringt eine präzise Einführung in den Tensorkalkül (28 Seiten), wie das ganze Buch übersichtlich nach dem Definition/Theorem/Beweis-System aufgebaut. — Insgesamt liegt in dem Buche von Hlavatý eine sehr verdienstvolle, klar umrissene Darstellung der differentiellen Liniengeometrie vor, deren Bedeutung schon daraus hervorgeht, daß sie außer auf Tschechisch nun auch in zwei Welt Sprachen vorliegt.

K. Strubecker.

Segre, Beniamino: L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 481—489 (1953).

Auch bei einer Geradenkongruenz K des projektiven R_n besitzt definitionsgemäß jeder Kongruenzstrahl pq zwei Brennpunkte p, q , welche die Brennflächen P, Q beschreiben und auf

zwei Scharen von Torsen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, verteilt werden können, deren Gratlinien auf P und Q liegen. Liegen die Strahlen pq auf einer nicht zerfallenden Quadrik Ω des R_3 ($n = 4$), so heißt die Kongruenz K quadratisch. Man kann die projektiven Koordinaten der Brennpunkte p, q so normieren, daß $p_u = \beta(u, v) \cdot q(u, v)$, $q_v = \gamma(u, v) \cdot p(u, v)$ ist; $\{p, p\} = 0$ und $\{q, q\} = 0$ besagen, daß die Brennpunkte p, q auf der Quadrik Ω liegen. Da der Tangentenraum von Ω in $p_0(q)$, stets den Schmiegrau zweiter Ordnung von Q in q (von P in p) enthält, schneidet er $Q(P)$ nach einer Kurve, die in $q(p)$ einen dreifachen Punkt aufweist. Dessen Tangenten sind die Haupttangente von Q in q (von P in p), welche die Hauptlinien von $Q(P)$ einhüllen. Diese Linien entsprechen sich dabei in der durch die Kongruenzstrahlen pq zwischen den Brennflächen P, Q gestifteten Beziehung der Brennpunkte p, q , und ihre Differentialgleichung erhält daher auf beiden Brennflächen P, Q die Gestalt $\beta \{q_u, q_u\} du^2 - \gamma \{p_v, p_v\} dv^2 = 0$, die in der quadratischen Kongruenz K selbst drei Scharen von Hauptregelflächen definiert, die den Brennflächen P, Q längs der Hauptlinien umschreiben sind. Die Hauptregelflächen fallen dann und nur dann mit den Abwickelbaren eines Systems von K zusammen, wenn die Laplaceschen Transformierten von K bezüglich des anderen Systems der Quadrik Ω angehören. Gehören beide Laplacesche Transformierte Ω an, so sind die Hauptregelflächen unbestimmt. — Die Differentialausdrücke $\Phi_2 = \sqrt{-\{p_u, p_u\} \cdot \{q_v, q_v\}} du dv$ und $\Phi_3 = \{\beta \{q_u, q_u\} du^2 - \gamma \{p_v, p_v\} dv^2\}^2$ sind relative Kovarianten der quadratischen Kongruenz K , deren Verhältnis Φ_3/Φ_2 als absolute Kovariante das projektive Linienelement der Kongruenz K und ihrer beiden Brennflächen P, Q darstellt. Eine auf Asymptotenparameter u, v bezogene Fläche F des projektiven R_3 liefert auf der Kleinschen Quadrik Ω in R_5 als Bild ihrer Tangentenbüschel eine quadratische Kongruenz K , deren Abwickelbare $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ den Asymptotenlinien von F entsprechen. Das Fubini'sche projektive Linienelement der Fläche F ist dabei mit dem projektiven Linienelement Φ_3/Φ_2 von K identisch, und den Darboux'schen Linien von F entsprechen die Hauptregelflächen von K . Es gilt der Satz: Ist O ein allgemeiner Punkt von F und sind p_0, q_0 seine Asymptotenrichtungen, zeichnet man weiter die Schmiegtangenten des Systems von p_0 , die sich auf q_0 stützen, so erhält man eine Regelfläche, die dreimal durch p_0 geht und F längs einer Linie berührt, die O als dreifachen Punkt besitzt; gleiches gilt, wenn man p_0 und q_0 vertauscht. Die beiden entstehenden Kurven von F haben in O dieselben Tangenten, nämlich genau die Darboux'schen Tangenten von F in O . Damit ist eine neue einfache Definition der Darboux'schen Flächentangenten gewonnen.

K. Strubecker.

Barner, Martin: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Komplexflächen als Schiebflächen. Math. Ann. 126. 119–137 (1953).

Komplexflächen nennt Verf. jene Flächen, bei denen ein System von Asymptotenlinien linearen Komplexen angehört. Mit diesen Flächen hat sich schon A. Terracini [Atti Soc. Natur. Mat., Modena 5, 82–107 (1919 20)] befaßt und ihre wichtigsten Eigenschaften angegeben. Besonders eingehend kennt man die zweisinnigen Komplexflächen, deren beide Scharen von Asymptotenlinien in linearen Komplexen liegen und die man am einfachsten mit den Mitteln der Differentialgeometrien des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes behandeln kann, und von denen man auch integrallose Darstellungen kennt. Vgl. dazu K. Strubecker, dies. Zbl. 35, 236. Wie Verf. zeigt, kann man auch für die (einsinnigen) Komplexflächen explizite Parameterdarstellungen angeben. Verf. benutzt für seine Entwicklungen die zweckmäßige kinematische Betrachtungsweise des projektiven Linienraumes R_5 und die dazu äquivalente projektive Kinematik der Kleinschen Bildquadrik Q in R_5 . Für die Komplexflächen ist dabei der Sonderfall der Schiebungen von Bedeutung, die im R_5 eine solche hyperbolische Bewegung induzieren, bei der eine feste Hyperebene des bewegten Systems entlang einer Torse ohne Gleiten abrollt. Da jede Hyperebene (oder ihr Pol bezüglich Q) einen linearen Komplex bestimmt, kennzeichnet jede solche Schiebung eine Schar linearer Komplexe. Umgekehrt ist jede Schar linearer Komplexe mit einer bestimmten Schiebung verbunden. Auch zu jeder einfachen Schar von Komplexkurven gehört daher eine bestimmte Schiebung. Eine Schiebfläche liegt vor, wenn die Komplexkurve im bewegten System fest ist. Die Bahnkurven einzelner Punkte der Komplexkurve bei der Schiebung sind dann die eine Schar der Asymptotenlinien auf der erzeugten Fläche, die Lagen der Komplexkurve bilden die andere Schar von Asymptotenlinien. Jede Komplexkurve erzeugt so als Schiebfläche eine einsinnige Komplexfläche, und jede Komplexfläche läßt sich durch Schiebung einer Komplexkurve erzeugen, deren Lagen auf ihr projektiv äquivalent sind und ihre Asymptotenlinien bilden. Es folgt eine projektive Parameterdarstellung der Komplexkurven der Gestalt

$$\eta(t, s) = q_1 + s \tilde{s}_1 + G'(s) \tilde{s}_2 + [2G(s) - sG'(s)] q_2,$$

wobei die von t abhängigen projektiven Vektoren $q_1, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, q_2$ einfachen Ableitungsgleichungen genügen. Der ausgezeichnete lineare Komplex ist dabei $m = (q_1, q_2) \wedge (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$. Nimmt man bei der Schiebung zwei bezüglich m nullpolare Geraden mit, so entsteht ein schichtbares Regelflächenpaar, das umgekehrt die Schiebung eindeutig bestimmt. Übrigens kann man diese erzeugende Schiebung noch auf zahlreiche andere Arten eindeutig festlegen, z. B. durch zwei Bahnkurven, die voneinander asymptotisch transformierte zweiter Stufe sind. Aus diesen Eindeutigkeitssätzen für Schiebungen folgen analoge Sätze für Schiebflächen; z. B. ist eine Komplex-

fläche eindeutig festgelegt durch eine ihrer Komplexkurven und zwei Asymptotenlinien der anderen Schar. — Die Klassifikation der Schiebungen (im Anschluß an die Dimension der Bildkurve der linearen Komplexe m in R_5) soll Gegenstand einer Fortsetzung sein, in der auch die zweisinnigen Komplexflächen aufscheinen werden, bei denen die Bildpunkte m in R_5 eine ebene Kurve der Dimension 2 beschreiben.
K. Strubecker.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Flanders, Harley: A method of general linear frames in Riemannian geometry. I. Pacific J. Math. 3, 551—565 (1953).

Exposé systématique de la méthode du repère mobile de E. Cartan, mais limité aux variétés de classe C^∞ . Signalons l'utilisation des matrices dont les coefficients sont des formes différentielles, procédé qui permet d'introduire simplement la courbure de Gauss.
Jacqueline Lelong.

Ishii, Yoshihito: On the Riemannian space with a discontinuous metric. Tensor, n. Ser. 3, 13—22 (1953).

Let R_n be an n -dimensional space and let g_{ij} , g_{ij} be the fundamental tensors of two Riemannian metrics in it. Since we have two Cristoffel symbols $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ deduced respectively from g_{ij} , g_{ij} , there are two different kinds of covariant differentiation (for each index) indicated respectively by greek and latin indices; for instance, we have the mixed covariant differential

$$\Delta A^{i\alpha} = d A^{i\alpha} + \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta k \end{smallmatrix} \right\} A^{i\beta} dx^k + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} A^{i\alpha} dx^k.$$

Let L be an hypersurface in R_n and N^i , N^i be its normal vectors with respect to the two metrics considered. Two tensors A^i , A^α on L are said to be „parallel“ (according to the author) if $A^i = H_\alpha^i A^\alpha$, $A^\alpha = K_i^\alpha A^i$, where H_α^i , K_i^α are certain tensors related with N^i , N^i . From H_α^i , K_i^α and the operator Δ , some tensors are obtained, for instance

$$\Omega_\beta^\alpha = K_j^\alpha \Delta H_{\beta}^j, \quad \Pi_\beta^\alpha = -[\Omega_\alpha^\lambda \Omega_\beta^\lambda] - \Delta' \Omega_\beta^\alpha (\Delta) + \Delta \Omega_\beta^\alpha (\Delta')$$

(where Δ' corresponds to a differential $d' x^k$) whose geometrical interpretation and properties are analyzed, specially for $n = 2, 4$.
L. A. Santalo.

Yano, Kentaro: On n -dimensional Riemannian spaces admitting a group of motions of order $n(n-1)/2 + 1$. Trans. Amer. math. Soc. 74, 260—279 (1953).

Wie H. C. Wang zeigte, ist ein n -dimensionaler Finslerscher Raum ($n > 2$, $n \neq 4$), der eine Bewegungsgruppe von höherer Ordnung als $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ gestattet, ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung. Hieran anschließend beweist Verf. zunächst, daß in einem n -dimensionalen Riemannschen Raum ($n \neq 4$) keine Bewegungsgruppe einer Ordnung r existiert, wenn $\frac{1}{2}n(n+1) > r > \frac{1}{2}n(n-1) + 1$ ist. Als Hauptresultat der weiteren Untersuchungen ergibt sich schließlich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein n -dimensionaler Riemannscher Raum V_n ($n > 4$, $n \neq 8$) eine Bewegungsgruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ gestattet: V_n ist entweder der Produktraum einer Geraden und eines $(n-1)$ -dimensionalen Riemannschen Raumes konstanter Krümmung oder ein Raum von negativer konstanter Krümmung.
W. Barthel.

Vănđăeanu, G.: Sur les groupes de mouvement d'un espace de Riemann à quatre dimensions. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 121—148, russisch und französ. Zusammenfassgn. 148—150, 150—153 (1953) [Rumänisch].

Egorov hat gezeigt (dies. Zbl. 38, 346), daß eine V_n , $n \geq 3$, die keine Einsteinsche V_n ist, höchstens eine $\binom{n}{2} + 1$ -gliedrige Bewegungsgruppe zuläßt und daß dieses Maximum für eine Einsteinsche V_n , $n > 3$, die keine S_n ist, gleich $\binom{n}{2} + 2$ ist.

Darauf hat Vrănceanu (dies. Zbl. 45, 113) gezeigt, daß diese letzte Zahl um $n - 4$ verringert werden kann. Mit Hilfe eines Resultats von S. Medici [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 10, Nr. 3 (1908)] wird hier das Linienelement aller V_4 bestimmt, deren Bewegungsgruppe viergliedrig ist. Es stellt sich heraus, daß von diesen nur die in der vorigen Arbeit bestimmten symmetrischen V_4 mit viergliedriger Stabilitätsgruppe eine achtegliedrige Bewegungsgruppe besitzen. Nebenbei folgt, daß die maximale Anzahl der Parameter der Bewegungsgruppe für eine V_n , die keine S_n ist, stets um $n - 1$ weniger ist als die Anzahl $\binom{n+1}{2}$ für eine S_n , ausgenommen im Falle der V_2 und der oben erwähnten symmetrischen V_4 , wo die Verringerung gerade 2 ist. Es folgen noch einige Angaben über V_4 , deren Stabilitätsgruppe weniger als 4 Parameter hat.

J. A. Schouten.

Seki, Setsuya: On the curvatura integra in a Riemannian manifold. Commentarii math. Univ. St. Pauli 1, 41—50 (1953).

In his proof of the Gauss-Bonnet's theorem for a closed orientable Riemannian manifold Chern [Ann. of Math. 45, 747—752 (1944)] considers the tangent vector bundle F^1 over the manifold M_n and regards the differential form Ω over M_n whose integral over M_n gives rise the Euler characteristic $\chi(M_n)$ as a form on $F^{(1)}$ and proves first that there exists an $(n-1)$ form II of F^1 such that $\Omega = dII$. Then Chern takes a vector field over M_n with at most a finite number of singular points. We denote it by $f: M_n \rightarrow F^1$. Then $\int_{M_n} \Omega = \int_{M_n} f(\Omega) = \int_{M_n} \partial f(M_n) II$. However $\int_{M_n} f(\Omega)$ arises from the singular points. So the Gauss-Bonnet formula $\int_{M_n} \Omega = \chi(M_n)$ depends only upon the integral in the neighborhood of singular points of the vector field. Noticing this fact, the author defines a notion of equivalence of Riemannian manifolds (either or both of them do not need to be connected) so that for equivalent Riemannian manifolds M_n and N_n $\int_{M_n} \Omega = \int_{N_n} \Omega$ and proves that two Riemannian manifolds are equivalent to each other when and only when their Euler characteristics are equal. Accordingly $\int_{M_n} \Omega = \int_{\frac{1}{2}\chi S_n} \Omega = \frac{1}{2}\chi \int_{S_n} \Omega$ where $\chi = \chi(M_n)$ and S_n is the unit n -sphere. Moreover $\int_{S_n} \Omega$ is easily calculated and is equal to 2. Hence we get the Gauss-Bonnet theorem $\int_{M_n} \Omega = \chi(M_n)$.

S. Sasaki.

• **Yano, K. and S. Bochner:** Curvature and Betti numbers. (Annals of Mathematics Studies 32.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1953. IX, 190 p. \$ 3.—

Diese Monographie über die Bochnersche Differentialgeometrie im Großen beginnt mit einer kurzen Einleitung in den Tensoralkül. Im zweiten Kapitel wird der Hauptsatz der ganzen Theorie formuliert: Auf einer geschlossenen differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit positiv-definiter Metrik folgt aus $\Delta q = 0$ für eine Skalarfunktion (Δ = Laplace-Beltrami-Operator) $\Delta q = 0$. Dieser Satz (Bochners Lemma) wird mit Hilfe eines lokalen Satzes von E. Hopf bewiesen, daher gelten, wie im 9. Kapitel von S. Bochner bemerkt wird, die Sätze dieses Buches nicht nur für kompakte Mannigfaltigkeiten, sondern auch für offene in der Čech-Cohomologie mit kompakten Trägern, und auch auf Mannigfaltigkeiten mit Rand für Funktionen und Formen mit verschwindenden Randwerten. Nachdem das Thema dieses Buches auch ein topologisches ist, hätte man vielleicht wünschen können, dieser Frage nach der angemessenen Homologietheorie mehr als 20 Zeilen gewidmet zu sehen. Der Rest des zweiten Kapitels bringt dann eine große Reihe von Beispielen, wie aus Bochners Lemma und Voraussetzungen über die Ricci-Krümmung nachgewiesen werden kann, daß gewisse Differentialgleichungen (insbesondere für harmonische und Killing-Vektoren) keine nicht-trivialen Lösungen haben. Außerdem werden Integralformen dieser Differentialgleichungen gegeben. Anwendungen beziehen sich z. B. darauf, daß gewisse Mannigfaltigkeiten keine Wirkungsräume gewisser Liescher Gruppen sein können. Im dritten Kapitel wird die gleiche Theorie, wie immer mit einer staunenswerten Rechenteknik, auf Tensorfelder ausgedehnt. Das fünfte Kapitel enthält den wohl wichtigsten Teil der Bochnerschen Differentialgeometrie: Man kann in vielen Fällen feststellen, daß zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungscharakter wenig verschieden ist, gleiche Betti'sche Zahlen besitzen. Die Beweismethode ist natürlich die, daß die Existenz oder Nichtexistenz von harmonischen Formen bewiesen wird (cf. W. V. D. Hodge, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge 1942). Besonders interessant ist gleich das erste Resultat „à la Rauch“: Wenn auf einer kompakten V_n für eine Konstante B in jedem Punkt $B/2 \leq -R_{ijkl} \xi^{ij} \xi^{kl} \xi^{ij} \xi_{ij} \leq B$

gilt, für jeden schiefsymmetrischen Tensor ξ^{ij} , so ist Γ_n (bezüglich reeller Koeffizienten) eine Homologie-Sphäre. Ein entsprechender Satz für $B < 0$ besagt die Nicht-Existenz von Killing-Vektoren. [Da der Beweis dieses Satzes besonders einfach ist, liegt es nahe, ihn mit dem Satz von Rauch zu vergleichen, der sehr viel tieferliegende Hilfsmittel zum Beweis nötig hat. Bei diesem wird obiger Krümmungsausdruck nur für Bivektoren gebildet, dafür ist die erlaubte Schwankung nur zwischen B und $\sim (3/4)B$. Die universelle Überlagerung von V_n ist dann homöomorph der S_n (Rauch, dies Zbl. 43, 372). Aus der Rauchschen Bedingung kann man durch eine leichte Abschätzung die von Bochner-Yano gewinnen.] — Der Rest des Kapitels enthält Untersuchungen über Räume mit kleiner Projektiv-, Konform- und Kreiskonformkrümmung. (Das vierte Kapitel behandelt als Vorbereitung die entsprechenden Räume mit verschwindender Krümmung.) Im sechsten Kapitel wird die bisher entwickelte Theorie auf die Topologie und Differentialgeometrie der Gruppenräume halbeinfacher Gruppen angewendet. Obwohl die präsentierten Sätze nicht neu sind, erweisen die kurzen Beweise die ganze Eleganz der Methode. Das siebente Kapitel behandelt als Vorbereitung metrische Räume mit asymmetrischen Zusammenhängen nach einer Arbeit von Bochner und Yano (dies. Zbl. 48, 158). Das sehr lange achte Kapitel behandelt (komplexe) Kählersche Mannigfaltigkeiten. Zuerst wird das Rechnen auf komplexen Mannigfaltigkeiten erklärt. (Der auf p. 120 eingeführte Operator C ist mit den in der Literatur verwendeten nicht identisch, diese beziehen sich auf die p. 155 definierten P und Q .) Dann wird im Anschluß an Bochner gezeigt, daß bei Kählerschen Mannigfaltigkeiten das holomorphe Krümmungsmaß das Gaußsche ersetzt, und daß das Gaußsche nie konstant sein kann (außer $= 0$). Darauf wird die Existenz bzw. Nichtexistenz analytischer Vektorfelder untersucht. Die Resultate lauten hier oft: jeder analytische Vektor (oder später Tensor) hat verschwindende kovariante Ableitungen. Um diese Resultate zu vervollständigen, kann man sich leicht überlegen, daß auch die gewöhnlichen Ableitungen verschwinden (und die Tensoren konstant sind), wenn nur ein einziger der Ausdrücke $R_{klm}^i \xi^a \bar{\xi}^b \neq 0$ ist, insbesondere wenn also in einer Umgebung $R_{a\bar{b}} \xi^a \bar{\xi}^b \neq 0$. Die Nr. 5 ist eigentlich überflüssig, denn der betrachtete Vektor ist harmonisch und wegen Th. 8. 13 ist das Th. 8. 8 mit 8. 5 identisch. Weiter wird die Existenz harmonischer Tensoren untersucht, sowie Räume, deren Krümmung wenig von der des komplexen projektiven Raumes abweicht. Das 9. Kapitel, von S. Bochner geschrieben, enthält leider relativ wenig Beweise. Von Bedeutung ist die in den No. 2 und 3 eingeführte Idee, statt konvexen, Minimal- etc. Räumen solche zu betrachten, deren Krümmungstensor ähnliche algebraische Eigenschaften wie bei den obigen Räumen aufweist. Die No. 4—7 behandeln Resultate aus früheren Bochnerschen Arbeiten über komplex-analytische Isometrien, abelsche Integrale und Euler-Poincarésche Charakteristik. Das Kapitel wird gekrönt von der Nr. 9, in der die Theorie des Buches, d. h. hauptsächlich das Bochnersche Lemma, auf fast-periodische Tensoren und universelle Überlagerungen kompakter Mannigfaltigkeiten übertragen wird. Um die Bedeutung dieser Verallgemeinerung zu beurteilen, muß noch die topologische Bedeutung dieser Bildungen untersucht werden, sowie deren Anwendbarkeit auf Probleme wie die bei Eckmann (dies. Zbl. 34, 400). Das Buch schließt mit einer reichhaltigen Bibliographie.

H. Guggenheimer.

Rosenlicht, Maxwell: Simple differentials of second kind on Hodge manifolds. Amer. J. Math. 75, 621—626 (1953).

Soit V une variété de Hodge compacte, c'est-à-dire une variété kählérienne dont la forme de base est homologue à un cocycle entier multiplié par un scalaire; soit L_2 l'espace vectoriel des formes ω sur V telles que, localement, $\omega = d f_p$, f_p germe de fonction méromorphe défini au voisinage d'un point p de V ; soit L_e le sous-espace des différentielles exactes sur V . Alors $\dim. L_2/L_e = B_1$, premier nombre de Betti de V . Le résultat est établi en se ramenant au cas des courbes algébriques.

P. Lelong.

Patterson, E. M.: A characterisation of Kähler manifolds in terms of parallel fields of planes. J. London math. Soc. 28, 260—269 (1953).

Pour qu'une métrique hermitienne sur une variété M^{2m} de classe C^2 soit kählérienne, il faut et il suffit qu'il existe une famille π^m de plans (complexes) à m dimensions dans l'espace des vecteurs tangents, qui soient parallèles et isotropes dans la métrique. Une M^{2m} de classe C^2 admettant une telle famille π^m continue de plans parallèles et isotropes dans une métrique définie positive g admet une structure analytique complexe dans laquelle g est une métrique kählérienne. Un résultat non publié de Hodge énonce que, pour que M^{2m} admette une structure analytique complexe, il faut et il suffit qu'il existe sur M^{2m} un tenseur ζ et une connexion affine Γ avec $\zeta_b^a \zeta_c^b = -\delta_c^a$, $\zeta_{b,c}^a = 0$, ce qui entraîne alors: si M^{2m} de classe C^2 admet

un champ continu de plans complexes π^m tangents (π^m et le conjugué π^m n'ayant en commun que le vecteur nul) et une connexion affine Γ relativement à laquelle π_m demeure parallèle à un π_0^m fixe, alors M^{2m} admet une structure analytique complexe.

P. Lelong.

Yano, Kentaro et Isamu Mogi: Sur les variétés pseudo-kähleriennes à courbure holomorphe constante. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 962–964 (1953).

Sur une variété pseudo-kähliérienne définie par les tenseurs g_{ij} et q_{ij} , un plan holomorphe est déterminé par deux vecteurs u' et $v' = q'_{ij} u^j$. Si, en chaque point, la courbure est la même dans la direction de chaque plan holomorphe, elle est la même dans tout l'espace, et l'espace possède des propriétés analogues à celles des espaces à courbure constante.

Jacqueline Lelong.

Barthel, Woldemar: Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Math. Z. **58**, 358–375 (1953).

H. Busemann (this Zbl. **29**, 353; **37**, 245; **40**, 375) defined the notion of volume in Minkowski geometry and founded systematical investigations of Minkowski (and Finsler) geometry upon the notion of volume. However, in his definition he uses the volume of Euclidean geometry which has no relation with the Minkowski geometry in consideration and his definition is inconvenient for analytical calculation. So the author gives here another formulation of Busemann's notion of volume, which has no such defects, starting from axiomatic standpoint. His axioms for the volume of a parallelepiped which is constructed by n vectors A_1, \dots, A_n in Minkowski n -space M_n are as follows: I. $J(A_1, \dots, A_n) \geq 0$, II. $J(A_1, \dots, A_i + A_k, \dots, A_n) = J(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ for $i \neq k$, III. $J(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = |\lambda| J(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$, IV. The n -dimensional unit sphere in Euclidean n -space has the same volume in all Minkowski space. — Then the measure of volume is uniquely determined for every n -dimensional domains G , i.e.

$$J(G) = \left(\omega^{(n)} / L(X) \int_{L(X) \leq 1} d x_1 \cdots d x_n \right) \int_G d x_1 \cdots d x_n,$$

where $\omega^{(n)}$ is the volume of the unit n -sphere of Euclidean n -space and $L(X)$ is the length of a vector X in the sense of Minkowski geometry in consideration. The p -dimensional volume of a domain in a p -plane in M_n is defined as the p -volume of the Minkowski p -space whose metric is induced in the p -plane from M_n . If the equation of the p -plane is $x^q = x_0^q t^q + a^q$ ($q = 1, \dots, p$; $0 < p < n$) then the p -volume of a domain G in the p -plane is given by

$$J^{(p)}(G) = F^{(p)}(x_0^q) \int_G d u^1 \cdots d u^p \quad \text{where} \quad F^{(p)}(x_0^q) = \omega^{(p)} / \left[L(x_0^q t^q) \int_0^1 d U^1 d U^2 \cdots d U^p, \right.$$

and $\omega^{(p)}$ is the volume of the unit p -sphere of Euclidean p -space. The p -volume of a curved p -dimensional subvariety in M_n is determined by the integral extended over the domain in consideration of the element of Minkowski p -volume of the tangent p -plane. The author calls $F^p(x_0^q)$ as volume function and studies its properties. He then defines sine function of two planes A and B such that $\dim(A \cap B) = 1 = \min(\dim A, \dim B)$ by making use of $F^{(p)}$, where p runs dimensions of A , B , $A \cap B$ and $A \cup B$. By virtue of sine function the author defines the notions of normal, transversality, curvature of a curve, normal and principal curvatures of a surface and gets basic formulas of curves and surfaces.

S. Sasaki.

Tandai, Kwoichi: On areal space. VI. On the characterization of metric areal spaces. Tensor, n. Ser. **3**, 40–45 (1953).

[Part I – V, this Zbl. **44**, 371, 372; Tensor, n. Ser. **1**, 137–156 (1951), ibid. **2**, 47–58 (1952).] A space is called an areal space if a function $F(x, p_\alpha)$, [$p_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$] is given such that the area of a subspace $x = x(u^\alpha)$ is given by the integral $\int \cdots \int F d u^1 \cdots d u^m$. The space is said to be of the metric class if the metric m -tensor is of the form $g_{11} \cdots g_{mm}$. Several conditions are given in order that a submetric space is a Finsler space, a Cartan space or a Riemannian space. It is shown that these three types of areal spaces are the only areal spaces of the metric class.

J. Haantjes.

Nomizu, Katsumi: On the group of affine transformations of an affinely connected manifold. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 816–823 (1953).

Nach S. Myers und N. Steenrod ist die Gruppe aller Isometrien einer Riemannschen Mannigfaltigkeit eine Liesche Gruppe (S. Myers und N. Steenrod, dies. Zbl. **21**, 63). Dieser Satz wird auf affine Räume übertragen, allerdings unter Voraussetzung der „Vollständigkeit“ („completeness“) dieser Räume. Der Begriff

der Vollständigkeit wird definiert, er ist möglicherweise zur Gültigkeit des Satzes gar nicht erforderlich. Sei M ein affin zusammenhängender Raum und $A(M)$ die Gruppe aller affinen Transformationen, so gibt es eine Gruppe von topologischen Transformationen, bestehend aus den differenzierbaren Homöomorphismen von M , und das Theorem lautet: Ist M vollständig im Sinn der Definition des Textes, so ist $A(M)$ eine Liesche Gruppe. Ein weiteres Theorem besagt: Ist M ein Riemannscher Raum mit dem durch die Metrik definierten Affinzusammenhang, dann ist die Gruppe aller Isometrien $J(M)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $A(M)$.

E. Hardtwig.

Atanasjan, L. S.: Über einige in einen zentroaffinen Raum eingebettete Mannigfaltigkeiten von spezieller Gestalt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 189—192 (1953) [Russisch].

Im zentroaffinen n -dimensionalen Raum E_n sei durch $\tau = \tau(x^1, x^2, \dots, x^m)$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit V_m gegeben. V_m wird durch Angabe von $n - m$ zusammen mit den Vektoren $\partial\tau/\partial x^i$ linear unabhängigen Vektoren ξ signiert ($i = 1, 2, \dots, m; \kappa = 1, 2, \dots, n - m$) und die Signierung von V_m zentral genannt, wenn die von den ξ aufgespannten signierenden Ebenen π durch das Zentrum von E_n gehen. Jede Signierung induziert auf V_m einen bestimmten affinen Zusammenhang, welcher nur von den π nicht aber von den signierenden Vektoren selbst abhängt. Die V_m wird als s -ausgeartet vom Range r bezeichnet, wenn sie aus solchen $\infty^r(m - r)$ -dimensionalen Erzeugenden V_{m-r} besteht, daß die Tangentialebenen an V_m längs jeder V_{m-r} in einer s -dimensionalen Ebene E_s von E_n liegen ($n > s \geq m > r$). Verf. führt u. a. ohne Beweis den Satz an, daß jede Erzeugende V_{m-r} einer $m + 1$ vom Range r ausgearteten, zentral signierten V_m des E_n bezüglich des auf V_m induzierten affinen Zusammenhangs vollständig geodätischer Unterraum von V_m ist, wenn das zu jeder V_{m-r} gehörende E_s durch das Zentrum von E_n geht.

K. Leichtweiss.

Dumitraş, V.: Sur les espaces A_3 qui admettent une rotation. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 213—227, russische und französ. Zusammenfassgn. 228—230, 230—232 (1953) [Rumänisch].

In einem L_3 (hier wie bei Vranceanu A_3 genannt), in dem der symmetrische Teil des Ricci-Tensors $R_{(\mu\lambda)}$ den Rang n hat, kann man diese Größe als Fundamental-tensor einführen. Es handelt sich dann um die Auffindung derjenigen L_3 dieser Art, die eine Rotationsgruppe gestatten. Es werden Integrabilitätsbedingungen aufgestellt, aus welchen sich die Rotationsparameter für verschiedene Unterfälle berechnen lassen. (Nach dem französischen Auszug referiert.) *J. A. Schouten.*

Yen, Chin-Ta: Sur la connexion projective normale associée à un feuilletage du deuxième ordre. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 55—94 (1953).

Un feuilletage du 2^e ordre et de dimension k est un système de sous-variétés V_k de R^n tel que chaque élément à dimension k de R^n est tangent à une et une seule V_k . L'objet du présent mémoire c'est de déterminer, d'une manière intrinsèque, pour un feuilletage V_k donné sur R^n un espace de k -éléments à connexion projective admettant les V_k comme des variétés k -géodésiques. Ce problème a été résolu par E. Cartan (1924) pour $k = 1$ et par Hachtroudi (1937) pour $k = n - 1$; il présente beaucoup points de contact avec celui des géométries des „ k -spreads“ de J. Douglas (ce Zbl. 3, 169). Le chap. I est dédié à l'étude des espaces ponctuels et de k -éléments à connexion projective. La méthode suivie est celle de Cartan sous la forme élégante donnée par Ehresmann. On considère des connexions, dites semi-normales, pour lesquelles le groupe engendré par les transformations correspondantes aux cycles infinitésimales est le groupe de Möbius et qui satisfont en outre la condition $R_{ikh}^h = 0$. On établit aussi les équations des variétés k -géodésiques, supposées existantes. Dans le chap. II sont étudiées d'abord les conditions qui doit satisfaire un système d'équations aux dérivées partielles pour qu'il définisse un feuilletage de R^n . Ce sont d'une part celles qui expriment que le système est complètement intégrable et d'autre part des conditions d'homogénéité (Douglas) qui se présentent du fait que les coordonnées de direction des k -éléments sont données sous forme homogène et en nombre sur-

abondant. Ensuite par identification des équations du feuilletage avec celles des k -géodésiques d'un espace à connexion semi-normale on peut déterminer d'une façon univoque les composantes d'une connexion, appelée normale, quand on ajoute des nouvelles relations dont le caractère invariant fut établi au chap. I. Dans le cas où l'espace normal peut être considéré à connexion ponctuelle on a affaire à l'espace projectif et les V_k correspondent aux variétés linéaires à k dimensions. Le chap. III traite des conditions d'intégrabilité des équations des k -géodésiques. Des champs de k -éléments du 2^e ordre ne vérifiant pas les conditions d'intégrabilité sont étudiés dans ce chapitre. Pour les feuilletages on considère aussi le problème de la k -mobilité: les feuilletages admettant cette mobilité sont ceux équivalents aux feuilletages des variétés linéaires de l'espace projectif. Dans le dernier chapitre, l'A. attache à un feuilletage du 2^e ordre une connexion affine unimodulaire; cette connexion n'est pas déterminée d'une façon unique, elle dépend d'une fonction arbitraire de n arguments. On établit la condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion affine unimodulaire corresponde à un feuilletage linéaire de l'espace projectif. [Remarque. A la pag. 60, dans l'expression de $d^2 A$, il faut ajouter un terme de la forme $d^2 a^x p^k_x A_k$. Ce terme n'apparaît pas dans la suite parce qu'il est une combinaison linéaire des points $B_x = p A_k$ qui avec A déterminent le k -élément tangent à la k -géodésique]. G. Ancochea.

Ingraham, Richard L.: Linear connection in spin-collineation space. Math. Z. 58, 265—271 (1953).

The author defines a p -vector covariant differentiation of q -vectors by $V_{[i_1, \dots, i_p]}^r v^{j_1, \dots, j_q}$. This connection allows the introduction of an induced connection of the local projective spaces P_{2n} whose points are ordered sets of p -vectors ($p = 0, 1, \dots, n$). For even (odd) dimension in the affine (projective) case there exists a 1-1 correspondence between the points of P_{2n} and the collineations on the associated spin space of 2^n ($n = 2r$) dimensions. The above mentioned differentiation leads then to a differentiation of collineations with respect to a collineation.

J. Haantjes.

Takasu, Tsurusaburo: Connection spaces in the large. I. Non-holonomic spaces with general linear connections. II. Non-holonomic affine geometry. III. Non-holonomic Euclidean geometry. IV. Non-holonomic Laguerre geometry. V. Non-holonomic conformal geometry. VI. Non-holonomic parabolic Lie geometry. Yokohama math. J. 1, 1—28, 29—38, 39—74, 75—77, 79—82, 83—87 (1953).

Die ersten zwei Arbeiten enthalten eine Darstellung der gewöhnlichen und der kovarianten Ableitung für nicht-holonome Koordinaten. Insbesondere betrachtet Verf. die Konnexion, für welche die nicht-holonomen Parameter verschwinden. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien dieser Konnexionen werden angegeben. Die dritte Arbeit handelt über Riemannsche Räume. Es seien ω^r n Pfaffsche Formen, derart, daß $ds^2 = \sum \omega^r \omega^r$. Die ω bestimmen ein nicht-holonomes Bezugssystem. Die geodätischen Linien der zugehörigen Konnexion nennt Verf. geodätische Linien zweiter Art. Die so erhaltene Abbildung eines Riemannschen Raumes auf einen euklidischen Raum führt zu einer nicht-holonomen Laguerre-Geometrie, konformen Geometrie und Lie-Geometrie mittels der bekannten euklidischen Darstellungen dieser Geometrien (IV, V und VI).

J. Haantjes.

Takasu, Tsurusaburo: A combined field theory as a three-dimensional non-holonomic parabolic Lie geometry and its quantum mechanics. Yokohama math. J. 1, 105—116 (1953).

Die vom Verf. definierten geodätischen Linien zweiter Art (Connection Spaces in the Large I. VII. Autumn meeting Math. Soc. Japan 1952) gestatten die Fundamentalf orm zu interpretieren als Fundamentalf orm einer nicht-holonomen Laguerreschen Geometrie (The General Relativity as a three-dimensional non-holonomic Laguerre Geometry. The Autumn meeting Math. Soc. Japan 1952). In dieser Auffassung ist ein Weltpunkt eine Kugel mit Mittelpunkt ξ^0 , die das Wellenpaket des Partikels (ξ^0) repräsentiert. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß es möglich ist, die Geometrie des Weltraumes als eine nicht-holonomie parabolische Liesche Geometrie zu deuten. Es wird angegeben, wie die verallgemeinerten Diracschen Gleichungen in diese Theorie hineinpassen.

J. Haantjes.

Topologie:

Pereira Coelho, R.: Regularity types. *Portugaliae Math.* **12**, 87—98 (1953).

Nach Alexandroff (dies. Zbl. **22**, 412) heißt ein topologischer Raum vollständig regulär in einem Punkt p , wenn für jede Umgebung V von p eine total geordnete, in sich dichte Menge I mit letztem Element 1 und für jedes $i \in I$ eine Umgebung U_i von p mit $\overline{U_i} \subseteq U_{i'}$ für $i, i' \in I$ mit $i < i'$ und $U_1 \subseteq V$ existiert. Verf. verfeinert diese Definition, indem er I als wohlgeordnet annimmt und als Regularitätstyp des Raumes in p den Ordnungstyp von I definiert. Diese Typen werden verglichen und ein Existenzsatz bewiesen.

G. Nöbeling.

Smirnov, Ju.: Über die Vollständigkeit uniformer Räume und Nachbarschaftsräume. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **91**, 1281—1284 (1953).

Sei P_Σ ein uniformer Raum, dessen uniforme Struktur durch ein System Σ von Überdeckungen definiert ist (vgl. Verf., dies. Zbl. **47**, 419). Die üblichen Begriffe der Vervollständigung und Vollständigkeit von P_Σ werden ebenfalls mittels Σ formuliert. Sei P der zu P_Σ gehörige δ -Raum. Analog zu den c -Enden eines δ -Raumes (vgl. Verf., dies. Zbl. **50**, 170) werden hier die Σ -Enden im uniformen Raum P_Σ definiert. Sie bestimmen ebenso wie jene einen δ -Raum ΣP , der eine δ -Erweiterung von P ist. ΣP ist der δ -Raum, der zur Vervollständigung des uniformen Raumes P_Σ gehört. Zwei weitere Charakterisierungen des Raumes ΣP von P aus durch Erweiterungseigenschaften des Systems Σ werden angegeben. Das zur Vervollständigung des uniformen Raumes P_Σ gehörige System von Überdeckungen in ΣP kann als ein gewisses Erweiterungssystem von Σ charakterisiert werden. Hieraus folgen zwei Vollständigkeitskriterien für uniforme Räume. Die Vervollständigung cP des δ -Raumes P (vgl. Verf., dies. Zbl. **50**, 170) ist der kleinste unter allen ΣP , wenn Σ die mit P verträglichen uniformen Strukturen durchläuft. P ist ein vollständiger δ -Raum, wenn P_Σ ein vollständiger uniformer Raum ist. Anwendung auf vollständige topologische Gruppen. Ferner wird der Begriff der Σ -Abbildung für uniforme Räume eingeführt und zur Charakterisierung der Präkompaktheit von P_Σ verwendet. Keine Beweise. — Verf. merkt an, daß das früher (dies. Zbl. **50**, 170) angegebene Beispiel eines δ -Raumes ohne maximale zugehörige uniforme Struktur fehlerhaft ist, so daß die Frage nach der Existenz solcher δ -Räume noch offen bleibt.

E. Burger.

Suzuki, Jingoro: On uniformities agreeing strongly with the topology. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A* **4**, 283—289 (1953).

H. Freudenthal defines an extension of a topological space R by means of a relation \subseteq between open sets of R [*Ann. of Math.*, II. Ser. **43**, 261—299 (1942)]. Let $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ be the family of those binary open coverings $\{P, R - \overline{Q}\}$ for which $Q \subseteq P$. Then the following theorem holds: If R is \mathfrak{D} -regular, the uniformity $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ agrees strongly with the topology of R and Freudenthal's extension of R coincides with the regular extension of R with respect to the uniformity $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, and furthermore if R is \mathfrak{D} -normal the uniformity consisting of finite intersections of coverings belonging to $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ is completely regular (for the terminologies concerning uniformities cf. K. Morita, this Zbl. **42**, 412; **45**, 117). Unfortunately the author's proof for Lemma 1 uses an incorrect equality in a book by J. W. Tukey, but the validity of the above theorem is seen from his proofs, cf. corrections in a forthcoming note by the author. In the second part the author proves that if Y has a T -uniformity agreeing strongly with the topology, the convergence of a directed set $\{f_\nu | f_\nu \in Y^X, \nu \in A\}$ to $f \in Y^X$ by the compact-open topology is equivalent to the compact uniform convergence [cf. R. Arens, *Ann. of Math.*, II. Ser. **47**, 480—493 (1946)].

K. Morita.

Aotani, Kiyo: Some remarks on the uniform space. *Osaka math. J.* **5**, 93—98 (1953).

Let R be a neighbourhood space and $\{O_\lambda | \lambda \in A\}$ a family of those systems O_λ each of which contains a fundamental system of neighbourhoods for each point p of R . If for any point p of R any family $\{V_\lambda(p) | \lambda \in A\}$ of sets, where each neighbourhood $V_\lambda(p)$ of p is taken arbitrarily from O_λ , is a fundamental system of neighbourhoods of p , R is called a uniform space by K. Kunugui. He assumes further the condition (W) : For any index $\lambda \in A$ and any point s of R there exists some

index $\mu = \mu(\lambda, s)$ in A such that if for three points p, q and r of R there are some neighbourhoods $V_1(r), V_2(r)$ in O_μ with $p \in V_1(r), q \in V_2(r)$, there exists a neighbourhood $V_3(p) \in O_\lambda$ containing q in case s coincides with one of p, q and r . In his lectures in 1951 it is proved that a uniform space satisfying (W) is regular. The author proves the existence of the completion S of R with the following properties: S is a complete uniform space satisfying (W) with respect to $\{O_\lambda^* \mid \lambda \in A\}$ and R is uniformly homeomorphic to a subset dense in S .

K. Morita.

Shiroya, T.: The space of pseudo-metrics on a complete uniform space. Osaka math. J. **5**, 147—153 (1953).

Let X be a complete uniform space. The set $\mathfrak{S}\mathfrak{M}(X)$ of all bounded pseudo-metrics compatible with the uniformity of X is a complete metric space with the distance $(\rho, \sigma) = \sup \rho(x, y) - \sigma(x, y)$ (x and y ranging over all points of X) and is also a lattice-ordered semi-group with the ordinary addition and with the order as continuous functions on the product space $X \times X$. The author proves that $\mathfrak{S}\mathfrak{M}(X)$, considered as a metric space or a lattice-ordered semi-group as above, determines the given uniform space X [for similar problems cf. B. H. Arnold, Bull. Amer. math. Soc. **49**, 768—778 (1943); M. E. Shanks, Amer. J. Math. **66**, 461—469 (1944)]. For $\rho \in \mathfrak{S}\mathfrak{M}(X)$ let $X_{[\rho]}$ be a metric uniform space whose points are the equivalence classes $[x]_\rho$ with respect to the relation $\rho(x, y) = 0$ and whose metric is defined by $d_\rho([x]_\rho, [y]_\rho) = \rho(x, y)$. If the mapping: $[x]_\rho \rightarrow [x]_\sigma$ is uniformly continuous from $X_{[\rho]}$ onto $X_{[\sigma]}$ we write $X_{[\rho]} \supseteq X_{[\sigma]}$. Then the set of all such metrizable uniform spaces $X_{[\rho]}$ forms a partially ordered set $\mathfrak{Q}(X)$. It is shown that the partially ordered set $\mathfrak{Q}(X)$ determines the uniform space X .

K. Morita.

Nagata, Jun-iti: A characterization of a general uniform space by a system of uniformly continuous functions. J. Inst. Polytechn. Osaka, Ser. A **4**, 43—49 (1953).

L'A. considère les espaces uniformes complets E dans lesquels un système fondamental d'entourages est réunion d'une famille $(U_{\alpha, n})_{\alpha \in A}$ de suites dénombrables telles que $U_{\alpha, n+1} \subset U_{\alpha, n}$ pour tout n ; l'ensemble A est apparemment (bien que l'A. ne précise pas ce point) attaché à la structure (par exemple un ensemble ayant pour cardinal le plus petit cardinal des systèmes fondamentaux d'entourages?). Il se propose de donner une condition d'isomorphie de deux tels espaces R_1, R_2 (correspondant au même A) au moyen d'un autre type d'isomorphie entre deux ensembles de fonctions $D(R_1), D(R_2)$ attachés à ces espaces d'une manière qui ne dépend que de A . $D(R)$ est l'ensemble des applications $u = (u_\alpha)$ de E dans l'espace produit I d'une famille de demi-droites $x \geq 0$, l'ensemble d'indices étant A ; les $u \in D(R)$ doivent être telles que: 1° la relation $(x, y) \in U_{\alpha, n}$ entraîne $u_\alpha(x) - u_\alpha(y) \leq 1/2^n$; 2° il y a un nombre fini d'indices α , tels que $\sup u_{\alpha_i}(x)$ a une borne inférieure > 0 dans E . L'ensemble $D(R)$ est ordonné puisque I l'est (par l'ordre produit), et l'isomorphie que l'A. a en vue entre $D(R_1)$ et $D(R_2)$ est l'isomorphie des structures d'ordre. La méthode, comme toujours, est une variante de l'idée initiale de Stone, savoir une caractérisation de la structure uniforme au moyen de $D(R)$; dans le cas actuel, cela se fait au moyen de „familles maximales d'idéaux caractéristiques“ de $D(R)$, dont la définition ne saurait être reproduite ici.

J. Dieudonné.

Knaster, B. et M. Reichbach: Un lemme sur les F_σ . Fundamenta Math. **40**, 172—179 (1953).

Es sei X ein kompakter, metrischer Raum und F eine Menge $\subset X$ mit $\dim F = n > 0$. Ist F abgeschlossen, so läßt sich F darstellen als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen mit beliebig kleinen Durchmessern, die zu je r ($= 2, \dots, n+2$) einen höchstens $(n-r+1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben (K. Menger, Dimensionstheorie, Leipzig 1928, S. 156). Nun sei F ein F_σ . Dann läßt sich F darstellen als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen mit gegen 0 konvergenten Durchmessern, die zu je r einen höchstens $(n-r+1)$ -dimensionalen Durchmesser haben.

G. Nöbeling.

Knaster, B. et M. Reichbach: Sur la caractérisation topologique de l'ensemble des bouts d'une courbe. Fundamenta Math. **40**, 13—28 (1953).

Ist C eine Kurve (eindimensionales Kontinuum), so ist die Menge E aller Endpunkte nach K. Menger (Kurventheorie, Leipzig 1932, S. 105, dies. Zbl. 5, 415) ein 0-dimensionales G_δ . Verff. zeigen umgekehrt: Ist E' ein 0-dimensionales G'_δ , so existiert in der Ebene eine Kurve C , deren Endpunktmenge E zu E' homöomorph ist. (Für eine Verschärfung vgl. das folgende Referat.) G. Nöbeling.

Knaster, B. et K. Urbanik: Sur les espaces complets séparables de dimension 0. Fundamenta Math. 40, 194—202 (1953).

Hauptergebnisse: Jede Menge, die keine in sich dichte, nichtleere Teilmenge enthält, ist homöomorph zu einer Teilmenge einer kompakten, (der Größe nach) wohlgeordneten Teilmenge des Cantorsche Diskontinuums C . Jedes 0-dimensionale G_δ ist homöomorph zur Endpunktmenge eines Baumes. G. Nöbeling.

Knaster, B. et M. Reichbach: Notion d'homogénéité et prolongements des homéomorphies. Fundamenta Math. 40, 180—193 (1953).

Es seien C das Cantorsche Diskontinuum, P, Q zwei abgeschlossene, in C nicht dichte Teilmengen von C und h eine Homöomorphie von P auf Q . Dann existiert eine Homöomorphie h^* von C auf sich, die auf P mit h identisch ist (C. Ryll-Nardzewski, noch nicht publiziert). Verff. geben einen neuen Beweis und Verallgemeinerungen betr. Erweiterungen von Homöomorphismen. G. Nöbeling.

Lunc, A. L.: Die Struktur der Mengen der Punkte, in denen ein beliebiges Kontinuum nicht lokal zusammenhängend bzw. lokal zusammenhängend ist. Mat. Sbornik, n. Ser. 33, 463—470 (1953) [Russisch].

For a set S let $n(S)$ be the subset of all points of local nonconnection i.e. of all the $x \in S$ each of which is contained in a neighbourhood $U(x)$ so that every neighbourhood $V(x)$ of x contained in $U(x)$ intersects $U(x)$ in at least 2 components of $U(x)$. The complement $S \setminus n(S)$ is called the set of local connection. The paper contains the following topological characterisation of $n(S)$ ((resp. $S \setminus n(S)$) (Th. 1 resp. Th. 2): Let M (resp. L) be a metric separable space; in order that a continuum C exists so that $n(C)$ (resp. $C \setminus n(C)$) be homeomorphic with M (resp. L), it is necessary and sufficient that M be an absolute F_σ decomposable in a denumerable sequence of compacts none of which has a one-point component (resp. L be an absolute G_δ). The necessity proof rests upon this Lemma: If for any compact F , F^α (α real number > 0) denotes the union of all the components of F each of which has the diameter $\geq \alpha$, then F^α is closed in F . The sufficiency proof (pp. 465—469) uses some constructions in the topological product of the fundamental Hilbert parallelepipedon and the linear segments $[0, 2^{-n}]$. G. Kurepa.

Homma, Tatsuo: An extension of the Jordan curve theorem. Yokohama math. J. 1, 125—129 (1953).

The Jordan curve theorem in the form „A homeomorphism in the 2-sphere S^2 of a Jordan curve J lying on it is extensible to a homeomorphism of the whole sphere on itself“ is extended here to the result: „A homeomorphism in S^2 of a locally connected continuum M lying on the sphere is extensible to a homeomorphism of the whole sphere on itself if, and only if, the homeomorphism is sense preserving or sense reversing, that is leaves the orientations of all Y -sets in M invariant or reverses all of them“. The necessity, and the passage from the reversing to the preserving case, for the sufficiency, being immediate the sufficiency proof for the case of a sense-preserving homeomorphism is then reduced to the case of a M having a single complementary domain D [to do this it is shown that the complementary domains of M and $f(M)$ can be so paired that their boundaries also correspond under f and f^{-1}]. For this last case the prime ends of D at a point p on the boundary of D are paired to the (Dedekind) cuts of the cyclically ordered family of components of $M - p$; then an appeal to a theorem of Carathéodory that D together with its prime ends is homeomorphic with a closed 2-cell with the prime ends corresponding to the points of the bounding Jordan curve, helps to extend the homeomorphism from M to D also. — A few minor corrections are necessary; the full stop has to be replaced by a comma and the succeeding word should start with a small letter in the following places: p. 127, l. 18 after „ $f(q)$ “, p. 128, l. 1, after „ H^j “, and p. 128, l. 27 after „ $I(p, 1/n)$ “. A few other corrections are: p. 127, l. 15, for „ C “ read „ D “; p. 128, l. 7 for „ $c \leq d$ “ read „ $c \leq b$ “; l. 17 and 18 for „ $K_n^i \dots K_n^{i*}$ “

read „ $K_n^i \leq K_n^{i*}$ and $K_n^{i*} \leq K_n^{i**}$ “, 1. 18 for „a cutting . . . to a“ read „the same cutting of \mathfrak{N}_p “, consequently to a prime end of D at p is uniquely assigned a“, 1. 20 after „one-one“ add „onto“ and for „ p “ read „ β “. The proof that the association of a unique cut of \mathfrak{N}_p to each prime end at p is one-one is not complete, but can easily be completed. V. S. Krishnan.

Lubański, M.: An example of an absolute neighbourhood retract, which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space. *Fundamenta Math.* **40**, 29—38 (1953).

Das Beispiel hat außerdem die Eigenschaft, daß es darstellbar ist als Vereinigung endlich vieler absoluter Retrakte mit beliebig kleinen Durchmessern. (Zu den Definitionen vgl. dies. Zbl. **3**, 27; **4**, 21; **5**, 265.) G. Nöbeling.

Ganea, Tudor: Kontraktibilität der symmetrischen Produkte. *Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat.* **4**, 23—28 (1953) [Rumänisch].

Si X métrique est localement contractile et localement compact, sa n -ième puissance symétrique $X(n)$ (v. K. Borsuk et St. Ulam, ce Zbl. **3**, 224) est localement contractile. Si X est contractile en soi et compact, $X(n)$ est contractile en soi. Autoreferat.

Borsuk, K.: Concerning the Cartesian division by manifold. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **1**, 91—94 (1953).

Es seien C und C' zwei lokal zusammenhängende Kurven und M eine Mannigfaltigkeit (geschlossen oder mit Rand). $C \subset M$ und $C' \subset M$ sind dann und nur dann homöomorph, wenn C und C' homöomorph sind. G. Nöbeling.

Saalfrank, C. W.: On the universal covering space and the fundamental group. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 650—653 (1953).

It is shown that if A is a retract of the space X , then the universal covering space of A is a retract of the universal covering space of X and the fundamental group of A is a retract of the fundamental group of X . — Reviewer's remark: these results are not new; cf. K. Borsuk (this Zbl. **8**, 132) and T. Ganea (this Zbl. **35**, 249). T. Ganea.

Gerstenhaber, Murray: On the algebraic structure of discontinuous groups. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 745—750 (1953).

A space S is called admissible, if S is a connected locally connected Hausdorff space. A group G of homeomorphisms of S is said to be of the first kind with D as proper fundamental domain, if D is a connected subspace of S such that: i) S is the disjoint union of the transforms gD of D by all the elements $g \in G$, and ii) the set F of elements $f \in G$ such that $fD \cap D \neq \emptyset$ is finite, and the union of the sets fD ($f \in F$) contains a neighbourhood of D . — The set F generates G and is called a local set of generators relative to D . Any relation in G of the form $f_1 f_2 = f_3$ ($f_i \in F$) or a consequence of such relations is called a local relation of G . It is possible to construct a group H with generators corresponding to the elements of F and relations corresponding to the local relations. H is essentially unique and is called the local universal covering group of G . The mapping which takes the generators of H back to F can be extended to a homomorphism q of H onto G . With these notations it is shown (Main Theorem) that there exists an admissible space T which is a covering space of S (with covering mapping π say); T has a group of homeomorphisms of the first kind isomorphic to H with proper fundamental domain E homeomorphic to D , and for any $h \in H$ (qua mapping on T) $\pi \circ h = q(h) \circ \pi$. The proof proceeds by constructing a space T in terms of H , which is then shown to have the required properties. — T is not necessarily the universal covering space of S , but it is „universal“ relative to the conditions of the main theorem. — Suggested applications are the determination of the structure of discontinuous groups of analytic homeomorphisms of the upper half plane, e. g. the modular group. P. M. Cohn.

Rado, Tibor: On general cohomology theory. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 244—246 (1953).

Let A be a closed subset of a topological space X . An integral-valued function $c^p(x_0, \dots, x_p)$ of $p+1$ points of X is called a p -function. The coboundary operator δ is defined as usual. $C^p(X, A)$ denotes the group of those p -functions which vanish locally on X (i. e. on some neighbourhood of x for each point x) and vanish identically on A . For $p < 0$ let $C^p(X, A) = 0$. Let $Z^p(X, A)$ be the group of those elements of $C^p(X, A)$ for which $\delta c^p = 0$, and $B^p(X, A)$ the group of those elements of $C^p(X, A)$ which are of the form δc^{p-1} with $c^{p-1} \in C^{p-1}(X, A)$. Finally

let $H^p(X, A) = Z^p(X, A)/B^p(X, A)$. The author states with an indication of proof that $H^{p+1}(X, A)$ is isomorphic to the p -th cohomology group of the pair (X, A) in the sense of Wallace (E. H. Spanier, this Zbl. 35, 248) [and hence isomorphic to the p -th Čech cohomology group of (X, A) ; cf. C. H. Dowker, this Zbl. 46, 404]. The author's definition is simple in the two points (i) $H^p(X, A)$ is defined as the cohomology group of a cochain complex associated with (X, A) , (ii) the use of the process of identification is minimized.

K. Morita.

Sakai, Shozo: On the map excision theorem. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 290—297 (1953).

The author proves the following theorem: Let X and Y be any topological spaces, and let A and B be closed sets of X and Y such that their boundaries $\mathfrak{B}(A)$, $\mathfrak{B}(B)$ have open neighbourhoods whose closures are fully normal. If $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ is a closed continuous mapping such that f takes $X - A$ homeomorphically onto $Y - B$, then $f^*: H^p(Y, B) \rightarrow H^p(X, A)$ is an isomorphism onto, where the cohomology groups are understood as the unrestricted Čech groups or the Wallace-Spanier groups (for the coincidence of both groups cf. C. H. Dowker, this Zbl. 46, 404). This theorem is a generalization of the original map excision theorem of A. D. Wallace (this Zbl. 46, 406) and the two cases treated by Wallace are included in the author's theorem.

K. Morita.

● **Hilton, P. J.:** An introduction to homotopy theory. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 43.) Cambridge: The University Press 1953. 142 p. 15 s. net.

Das Buch ist die erste Monographie über die 1935 von Hurewicz begründete Homotopietheorie. Es ist in acht Kapitel aufgeteilt. Nach Erklärung der Homotopierelation für Abbildungen werden die absoluten und die relativen Homotopiegruppen erklärt. Die Darstellung der klassischen Theoreme über Brouwers Abbildungsgrad und das Isomorphismustheorem von Hurewicz über den Zusammenhang zwischen Homotopie- und Homologiegruppen lehnt sich an die „Introduction to Topologie“ von Lefschetz (Princeton 1949, dies. Zbl. 41, 518) an. Es folgt die Untersuchung der iterierten Homomorphismen, der sogen. exakten Folgen bei Homotopiegruppen. Unter Hinweis auf Steenrods Buch (The topology of fibre bundles, Princeton 1951), wird dann ein Abriss der gefaserten Räume gegeben, insbesondere die Faserung von Sphären nach Hopf behandelt. Es folgt eine Darstellung von Hopfs Ergebnissen über Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension und des von Freudenthal angegebenen Zusammenhangs zwischen den Homotopiegruppen von Sphären, deren Dimensionen sich um 1 unterscheiden. Den Abschluß bilden zwei Kapitel über die Zellkomplexe von Whitehead, die Homotopiespektren von Massey und die Berechnung von Homotopiegruppen spezieller Zellkomplexe, insbesondere für die normalen Zellkomplexe von S. C. Chang. Eine Tafel der Homotopiegruppen elementarer Komplexe, eine Bibliographie und ein sorgfältiger Index beschließen das inhaltsreiche, prägnant formulierte Werk.

K. Reidemeister.

Hu, Sze-tsen: The homotopy addition theorem. Ann. of Math., II. Ser. 58, 108—122 (1953).

Die Elemente der Homotopiegruppen lassen sich einerseits als Homotopieklassen von Abbildungen von Sphären, andererseits als Homotopieklassen von Abbildungen von Zellen erklären. Das (einleuchtende, mehrfach verwendete aber bisher nicht explizit bewiesene) Additionstheorem beschreibt die Beziehung dieser beiden Definitionen. Nimmt man mit dem Verf. als Urbild S^n der Sphären den Rand eines $(n+1)$ -dimensionalen Simplex und solche Abbildungen F , welche das $(n-1)$ -dimensionale Skelett von S^n in einen Punkt überführen, so ist die durch F bestimmte Homotopieklassse $[F]$ als alternierende Summe der durch die n -dimensionalen Simplexe von S^n vermittelten Abbildungen, die F induziert, darstellbar.

K. Reidemeister.

Calabi, Eugenio and Beno Eckmann: A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. Ann. of Math., II. Ser. 58, 494—500 (1953).

Etude de variétés $M_{p,q}$ pourvues d'une structure complexe et homéomorphes au produit $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ de deux sphères de dimension impaire. Les principaux résultats sont: 1° $M_{p,q}$

n'admet pas de métrique kählerienne, ne peut être plongée dans un espace projectif complexe (en particulier $M_{p,q}$, bien que compacte, n'est pas algébrique). 2° $M_{p,q}$ admet une fibration analytique complexe, l'espace de base étant le produit $P^p \times P^q$ d'espaces projectifs complexes, la fibre étant un tore. 3° Les tores de la fibration donnent l'exemple de sous-variétés compactes, analytiques complexes dont les cycles sont homologues à zéro dans $M_{p,q}$. 4° Toute sous-variété complexe compacte se projette sur $P^p \times P^q$ selon une sous-variété algébrique et est fibrée par les tores. 5° Toute fonction méromorphe sur $M_{p,q}$ est constante sur les tores fibres de $M_{p,q}$. 6° Soit $a \in S^{2p+1}$, $a' \in S^{2q+1}$ deux points; $E_{p,q} = \{S^{2p+1} - \{a'\} \times \{S^{2q+1} - \{a'\}\}$ donne l'exemple d'une variété analytique à $p+q+1$ dimensions complexes, homéomorphe à un simplexe (de dimension complexe $p+q+1 \leq 3$), n'admettant cependant pour $q > 0$, ni métrique kählerienne, ni système de coordonnées complexes uniformes, et sur laquelle, sauf les constantes, il n'existe pas de fonction partout holomorphe. Ces résultats sont obtenus à partir de la structure complexe sur $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ qui découle de la projection de S^{2p+1} sur l'espace projectif complexe P^p (z_0, z_1, \dots, z_p); $P^p \times P^q$ est reconvert par les $(p+1)(q+1)$ domaines $V_{\alpha,\beta}$ définis chacun par $z_\alpha z'_\beta \neq 0$. Le cas $q=0$ étudié par H. Hopf (ce Zbl. 33, 25) fait exception en ce qui concerne 6°.

P. Lelong.

Moise, Edwin E.: Affine structures in 3-manifolds. VI. Compact spaces covered by two Euclidean neighborhoods. Ann. of Math., II. Ser. 55, 107 (1953).

(Teil V: dies. Zbl. 48, 171). Es wird gezeigt, daß ein kompakter metrischer Raum M , welcher die Summe zweier offener Punktmengen, die je zum 3-dimensionalen euklidischen Raum homöomorph sind, ist, die topologische 3-dimensionale Sphäre ist. Die Frage ist von J. W. Alexander gestellt. Die Antwort ergibt sich durch Konstruktion zweier 3-dimensionaler Zellen in M , welche eine Zerlegung von M bilden. Die erste dieser Zellen K liegt in der einen der beiden offenen Punktmengen und enthält den Rand der zweiten im Innern. Es folgt dann, daß das Komplement in der Zelle K wieder eine Zelle ist, und zwar nach einem Satz von J. W. Alexander, weil der Rand von K sich nach früheren Ergebnissen des Verf. homöomorph in ein Polyeder überführen läßt.

K. Reidemeister.

Moise, Edwin E.: Affine structures in 3-manifolds. VII. Disks which are pierced by intervals. Ann. of Math., II. Ser. 58, 403—408 (1953).

Eine Punktmenge im 3-dimensionalen euklidischen Raum E^3 oder in einer 3-dimensionalen triangulierten Mannigfaltigkeit K heißt glatt eingebettet, wenn es einen Homöomorphismus von E^3 bzw. K auf sich gibt, welcher die Punktmenge in ein Polyeder überführt. Es wird bewiesen: Ist D eine Kreisscheibe und I ein Kurvenstück, welches D in einem Punkte durchsetzt, und sind D und I je glatt eingebettet, so ist auch die Vereinigungsmenge D, I glatt eingebettet. Zum Beweis dient u. a. das folgende Lemma: Sind I und I' zwei einfache unverknötete Polygonzüge in einem 3-dimensionalen polyederartigen Raumstück C mit denselben Endpunkten auf dem Rande von C , so gibt es einen stückweise linearen Homöomorphismus von C auf sich, welcher die Randpunkte von C fest läßt und I in I' überführt.

K. Reidemeister.

Schubert, Horst: Knoten und Vollringe. Acta math. 90, 131—286 (1953).

Im Mittelpunkt der Arbeit steht der Begriff des Begleitknotens \hat{z} eines Knotens z . Ist \mathfrak{K} ein Vollring, dessen Seele den Knoten \hat{z} darstellt, so begleitet \hat{z} den Knoten z , wenn es einen Repräsentanten k von z in \mathfrak{K} gibt, der nicht in einer Vollkugel innerhalb \mathfrak{K} enthalten und nicht zur Seele von \mathfrak{K} isotop ist. Diese Relation ist transitiv. Ihre Bedeutung erhellt daraus, daß jeder Faktor eines Produktknotens Begleitknoten des Produktes ist, daß der Träger eines Schlauchknotens Begleitknoten des Schlauchknotens und der Diagonalknoten eines Schlingknotens Begleitknoten des Schlingknotens ist, sofern diese beiden Kurven nicht Kreise sind. Genauer gilt das folgende: Ein Begleitknoten eines Produktknotens ist ein Faktor oder Begleitknoten eines Primfaktors. Ein Begleitknoten eines Schlingknotens ist der Diagonalknoten oder ein Begleitknoten des Diagonalknotens. Der Träger eines Schlauchknotens ist der maximale Begleitknoten desselben. Daraus folgt, daß die Umlauf- und Verschlingungszahlen des Knotens bezüglich seines Trägers und der Träger ein volles Invariantensystem des Schlauchknotens bilden. Das Geschlecht von Schlauchknoten läßt sich berechnen. Eine Verallgemeinerung der Schlauchknoten sind die Schlauchzöpfe im engeren und im weiteren Sinn, die als geschlossene Zöpfe in einem verknöteten Vollring erklärt werden. Die ersten besitzen einen einzigen maximalen Begleitknoten, die zweiten

einen maximalen orientierten Begleitknoten, und ihre Klassifikation ist in beiden Fällen mit Hilfe des zugehörigen Zopfes möglich. Aus den Sätzen über Produktknoten ergibt sich ein neuer Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren. — Wie die Definition des Begleitknotens beruhen auch diese zahlreichen Sätze über Knoten auf Eigenschaften von Vollringen in der Sphäre. Die Untersuchung dieser Eigenschaften hat ihr eigenes geometrisches Interesse und führt zu einer einheitlichen Theorie, in die sich die Ergebnisse über Knoten durchsichtig einordnen. Zunächst wird die Einbettung von Vollringen in die Sphäre untersucht. Es wird der Satz von Alexander neu bewiesen, daß jeder polyederartige Torus in der \mathbb{S}^3 mindestens einen Vollring berandet und ergänzt durch den Satz, daß das Komplement dieses Vollrings \mathfrak{V} genau dann selbst ein Vollring ist, wenn \mathfrak{V} bzw. die Seele von \mathfrak{V} unverknotet ist. Dann werden Knoten in einem oder mehreren Vollringen betrachtet. Ein Knoten in einem Vollring besitzt eine Ordnungszahl (Minimalanzahl der Durchsetzungen eines Meridianschnittes) und eine Umlaufzahl (algebraische Ordnungszahl). Begleitknoten von der Ordnung 1 sind Faktoren. Liegt die Knotenlinie k in dem Vollring \mathfrak{V} mit der Seele a und entsteht k^* durch Abbildung von \mathfrak{V} in den unverknoteten Vollring \mathfrak{V}^* , ist $g(k)$, $g(k^*)$, $g(a)$ das Geschlecht dieser Knoten, α die Umlaufzahl von k in \mathfrak{V} , so ist $g(k) \geq \alpha g(a) + g(k^*)$. Für den Zusammenhang verschiedener Vollringe, die denselben Knoten wesentlich enthalten, sind die Zerlegungen eines Vollrings und des Komplementes eines Vollrings durch Kreistränge, deren Randkurven auf dem Randtorus des Vollrings liegen, wichtig. Das Hauptergebnis ist hier das folgende: Sind \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* zwei verknotete Vollringe, die die Knotenlinie k im Innern mit positiver Ordnungszahl enthalten, so läßt sich durch (semilineare) Abbildungen, welche k fest lassen, erreichen, daß \mathfrak{V} oder \mathfrak{V}^* im Innern von \mathfrak{V}^* bzw. \mathfrak{V} liegt, oder daß das Komplement von \mathfrak{V} im Innern von \mathfrak{V}^* liegt, oder es läßt sich eine Lage erreichen, in der es einen Vollring \mathfrak{W} gibt, der k im Innern enthält und im Innern von \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* so enthalten ist, daß \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* in bezug auf \mathfrak{W} die Ordnung 1 haben. Eine Seele l von \mathfrak{V} stellt dann einen Produktknoten λ dar, und zwar sind die Seelen von \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* echte Faktoren von λ , die ihrerseits weiter in Faktoren zerlegbar sein müssen.

K. Reidemeister.

Kaluza jr., Theodor: Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen. Math. Ann. 126, 464—465 (1953).

Ein endlicher Graph hat dann und nur dann einen Faktor ersten Grades, wenn jede seiner Komponenten sich aufbauen läßt aus einem Weg ungerader Länge durch schrittweises Anfügen von Wegen gerader Länge, deren einer Endpunkt, oder Wegen ungerader Länge, deren beide Endpunkte mit schon vorhandenen Knotenpunkten identifiziert werden. Bei unendlichen Graphen können an Stelle der Wege gerader Länge solche unendlicher Länge treten. Dabei werden die Punkte und Kanten wohlgeordnet gedacht.

H. Künne.

Harary, Frank and Robert Z. Norman: The dissimilarity characteristic of Husimi trees. Ann. of Math., II. Ser. 58, 134—141 (1953).

Ein Husimi-Baum ist ein zusammenhängender Graph, bei dem jede Kante höchstens einem Kreis angehört. Eine spezielle Art ist hier als „Kaktus“ bezeichnet, wenn jede Kante genau einem dreikantigen Kreis angehört. — Die Punkte und Kanten eines Graphen lassen sich in Ähnlichkeitsklassen bezüglich einer Automorphismengruppe G des Graphen einteilen, wobei Punkte (Kanten) derselben Klasse angehören, wenn sie durch einen Automorphismus von G ineinander transformiert werden können. Ist ein Punkt (eine Kante) inzident mit 2 Kanten (Punkten) derselben Klasse, so heißt er Symmetrie-Punkt (-Kante); Symmetriekanten, die keinem Kreis angehören, heißen Symmetrieachsen. Ein Kreis, der Punkte (Kanten) enthält, die zwei verschiedenen Klassen von Symmetrie-Punkten (-Kanten) angehören, heißt punkt-(kanten-)symmetrisch. In Erweiterung von Sätzen für Bäume von Otter (dies. Zbl. 32, 126), für die hier neue Beweise gebracht werden, wird 1. bewiesen, daß die dissimilarity characteristic für Husimi-Bäume $p - (k - a) + c - c_p + c_k = 1$, wobei p , k , c die Zahlen der Ähnlichkeitsklassen der Punkte, Kanten und Kreise sind, a die Zahl der Symmetrieachsen, c_p und c_k die der punkt- und kanten-symmetrischen Kreise; 2. werden mit Pólyas Methode der Zyklenzeiger (dies. Zbl. 17, 232) aus der von Harary und Uhlenbeck [Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 315—322 (1953)] gegebenen Funktionalgleichung zur Bestimmung der Anzahlen der „Kaktusse“ mit Wurzelpunkten (Setzbäume) die Anzahlen der verschiedenen Kaktusse (ohne Berücksichtigung besonderer Punkte) gewonnen.

H. Künne.

Theoretische Physik.

● **Thomas, T. S. E.:** *Physical formulae.* London: Methuen and Company 1953. VII, 118 p. 8 s. 6 d.

Dieses kleine Bändchen bringt die wichtigsten Definitionen und Formeln der makroskopischen Physik, während nur etwa 5% des Umfangs der Atomphysik gewidmet sind. Einteilung: Mathematik und Statistik, Mechanik, Hydraulik, Elastizität, allgemeine Physik (Gravitationspotential, Kristallographie, Diffusion), Akustik und Fourier-Reihen, Wärme, Licht, Elektrizität und Magnetismus, Atomphysik. — Notwendigerweise leidet die Klarheit der Darstellung durch den vorgeschriebenen geringen Umfang. So hätte die Kirchhoffsche Dampfdruckgleichung (S. 71) durch die Bemerkung ergänzt werden müssen, daß sie nicht exakt ist, aber eine gute Darstellung der experimentellen Werte über einen großen Temperaturbereich erlaubt. Unklar ist die Bemerkung, daß die Bernoullische Gleichung (S. 25) die Druckdifferenz „in absoluten Einheiten“ gibt. Auf S. 107 erfährt der Leser, daß bei elektromagnetischen Wellen Magnetfeld, elektrisches Feld und Fortschrittingsrichtung aufeinander senkrecht stehen; das gilt jedoch nur für ebene Wellen. Die Gesetze von Grüneisen und Dulong-Petit (S. 70) sind zu scharf formuliert; sie gelten nur näherungsweise, und es gibt Ausnahmen. Die Formulierung S. 65 trifft in ihrer Unbestimmtheit nicht den Kern des dritten Hauptsatzes. Die Entropieänderung (S. 66) ist nur für einen reversiblen Weg gleich $\int dq/T$, und $S_B = S_A$ (es muß übrigens $S_A = S_B$ heißen) ist stets vom Weg zwischen A und B unabhängig, und nicht nur wenn der Weg zwischen den Zuständen A und B reversibel durchlaufen wird. Die Bemerkung (S. 67), daß es bei den Anwendungen der Thermodynamik nicht auf die Entropiekonstante ankommt, trifft z. B. bei der Berechnung der Lage der chemischen Gleichgewichte nicht zu.

J. Meixner.

● **Madelung, E.:** *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.* (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften. Band 4.) 5. unveränderte Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. XX, 531 S., 29 Abb., DM 47, —.

● **Morse, Philip M. and Herman Feshbach:** *Methods of theoretical physics. Vol. I. II.* (Internat. series in pure and applied physics.) New York: McGraw-Hill Book Co. 1953. XL, 1978 p. 112/6 s per Volume.

Das vorliegende Werk ist geeignet, eine der empfindlichsten Lücken der modernen Lehrbuchliteratur zu schließen. Seit dem Erscheinen der letzten Auflage des bekannten Riemann-Weber (Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, herausgeg. von Ph. Frank und R. v. Mises, 2. Auflage, Bd. I, II, Braunschweig 1930 bzw. 1935, dies. Zbl. 11, 23) hat sich die theoretische Physik, insbesondere die Feldphysik beträchtlich weiterentwickelt. Dementsprechend stehen hier die mit der Feldtheorie zusammenhängenden Methoden im Vordergrund. Im einzelnen werden behandelt: 1. Kap. 1, Feldtypen (1–118). Die Vektor- und Tensorrechnung wird in der für Bücher über theoretische Physik üblich gewordenen Weise dargestellt. Ferner enthält dieses Kapitel etwas über abstrakte Vektorräume und schließt mit einigen Bemerkungen über Spinoren. Kap. 2, Feldgleichungen (119–274). Nach einer ausführlichen Diskussion der mathematischen Methoden zur Behandlung der schwingenden Saiten werden die Gleichungen der Wellen in elastischen Medien, der Hydrodynamik, der Diffusion, des elektromagnetischen Feldes und schließlich (recht ausführlich) der Quantentheorie besprochen. Kap. 3, Felder und Variationsprinzipien (275–347). Nach einer knappen Einführung in die Grundbegriffe der Variationsrechnung werden die verschiedenen Felder vom Hamiltonschen Prinzip her untersucht. Die detaillierte Darstellung dieser Methode, die in den letzten Jahren große Bedeutung erlangt hat, ist sehr zu begrüßen. Kap. 4, Funktionen einer komplexen Variablen (348–491). Die klare Darstellung der Funktionentheorie enthält wohl alles für den theoretischen Physiker Wissenswerte. Es schließt sich eine (reichlich kurze) Besprechung der Theorie konformer Abbildungen und eine bemerkenswerte funktionentheoretische Behandlung der verschiedenen Integraltransformationen an. Kap. 5, Gewöhnliche Differentialgleichungen (492–675). Die Koordinatensysteme, in denen die Wellengleichung (bzw. die Schrödingergleichung) separierbar sein kann, und die dabei auftretenden Differentialgleichungen werden vollständig zusammengestellt. In den folgenden Abschnitten über die Reihen- und Integraldarstellungen der Lösungen kommen die hypergeometrischen Funktionen, die Zylinderfunktionen und die Mathieuschen Funktionen zur Sprache. Kap. 6, Randwertprobleme und Eigenfunktionen (676–790). Zunächst werden die in der Physik auftretenden Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen allgemein besprochen. Erste Behandlung: Differenzenverfahren, zweite Behandlung: Eigenfunktionen. Das Problem der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen wird vom Standpunkt des Physikers, nicht in mathematischer Strenge, untersucht. Ein Anhang bringt einiges über die Faktorisierungsmethode (factorisation-method). Kap. 7, Greensche Funktionen (791–895). Die Gleichungen stationärer Wellen, skalarer Felder und der Diffusion werden mit Hilfe Greenscher Funktionen behandelt. Es folgt eine abstrakte Operatorformulierung, die alle diese Fälle gemeinsam zu behandeln gestattet und die neuerdings in der Quantenfeldtheorie eine große Rolle spielt. Kap. 8, Integralgleichungen (896–997). Diese

werden hier vom Standpunkt der Anwendungen behandelt. Die Zusammenhänge mit Randwertproblemen und Integraltransformationen werden ausführlich erläutert. II. Kap. 9, Näherungsmethoden (999—1172). Hervorzuheben ist, daß bei der ausführlichen Besprechung der Methoden der Störungsrechnung auch die neueren Entwicklungen gebührend berücksichtigt werden. Einen ebenso breiten Raum nimmt die Darstellung der verschiedenen Variationsverfahren ein, die in zunehmendem Maße in theoretischen Arbeiten Verwendung finden. Kap. 10, Laplacesche und Poissonsche Gleichungen (1173—1330). Zunächst wird das zweidimensionale Problem an zahlreichen Beispielen mit Hilfe der Methode der konformen Abbildungen in Angriff genommen. Im dreidimensionalen Falle und in den folgenden Kap. 11, Die Wellengleichung (1331—1383), Kap. 12, Diffusion und Wellenmechanik (1384—1758), Kap. 13, Vektorfelder (1759—1901), werden die in den Kap. 4—9 dargestellten Methoden angewandt, erweitert und vertieft. Ein Anhang bringt einige kurze Tafeln der wichtigsten Funktionen (1913—1938). — Jedes Kapitel schließt mit einer Reihe illustrativer Übungsaufgaben und einer sehr nützlichen Zusammenstellung seines Inhalts und der Hauptformeln, sowie einem Verzeichnis der wichtigsten Literatur. Die sehr übersichtliche Zusammenstellung und die genaue Erläuterung vieler in der Literatur weit verstreuter Methoden machen das Buch zu einem wertvollen Nachschlagewerk. Die beiden vorzüglich ausgeführten Bände (nur die Figuren lassen gelegentlich an Übersichtlichkeit zu wünschen übrig) sollten in keiner mathematischen oder physikalischen Bibliothek fehlen. *F. Penzlin.*

● Menzel, Donald H.: *Mathematical physics*. (Prentice-Hall Physics Series.) New York: Prentice-Hall, Inc., 1953. VIII, 412 S.

Das vorliegende Buch über „mathematische Physik“ behandelt vornehmlich die rein klassische Physik und kann als Einführung für Studierende an Universitäten und Technischen Hochschulen angesehen werden. Es nimmt auch auf jene Gebiete Rücksicht, welche bei einem späteren Studium der Atomphysik von Bedeutung sind, wie z. B. höhere Mechanik, Elektronentheorie und Theorie der elektromagnetischen Strahlung. Besonders zu erwähnen ist auch die Behandlung der Tensorrechnung, in welcher die Matrizenrechnung in einer Form dargestellt wird, die für ein Studium der Quantenmechanik sehr geeignet ist. Zahlreiche Aufgaben sorgen für besseres Verständnis und gestatten dem Leser eine Selbstkontrolle des Erworbenen. Druck und Ausführung des Werkes sind übersichtlich und stellen dem Verlag ein gutes Zeugnis aus. *P. Urban.*

● Dreyer, J. L. E.: *A history of astronomy from Thales to Kepler*. Reprint. New York: Dover Co. 1953. 438 p. \$ 1,95; cloth \$ 3,95.

Mechanik:

● Pèrès, Joseph: *Mécanique générale*. Paris: Masson et Cie., Éditeurs, 1953. IV, 408 S. mit 64 Fig. 2110 fr.

Vorliegende Darstellung der allgemeinen Mechanik entspricht im wesentlichen der an den meisten Universitäten üblichen Vorlesung über analytische Mechanik und soll in erster Linie dem Gebrauch der Studierenden, darüber hinaus aber auch zur Weiterbildung der Ingenieure dienen. Die Einteilung ist dieselbe wie bei den Pariser Vorlesungen des Verf.: Prinzipien der klassischen Mechanik; Mechanik starrer Körper; Arbeit, virtuelle Arbeit und kinetische Energie; eine grundlegende Differentialgleichung der Dynamik; Ergänzungen zur Punktmechanik; klassische Probleme der Mechanik starrer Körper; Gleichungen von Lagrange und Appell; Variationsprinzipien und kanonische Gleichungen; Bewegungen eines linearen Systems bei konstanten Koeffizienten; Stoß und Stoßwellen, Ergänzungen zu Systemen mit einsinnig-veränderlichen Zwangsbedingungen („liaisons unilatérales“, die Zwangsbedingungen erscheinen dann als Ungleichungen); Mechanik der Kontinua, vollkommen biegsame Seile, elastische Stäbe. Besonderer Wert ist auf die Formulierung der verschiedenen Arten der Freiheitsgrade gelegt. Bei der eingehenden Behandlung der Probleme der starren Körper wird auf gewisse Typen unzulässiger Zwangsbedingungen hingewiesen. Die nicht-lineare Grundgleichung der Dynamik wird mit Einführung elliptischer Funktionen diskutiert. Berührungprobleme mit Reibung werden eingehend behandelt. Der Abschnitt über Mechanik der Kontinua ist im Rahmen des Buches naturgemäß etwas kurz ausgefallen, so daß z. B. die Elastokinetik, die Plastizitätstheorie u. a. nicht aufgenommen wurden. — Das Werk zeichnet sich durch eine der französischen Tradition entsprechende besonders exakte Darstellung der Grundthesen und ihrer Spezialisierungen aus, wobei auf Abbildungen weniger Wert gelegt ist. *H. Neuber.*

● Pars, L. A.: *Introduction to dynamics*. Cambridge: University Press 1953. XXII, 501 p. 31 s. 6 d.

Ein elementares Lehrbuch für erste Semester. In 26 Kapiteln stellt es die Kinetik der Punkte und der starren Körper dar mit Einschluß der Stoßbewegungen. Nach einer Einleitung über Skalare und Vektoren beginnt es mit der geradlinigen Bewegung der Punkte, schließt die Ebene an und behandelt dann den starren Körper mit dem richtig dargestellten D'Alembertschen Prinzip. Überhaupt ist Sauberkeit und Klarheit anzuerkennen. So die klare Erkenntnis, daß die Systemmechanik über Newton hinausgeht. Dessen Prinzipien werden als Axiome hingestellt. Die Statik des starren Körpers wird auf zwei klein gedruckten Seiten fast als etwas Selbstverständliches abgehandelt. Verf. beschränkt sich auf ebene Probleme, die aber recht vollständig vorgebracht werden. Keine Lagrangeschen Gleichungen.

G. Hamel.

● Bird, G. W.: *Mechanics for engineering students*. Fourth edition, revised by F. J. Batson. London: Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd. 1953. VII. 152 p. 10 s. 6 d.

Sbrana, Francesco: *Sul teorema di unicità per le equazioni differenziali della meccanica*. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 123—127 (1953).

It is shown, using the principle of energy, that a certain material system will stay in rest if the initial velocities and accelerations of its points are zero. It is then suggested that, in cases where there is no uniqueness postulated of the solution for the differential equations of motion, one should take the solution for which the variation of kinetic energy is a minimum.

M. M. Peizoto.

Carrelli, A.: *Sul problema della separabilità delle variabili*. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1213—1218 (1953).

Typische Fälle separabler mechanischer Systeme sind die von Liouville (*) und Stäckel (**) behandelten:

$$(*) \quad T = \frac{1}{2} \sum_k A_k \dot{q}_k^2, \quad U = \frac{1}{b} \sum_k U_k(q_k), \quad b = \sum_k B_k, \quad (**) \quad H = \sum_k Z_k \left[\frac{1}{2m} p_k^2 + U_k(q_k) \right] + E$$

in den üblichen Bezeichnungen für kinetische Energie T , potentielle Energie U , Koordinaten q_k und Impulse p_k . Verf. erwähnt neuere Arbeiten auf diesem Gebiete, insbesondere solche von A. Robertson, L. P. Eisenhart (dies. Zbl. 9, 380; 32, 93; 37, 123) und C. Agostinelli [vgl. z. B. dies. Zbl. 18, 179]. Agostinelli hat die Lösung des Problems wesentlich gefördert durch die Bestimmung aller Typen kinetischer Energiefunktionen, für welche die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung durch Separation der Variablen gelöst werden kann. Deutet man die

kinetische Energie repräsentierende quadratische Differentialform $\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta$ als Metrik eines Riemannschen Raumes, so erweist sich dieser als auf einen euklidischen Raum abwickelbar, wenn Separabilität vorliegt. Sodann lassen sich kartesische Koordinaten einführen, derart daß die ursprünglichen (Gaußschen) Koordinaten x_i mit den kartesischen Y_i gemäß $Y_i = \sum_{t=1}^n X_t^i(x_t)$

zusammenhängen. Damit gewinnt Verf. eine Deutung der Hyperflächen $x_i = \text{const}$ als Translationshyperflächen. Zum Schluß wird der dreidimensionale Fall ausführlicher behandelt und auch physikalisch diskutiert.

M. Pinl.

Surova, K. E.: *Die Variation der Poincaréschen Gleichungen*. Priklad. Mat. Mech. 17, 123—124 (1953) [Russisch].

Poincaré a utilisé les systèmes différentiels du type

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i} \right) = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha i \beta} \eta_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_\beta} \right) + X_i L$$

où $L = (T + U)$ et où X_i est un opérateur différentiel classique. L'A. cherche à expliciter les équations aux variations de (1) au moyen des X_i et des formes caractérisant le déplacement virtuel possible du système mécanique. J. Kravtchenko.

Schuh, Fred.: *Bewegung einer exzentrisch belasteten Kugel auf einer horizontalen Fläche im Zusammenhang mit dem Zauberkreisel „Tippe top“*. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 423—432 (1953) [Holländisch].

Angeregt durch den sich selbst aufrichtenden „Zauberkreisel“ untersucht Verf. die Rotationsbewegung einer Kugel auf einer horizontalen Ebene unter Einwirkung der Schwerkraft. Die

Massenverteilung sei nicht homogen, so daß der Mittelpunkt M nicht mit dem Schwerpunkt Z zusammenfällt. Die Massenverteilung sei rotationssymmetrisch bez. $ZM = k$ ($0 < k < r$, r Kugelradius). R sei das Trägheitsmoment bez. der Rotationsachse, Q dasjenige bez. einer Achse senkrecht zu MZ durch Z . Gefragt wird, ob unter gewissen Bedingungen die Rotation mit Z unter M instabil wird und gleichzeitig die mit M unter Z stabil. Rotiert die Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 bei Z unter M und findet eine „Aufrichtung“ zu Z über M statt, so muß dann für die neue Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = -\omega_0 (r-k)/(r+k)$ gelten (Vorzeichenwechsel!). Eine Aufrichtung ist ausgeschlossen, wenn keine Reibung auftritt oder sich nur Rollen ohne Rutschen ergibt, da dann ω konstant bleibt, also nicht das Zeichen wechseln kann. Ist Z unter M , so liegt dann und nur dann Instabilität vor, wenn

$$Qr > R(r-k), \quad r\omega^2 > mgk(r-k)[Qr - R(r-k)]^{-1}$$

gilt. Die Lage Z unter M ist genau dann stabil, wenn

$$Qr < R(r+k), \quad r\omega^2 > mgk(r+k)[R(r+k) - Qr]^{-1}$$

gilt. Der Beweis erfolgt über die Lagrangeschen Gleichungen und nach einem Exponentialansatz durch Diskussion einer algebraischen Gleichung.

W. Haacke.

Bereis, R.: Über die symmetrische Rollung. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 243—246 (1953).

Als Ergänzung seiner früheren Abhandlung (vgl. dies. Zbl. 43, 154) betrachtet Verf. differentialgeometrische Eigenschaften bis zum vierten Grade jener speziellen ebenen Bewegungen, bei denen spiegelbildliche Polkurven in spiegelbildlicher Lage aufeinander abrollen. Es wird gezeigt: Die Halbmesser von Wendekreisen und Polbahnkrümmungskreisen stehen im Verhältnis 1:4. Der Ballsche Punkt ist Brennpunkt der Schmiegeparabel der Gangpolbahn. Die Brennpunkte aller Kegelschnitte, die die Gangpolbahn im Drehpol hyperoskulieren, erfüllen die Scheitelkurve (Ort der Punkte mit stationärem Krümmungskreis). Die Brennpunkte des Schmiegekegelschnittes der Gangpolbahn im Drehpol sind jeweils die Burmestersehen Punkte.

H. R. Müller.

Eršov, B. A.: Über die Stabilität im Großen eines gewissen automatischen Reglersystems. Priklad. Mat. Mech. 17, 61—72 (1953) [Russisch].

Un problème de régulation automatique conduit à l'étude du système différentiel (1) $dx/dt = F(x, y)$; $dy/dt = f(\sigma)$, où $\sigma = c_1 x - d_1 y$. $F(x, y)$ est une fonction partout continue et dérivable; $F(0, 0) = 0$; $\partial F / \partial y < 0$ partout; le signe de $\frac{\partial F}{\partial x}$ définit les différents régimes de fonctionnement du système à régulation; c_1 et d_1 sont des constantes positives; $f(\sigma)$ est continue et telle que: $\sigma f(\sigma) > 0$ pour $\sigma \neq 0$; $f(0) = 0$; $\frac{df}{d\sigma} \geq 0$ pour tout σ . Ainsi, $x = y = 0$ est une solution de (1). Le problème étudié par l'A. consiste à discuter l'allure des trajectoires; $x = x(t)$; $y = y(t)$, solutions de (1), suivant le signe de $\partial F / \partial x$; la méthode employée est celle de Erugin (ce Zbl. 39, 95). Voici le type de résultats obtenus. Si $\partial F / \partial x \leq 0$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers zéro pour $t \rightarrow \infty$. Dans le cas: $\partial F / \partial x > 0$, la propriété précédente ne subsiste que moyennant des conditions supplémentaires. L'A. complète son étude en discutant la stabilité du mouvement décrit par (1).

J. Kravtchenko.

Radzievskij, V. V.: Allgemeine Lösung eines Falles des Dreikörperproblems. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1309—1311 (1953) [Russisch].

Es wird die Bewegung zweier gravitierender Massen behandelt innerhalb einer homogenen kugelförmigen Wolke von so geringer Dichte, daß der Einfluß der Wolke als widerstehendes Mittel vernachlässigbar ist. Die kugelförmige Wolke wird als dritter Körper aufgefaßt. Die Relativbewegung der beiden Punktmassen wird durch die Gleichungen des Zweikörperproblems mit Überlagerung einer abstandsproportionalen (quasielastischen) Kraft beschrieben. Einige allgemeine Eigenschaften dieser Bewegung werden angeführt und auf die Darstellbarkeit der Bahnkurve in Polarkoordinaten durch elliptische Funktionen hingewiesen.

H. Buerius.

Gross, Wolf: Calcolo dell'attrazione newtoniana tra due dischi omogenei coassiali. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 507—515 (1953).

Given two solid coaxial cylinders the author expresses their mutual newtonian attraction in terms of tabulated elliptic integrals. If the radii are equal the result is much simpler, a series expansion being obtained.

M. M. Peixoto.

Elastizität. Plastizität:

● **Delachet, André:** *La résistance des matériaux.* (Que sais-je ? Vol. 599). Paris: Presses Universitaires de France 1953. 127 p.

Kleines Heft zur Einführung in die Festigkeitslehre. Nach einleitender Schilderung der Hauptgedankengänge: Kurzer Abriss der graphischen Statik, statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme, Standsicherheit, Gewölbespannungen, Balken bei Zug und Biegung, Elastizität und Plastizität, mathematische Analyse der Spannungen, experimentelle Analyse der Spannungen (Spannungsoptik, Dehnungsmeßmethoden, Reißlackverfahren). Es werden nur die einfachsten Grundbegriffe erläutert.

H. Neuber.

Föppl, Ludwig: *Ein Mittelwertsatz der ebenen Elastizitätstheorie.* S.-Ber. math. naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 215—217 (1953).

Verf. weist auf Mittelwerteigenschaften des ebenen Spannungszustandes am Rande unbelasteter Löcher hin, welche für die Spannungsoptik wichtige Kontrollmöglichkeiten bieten.

H. Neuber.

Schaefer, Hermann: *Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers.* Z. angew. Math. Mech. 33, 356—362 (1953).

Verf. zeigt, wie sich die Gleichgewichtsbedingungen des dreidimensionalen Spannungszustandes mit Hilfe einer tensoriellen Spannungsfunktion integrieren lassen, für welche aus den Verträglichkeitsgleichungen besondere Differentialgleichungen folgen. Es wird dabei auf gewisse Analogien der auftretenden tensoriellen Operatoren zu bekannten Begriffen der Vektorrechnung hingewiesen, sowie auf Parallelen zur Relativitätstheorie. Im Sonderfall des isotrop-elastischen Körpers werden die bekannten Darstellungen von Boussinesq-Neuber bestätigt.

H. Neuber.

Washizu, K.: *Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity.* J. Math. Physics 32, 117—128 (1953).

Es wird versucht, allgemeine Gesetzmäßigkeiten für obere und untere Schranken von gewissen Skalaren sowie Vektor- und Tensorbeträgen festzulegen. Dabei werden Hilfsfunktionen benötigt, die einerseits Singularitäten entsprechen, andererseits nur teilweise die geforderten Feldgleichungen und Oberflächenbedingungen erfüllen. Spezialisierung für den ebenen Spannungszustand, für Plattenbiegung und Torsion.

H. Neuber.

Bland, D. R.: *Mean displacements on the boundary of an elastic solid.* Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 379—384 (1953).

Durch Umformung tensorieller Beziehungen, welche mit der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf elastische Kontinua in Zusammenhang stehen, zeigt Verf. den Zusammenhang mit den Gleichgewichtsbedingungen und gibt für den axial gedrückten Zylinder, sowie für den ebenen Formänderungszustand spezielle Gleichungen an, welche zur Lösung des Verschiebungsproblems geeignet sind.

H. Neuber.

Chong, Frederick: *Solution by dual integral equations of a plane-strain Boussinesq problem for an orthotropic medium.* Iowa State College, J. Sci. 27, 321—332 (1953).

Verf. behandelt den ebenen Formänderungszustand einer orthotropen Scheibe mit geradlinigem Rand bei Belastung durch einen starren Stempel mit symmetrischer, konvex gekrümmter Randlinie, wobei durch ausreichende Schmierung das Verschwinden der Randschubspannung auch innerhalb der Berührungszone gewährleistet sein soll. Die Lösung wird auf dem Wege der Laplace-Transformation angegeben.

H. Neuber.

Birman, S. E.: *Über das Einsinken eines harten Stempels auf einer elastischen Schicht, die auf einer inkompressiblen Unterlage liegt.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 791—794 (1953) [Russisch].

Hu, Hai-Chang: On the matrix theory of continuous beams on elastic foundation. *Acta sci. Sinica* 2, 171—178 (1953).

Kontinuierliche Träger werden gewöhnlich mit Hilfe simultaner, linearer Gleichungen, wie z. B. der Dreimomentengleichungen, oder durch Methoden der schrittweisen Näherung, wie z. B. der Momentenverteilung (Cross-Verfahren), behandelt. In dieser Arbeit wird die Theorie der Matrizen und der Kettenbrüche zur Lösung von Aufgaben über die Biegung durchlaufender Träger auf elastischer Unterlage angewandt (vgl. z. B.: R. Zurmühl, Matrizen, Berlin 1950, dies. Zbl. 36, 149, wo viel allgemeinere Aufgaben mit Hilfe von Matrizen behandelt worden sind. Bem. d. Ref.).

R. Gran Olsson.

Wittrick, W. H.: Stability of a bimetallic disk. Part I. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 6, 14—25 (1953).

Wittrick, W. H., D. M. Myers and W. R. Blunden: Stability of a bimetallic disc. Part. II. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 6, 26—31 (1953).

Eine Bimetallscheibe, welche eine Vorkrümmung (nach einer Kugelfläche) aufweist, läßt sich als Kontrollelement eines Thermostaten verwenden. Ist die Vorkrümmung groß genug, so erreicht die Scheibe bei Erwärmung eine instabile Gleichgewichtslage und schlägt plötzlich in eine stabile Gleichgewichtslage um. Bei anschließender Abkühlung wird eine zweite instabile Gleichgewichtslage erreicht, und die Scheibe schlägt in ihre Ausgangslage zurück. Verf. zeigt, daß für das Zustandekommen der beiden Instabilitätserscheinungen die Scheibe eine solche Anfangskrümmung aufweisen muß, daß die Durchbiegung in Scheibenmitte größer als die zweifache Wandstärke ist. Es werden Beziehungen für die Abhängigkeit von der Temperatur und die bei Verwendung der Scheibe als Kontrollorgan in Betracht kommenden Temperaturschwankungen angegeben.

H. Neuber.

Cornell, R. W.: Determination of stresses in cemented lap joints. *J. appl. Mech.* 20, 355—364 (1953).

Es wird der Spannungszustand in längsverbundenen Stäben unter folgenden Idealisierungen behandelt: Innerhalb der beiden Stäbe gilt die elementare Biegetheorie; die Verbundschicht (Zementierung) ist in tangentialer und in Querrichtung linear elastisch. Die zugehörige Differentialgleichung ist zehnter Ordnung und hat konstante Koeffizienten, so daß bei der Auswertung keine wesentlichen Schwierigkeiten auftreten. Die Rechnung wird für verschiedene Fälle durchgeführt und experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt.

H. Neuber.

Nardo, S. V.: An exact solution for the buckling load of flat sandwich panels with loaded edges clamped. *J. aeronaut. Sci.* 20, 605—612 (1953).

Ausgehend von einer, durch N. J. Hoff gegebenen Lösung des Stabilitätsproblems der Sandwich-Platte behandelt Verf. den Fall, daß die beiden (einander gegenüberliegenden) belasteten Kanten der rechteckigen Sandwichplatte nur in Richtung der eingeleiteten Kräfte (d. h. in Richtung der Plattenebene) verschiebbar, jedoch nicht drehbar gelagert sind, während die freien Kanten drehbar gestützt sind. Die Auswertung ist numerisch durchgeführt, und es sind Diagramme angegeben, welche die Abhängigkeit der Knicklast von den Abmessungen der Platte und den elastischen Eigenschaften der Verbundschicht veranschaulichen. Die Ergebnisse werden experimentellen Werten gegenübergestellt.

H. Neuber.

Weber, Constantin: Pyramide mit Spitzenlast. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* 2, 457—460 (1953).

Das Problem der in der Spitze durch eine Einzelkraft belasteten Pyramide wird durch Benutzung des Minimumsatzes der potentiellen Energie einer Näherungslösung zugänglich gemacht. Die Schwierigkeit, welche die in der Spitze liegende Unendlichkeitsstelle mit sich bringt, wird durch Abschneiden der Spitze und Anbringen von Kräften an der Schnittfläche umgangen, deren Übereinstimmung mit den entsprechenden Spannungskomponenten Nebenbedingungen des Variations-

problems liefern. Der Rechnungsgang ist nur skizziert. Die Verwendung von Kugelkoordinaten wird empfohlen. *H. Neuber.*

Fergusson, H. B., J. Kudar and R. B. Harvey: The stress distribution in the head of a thin-walled pressure vessel. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 1–14 (1953).

Die Spannungsverteilung im Kopf einer dünnwandigen Druckflasche läßt sich infolge der Rotationssymmetrie mit Hilfe der Biegetheorie der symmetrisch belasteten Rotationsschalen ermitteln. Verff. ersetzen die Meridianlinie durch Stücke von Geraden, Kreisen und Hyperbeln. Die einzelnen Lösungsterme werden unter Beachtung der Anschlußbedingungen aneinander gesetzt. Die numerische Auswertung zeigt — wie zu erwarten war —, daß die höchste Beanspruchung im hyperbolischen Wandungsgebiet auftritt. *H. Neuber.*

Mindlin, R. D. and H. Deresiewicz: Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. appl. Mech.* **20**, 327–344 (1953).

Nachdem Hertz das Berührungsproblem für zwei in Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gegeneinander gedrückte elastische Kugeln gelöst hatte, zeigten neuere Untersuchungen, daß bei tangential zur Berührungsfläche wirkender Kraft die Notwendigkeit entsteht, einen Schlupf in Rechnung zu ziehen, wodurch das Problem in einer besonderen Art nicht-linear wird. Verff. ziehen eine beliebige Lage und Richtung der übertragenen Kraftresultierenden in Betracht und zeigen, daß die Änderungen der Spannungen und Verschiebungen nicht nur vom Anfangszustand, sondern auch von der vollständigen Vorgeschichte der Belastung und der Art der momentanen Änderung der äußeren Kräfte abhängen. Es ergeben sich verschiedene Zustände, je nachdem, ob sich z. B. die Normalkraft ändert, während die Tangentialkraft konstant bleibt, oder umgekehrt, oder sich beide zugleich ändern. Auch kommt es auf den Änderungssinn an, d. h. darauf, ob die eine Komponente zunimmt, während die andere abnimmt, oder umgekehrt, oder ob beide zugleich zu- oder abnehmen; ferner auch darauf, ob das Laständerungsverhältnis größer oder kleiner ist als ein dem Reibungskoeffizienten entsprechender Betrag. Schließlich spielt es eine wesentliche Rolle, ob die laufende Änderung der Belastung im selben Sinne oder entgegengesetzt der zuvor erfolgten Be- bzw. Entlastung ist. Aus diesen Gründen ist es notwendig, den Vorgang lediglich am Hand einzelner Sonderfälle zu verfolgen, um überhaupt zu übersichtlichen Ergebnissen zu kommen. Dabei werden beide Kugeln als identisch vorausgesetzt. Zunächst werden folgende drei Fälle untersucht: Die Normalkraft ist konstant, während die Tangentialkraft zunimmt, abnimmt oder schwingt. Hierbei zeigt sich, daß sich der Radius der Druckfläche allein aus der Normalkraft nach der Formel von Hertz errechnet. Jede Art Tangentialkraft ruft einen Schlupf hervor, es sei denn, daß in einem speziellen Randwertproblem gerade die Schubspannung in der Druckfläche gleich dem Produkt aus dem (als konstant vorausgesetzten) Reibungskoeffizienten und der Normalspannung ist. Der Schlupf bildet sich in Richtung der Tangentialkraft aus und beginnt am Rande der Druckfläche; sich nach innen ausbreitend bildet er den „Schlupfring“; in diesem Gebiet überlagert sich eine konstante Verschiebung (wie die eines starren Körpers), während sich die Schubspannung verändert. Es werden folgende Fälle erörtert: Normalkraft und Tangentialkraft anwachsend; N. abnehmend, T. wachsend; N. wachsend, T. abnehmend; N. und T. abnehmend, wobei der Momentanwert der T. kleiner als der dem Reibungskoeffizienten entsprechende Wert ist; sowie weitere Fälle, welche über den Einfluß der Vorgeschichte der Belastung Aufschluß geben. *H. Neuber.*

Weinberger, H. F.: Upper and lower bounds for torsional rigidity. *J. Math. Physics* **32**, 54–62 (1953).

Durch Anwendung eines von Diaz gegebenen Minimumprinzips für die Drillsteifigkeit gelangt Verf. zu Aussagen über obere und untere Grenzen der Drillsteifigkeit für mehrfach zusammenhängende Querschnittsformen. Für eine Reihe von Querschnitten werden Gebrauchsformeln angegeben. *H. Neuber.*

Luxenberg, Harold: Torsion of anisotropic elastic cylinders by forces applied on the lateral surface. *J. Res. nat. Bur. Standards* **50**, 263–276 (1953).

Die klassische Theorie der Torsion von St. Venant liefert eine Methode zur Bestimmung des elastischen Verhaltens eines orthotropen Balkens von gleichförmigem Querschnitt, der durch an den Endquerschnitten angreifende Kräfte verwunden wird, während die Seitenfläche spannungsfrei ist. Hier wird die Theorie so erweitert, daß sie den anisotropen Zylinder umfaßt, der an einem Ende eingespannt ist und durch gleichmäßig auf der Seitenfläche verteilte Kräfte verwunden wird. Die Ergebnisse gehen über die Arbeiten von Zwolinsky und Riz [Bull. Acad. Sci. URSS **10**, 21–26 (1939)] hinaus, weil die tordierende Kraft nicht konstant oder tangential zur Seitenfläche und der Stoff nicht isotrop sein muß. Durch Lockerung der Randbedingungen kann man nach der semiinversen Methode von St. Venant die Lösung aus den Lösungen zweier Randwertprobleme aufbauen. Als Anwendung werden die Spannungen in einem anisotropen

Zylinder mit elliptischem Querschnitt berechnet, der durch konstanten Tangentialzug verwunden wird; die Spannungsfunktionen werden als Polynome 2. und 4. Grades angenommen. In einer späteren Arbeit soll die Tangentialkraft längs des Zylinders veränderlich vorausgesetzt werden.
J. Pretsch.

Okubo, Hajimu: Torsion of a circular shaft with diameter varying periodically along its length. *Z. angew. Math. Phys.* 4, 197—207 (1953).

Es wird das Torsionsproblem eines Stabes mit Kreisquerschnitt behandelt, wobei der Stabdurchmesser in Stablängsrichtung periodische, gegenüber den Dimensionen des Stabes kleine Schwankungen aufweist. Unter Verwendung der Theorie der Torsion von Stäben mit veränderlichem Durchmesser beschreibt Verf. eine Näherungslösung und diskutiert ausführlich den Fall, daß der Durchmesser sich periodisch linear verändert, mit Anwendung auf das Whitworth-Gewinde.

H. Neuber.

Chandra Das, Sisir: Note on the elastic distortion of a cylindrical hole by tangential tractions on the inner boundary. *Quart. appl. Math.* 11, 124—127 (1953).

Ein zylindrisches Loch in einer Platte endlicher Dicke, jedoch mit großen Längsabmessungen, wird durch Torsionsschubspannungen belastet. Mit Hilfe der antimetrischen Lösung, wie sie z. B. für die Torsion kreisrunder Stäbe mit veränderlichem Durchmesser bekannt ist, lassen sich die Randbedingungen für folgende drei Fälle befriedigen: 1. Beide Oberflächen der Platte sind frei; 2. eine Oberfläche ist frei, die andere fest; 3. die Platte ist sehr dick (ebener Formänderungszustand), das Loch wird nur auf einem schmalen Streifen belastet. In den beiden ersten Fällen werden unendliche Reihen verwendet, im dritten Falle ein unendliches Integral.

H. Neuber.

Müller-Magyari, F.: Endliche Deformationen dünner Plattenstreifen mit freien Längsrändern. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 7, 319—328 (1953).

Bei einem dünnen Plattenstreifen überwiegt die Biegedeformation weitaus gegenüber der reinen Zug-Druck-, d. h. Dehnungsdeformation, so daß die Aufstellung einer Theorie der Plattenbiegung bei dehnungsloser Plattenmittelfläche für endliche Verschiebungen gerechtfertigt ist. Diese Theorie steht in Analogie zu den Elastikaproblemen der schlanken Stäbe mit dehnungsloser Schwerpunktfaser. Um bei der mathematischen Behandlung der Deformation zu möglichst einfachen Beziehungen zu kommen, nimmt Verf. näherungsweise an, daß die Plattenmittelfläche sich in eine abwickelbare Fläche (Torse) verbiegt, und formuliert die Aufgabe als Variationsproblem. Die Platte wird begrenzt durch zwei einander gegenüberliegende geradlinige unbelastete (freie) Ränder und zwei geradlinige, jedoch schräg zu den freien Rändern verlaufende Querränder, an welchen äußere Kräfte und Momente eingeleitet werden. Die Einleitung eines Torsionsmomentes führt auf eine Ergänzung zur Torsionslehre für dünne Platten.

H. Neuber.

Geiringer, Hilda: Some recent results in the theory of an ideal plastic body. *Advances Appl. Mech.* 3, 197—294 (1953).

Der Artikel handelt von stationären Fließvorgängen in isotropen plastischen Medien. Es wird nicht eine möglichst vollständige Übersicht über die neueren Ergebnisse angestrebt, sondern es wird versucht, die mathematischen Methoden unter einheitlichem Gesichtspunkt darzustellen. Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Charakteristikentheorie quasilinearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. In Abschnitt I werden zunächst die Differentialgleichungen für das allgemeine dreidimensionale Problem aufgestellt. Als Fließfunktion wird eine weitgehend beliebige Funktion zugelassen. Die Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor wird mittels eines plastischen Potentials erklärt, von dem Verf. zuläßt, daß es mit der Fließfunktion nicht notwendig zusammenfällt. Das dreidimensionale Problem wird hierauf zu ebenen Problemen spezialisiert, nämlich zum „plane strain“-Problem (ebene Verzerrungen) und zum „plane stress“-Problem (ebenes Spannungsfeld). In beiden Fällen kommt man zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die Komponenten des Spannungstensors und die Komponenten des Fließgeschwindigkeitsvektors. Im Abschnitt II, dem Hauptteil des Artikels, wird die Charakteristikentheorie auf die ebenen Plastizitätsprobleme angewandt. Die „vollständige Aufgabe“, d. h. die Ermittlung der Spannungen und Verzerrungen, läßt sich bei reinen Anfangswertproblemen aufspalten in die Ermittlung der Spannungen für sich

allein und hernach die Bestimmung der Verzerrungen. Die erste Teilaufgabe kann durch eine Legendre-Transformation linearisiert werden, die zweite Teilaufgabe ist (nach Lösung der ersten) von vornherein linear. Verf. bespricht eingehend die physikalischen und geometrischen Eigenschaften der Charakteristiken und die auf ihnen zu erfüllenden Verträglichkeitsbedingungen. Daraus folgen mannigfache Beziehungen für die Abbildung der physikalischen Ebene auf die Hodographenebene und geeignete Spannungsebenen. Physikalisch wichtig ist der Nachweis, daß im allgemeinen die Grenze zwischen festem und plastischem Material eine Charakteristik sein muß. Ausführlich werden schließlich die „einfachen Wellen“ behandelt, bei denen zweidimensionale Bereiche der physikalischen Ebene sich auf Kurven der Spannungsebene bzw. Hodographenebene abbilden. Auf die formalen Analogien zwischen Plastizitätstheorie und Gasdynamik wird mehrfach hingewiesen. Im letzten Teil der Arbeit, Abschnitt III, bringt Verf. im Anschluß an E. H. Lee einige Beispiele (Keil, Kerbe) für die Lösung der vollständigen Aufgabe bei praktisch vorliegenden Randbedingungen. Die mathematische Schwierigkeit bei praktischen Problemen liegt vor allem darin, daß die Randbedingungen meist nicht zur Lösung der ersten, in Abschnitt II genannten Teilaufgabe ausreichen, daß also diese nicht wie bei reinen Anfangswertproblemen für sich allein behandelt werden kann. Der Artikel, der viele eigene Beiträge der Verf. enthält, bietet vor allem für mathematisch interessierte Leser eine ausgezeichnete Einführung in die mathematische Behandlung der Plastizitätstheorie.

R. Sauer.

Craemer, H.: Zur Systematik des plastischen Momenten- und Spannungsausgleichs in Stabwerken unter Biegung. Ingenieur-Arch. 21, 187—190 (1953).

Durch örtliche Plastizierungen in biegebeanspruchten Stabwerken werden einerseits die Biegespannungen im Querschnitt im Grenzfall so verändert, daß auf der Zugseite eine konstante Zugspannung, auf der Druckseite eine konstante Druckspannung herrscht und das Biegemoment als vollplastisches Moment erscheint (Spannungsausgleich). Andererseits kann — insbesondere bei statisch unbestimmten Systemen — ein örtliches Abnehmen des Verformungswiderstandes eintreten, wodurch ein Momentenausgleich herbeigeführt wird. Verf. führt einige, die Ausnutzung des Werkstoffes kennzeichnende, dimensionslose Größen ein und diskutiert mehrere Sonderfälle.

H. Neuber.

Prager, William: A geometrical discussion of the slip line field in plane plastic flow. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 65, 27 p. (1953).

Die Arbeit handelt von den geometrischen Beziehungen, die bei stationären ebenen plastischen Spannungsfeldern zwischen der physikalischen Ebene und ihren Abbildungen auf die Spannungsebene und die Geschwindigkeitsebene bestehen. Für den Mathematiker ergeben sich diese Beziehungen am einfachsten aus der Charakteristikentheorie der partiellen quasilinearen Differentialgleichungen. Auf diesem Wege wurden sie schon von mehreren Autoren untersucht, z. B. vom Ref. (dies. Zbl. 33, 410) und insbesondere von H. Gearing (dies. Zbl. 48, 183). In der vorliegenden Arbeit werden sie auf elementarere Weise, nämlich durch eine graphische Methode, welche die dem Ingenieur gefällige Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises benützt, behandelt. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Gleitlinien aufeinander senkrecht stehen und sowohl für das Spannungsfeld als auch für das Geschwindigkeitsfeld charakteristische Kurven sind. In den oben genannten Arbeiten wurden allgemeinere Fälle zugelassen. Verf. wendet seine Methode auf verschiedene Randwertaufgaben an und erläutert sie an einem praktischen Beispiel. Zum Schluß weist er noch kurz auf pseudostationäre Probleme hin, bei denen das Gleitliniennetz sich mit der Zeit lediglich geometrisch ähnlich ändert.

R. Sauer.

Jung, H.: Der rotationssymmetrische elastisch-plastische Körper. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 168—180 (1953).

Unter der Annahme des Zusammenfallens der Hauptdehnungsrichtungen mit den Hauptspannungsrichtungen und eines zwischen der Spannungs- und Dehnungs-invarianten bestehenden Verfestigungsgesetzes stellt Verf. die Beziehungen für den rotationssymmetrischen Spannungszustand unter Berücksichtigung von Größen zweiter Ordnung bei den Verschiebungs-Dehnungsgleichungen auf, welche für reine Zugbeanspruchung, sowie für konstanten Innendruck ausgewertet werden.

H. Neuber.

Starnberg, W.: Verdrehung bildsamer Metallstäbe über die Fließgrenze. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 299—309 (1953).

Hwang, Chintsun: Plastic collapse of thin rings. J. aeronaut. Sci. 20, 819—826, 845 (1953).

- Ono, Akimasa: Stress and strain in metals undergoing plastic flow. Tube-wall subjected to axial pull and torque. Proc. Japan Acad. 29, 446—451 (1953).
- Schaden, K.: Die Biegefestigkeit von Balken auf zwei Stützen aus bildsamen, spröden und Verbundwerkstoffen. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 284—299 (1953).
- Predvoditelev, A. A. und B. A. Smirnov: Zur Theorie des dynamischen Kriechens. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 8 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 5), 79—86 (1953) [Russisch].
- Koltynov, M. A.: Das Verhalten einer Platte nach Verlust der Stabilität. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 57—62 (1953) [Russisch].
- Babič, V. und A. Alekseev: Über die abschirmende Wirkung einer dünnen elastischen Schicht. Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. Ser. 91, 763—765 (1953) [Russisch].
- Raußenbach, B. V.: Über eine Bemerkung Rayleighs im Zusammenhang mit der thermischen Schallerregung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 749—752 (1953) [Russisch].
- Nagaraja, J. V. and S. S. Rao: Vibration of rectangular plates. J. aeronaut. Sci. 20, 855—856 (1953).
- Gröbner, W. und P. Lesky: Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 254—262 (1953).
- Die Verf. formulieren das Problem der Ermittlung der Eigenschwingungen eines Hohlzylinders mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips in Zylinderkoordinaten. Sie beschränken sich auf das ebene Problem und machen für die Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung einen Ansatz mittels Fourier-Reihen nach dem Polarwinkel φ . Die Fourierkoeffizienten werden als Produkte von Polynomen in r und von noch zu bestimmenden Zeitfunktionen angesetzt; die Polynome werden so gewählt, daß die Ränder $r = r_1, r_2$ spannungsfrei werden. Das Hamiltonsche Prinzip liefert dann ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die Zeitfunktionen, aus denen sich die Eigenfrequenzen ergeben. Zwei Näherungen (ein- bzw. zweigliedrige Ansätze) werden vollständig durchgerechnet. *A. Weigand.*
- Slibar, A. und K. Desoyer: Zur Schwingungstilgung bei Sternmotoren. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 309—319 (1953).
- Zunächst wird ein System von zwei mit Pendeltilgern (als physikalische Pendel) ausgestützten Drehmassen, welche durch eine elastische Welle mit gleichmäßig verteilter Drehmassenbelegung verbunden sind, durch Aufstellung und Integration der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen untersucht, wobei die Einleitung von Störmomenten beliebiger Ordnung an beiden Schwungmassen berücksichtigt wird. Bei Spezialisierung auf den Sternmotor entfällt der zweite Tilger, sowie das zweite Störmoment (Verf. vernachlässigt den Einfluß der Störmomente, die durch periodische Wirbelablösung an der Schraube entstehen, Anm. d. Ref.). Die Auswertung zielt auf die Berechnung der Drillbeanspruchung der Welle hin, und zwar — nach Tilgung des Einflusses einer bestimmten Störfrequenz — bei dieser Frequenz, sowie bei den übrigen Störfrequenzen (Diagramm!). *H. Neuber.*
- Rjabova, E. V.: Der transversale Stoß mit veränderlicher Geschwindigkeit auf einen biegsamen Faden. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7), 85—91 (1953) [Russisch].

Hydrodynamik:

- Rouse, Hunter and J. W. Howe: Basic mechanics of fluids. New York: John Wiley and Sons, Inc., London: Chapman and Hall, Ltd. 1953. X, 245 p. 36 s. net.

Popov, S. G.: Zur Theorie der turbulenten Strömungen einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 3—6 (1953) [Russisch].

L'A. étudie les propriétés des solutions des équations du mouvement plan, rotationnel, non permanent, d'un liquide parfait; les lois des forces sont choisies d'une manière artificielle, pour simplifier l'intégration. Si le tourbillon ne dépend que du temps, la détermination de l'écoulement autour d'un profil peut être ramenée à un problème aux limites relatif à l'équation de Laplace. Un cas particulier du mouvement permanent est traité.

J. Kravtchenko.

Schlichting, H.: Die laminare Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper. Ingenieur-Arch. 21, 227—244 (1953).

Für das im Titel gekennzeichnete Problem gibt der Verf. Lösungen der Grenzschichtdifferentialgleichungen in Abhängigkeit vom Verhältnis Umfangsgeschwindigkeit zu Anströmgeschwindigkeit. Der Grenzfall des nicht rotierenden, längs angeströmten Rotationskörpers ist dabei mit erfaßt. Das Berechnungsverfahren erfordert die Lösung zweier gewöhnlicher, simultaner Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es ergeben sich: die Geschwindigkeitsverteilungen in meridionaler und azimuthaler Richtung, der Reibungswiderstand, das Drehmoment und Aussagen über die Verlagerung der laminaren Ablösungsstelle mit dem oben angegebenen dimensionslosen Drehbeiwert.

F. Riegels.

Schlichting, H.: Die laminare Strömung um einen axial angeströmten rotierenden Drehkörper. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 423—425 (1953).

Überblick der Methoden und Ergebnisse des gleichbetiteltten Aufsatzes, vorsteh. Referat.

J. Weissinger.

Truckenbrodt, E.: Beiträge zur erweiterten Traglinientheorie. Z. Flugwiss. 1, 31—37 (1953).

Bei dem vom Ref. (dies. Zbl. 40, 112) angegebenen Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung von Flügeln beliebigen Grundrisses bestand ein sehr wesentlicher Teil der Arbeit in der Berechnung der Kernfunktion der Integralgleichung an den Stützstellen der benutzten Quadraturformeln. Verf. beschreibt eine außerordentlich einfache Methode zur graphischen Bestimmung dieser Werte: sie können mittels einer universellen (flügelunabhängigen) Hilfskurve fast unmittelbar am Flügelgrundriß abgelesen werden. Weiter wird das Verfahren ausgebaut auf die Berechnung der Momentenverteilung, und die Ausdehnung auf den kompressiblen Fall mittels der Prandtl-Glauertschen Regel wird behandelt.

J. Weissinger.

Truckenbrodt, E.: Die Berechnung des Profilwiderstandes aus der vorgegebenen Profilform. Ingenieur-Arch. 21, 176—186 (1953).

Bei nicht abgelöster Strömung ist der Reibungswiderstand von vorgegebenen Profilen bei ebenen, inkompressiblen Strömungen grundsätzlich durch eine Druckverteilungs- und Grenzschichtrechnung zu bestimmen. Die genaue Lage des Umschlagspunktes bleibt dabei der einzige nicht ganz sicher zu erlassende Parameter. Nachdem vor wenigen Jahren Helmholtz bereits die Grenzschichtrechnung eliminieren und den Profilwiderstand durch eine nur noch die Geschwindigkeitsverteilung enthaltende Formel angeben konnte (dies. Zbl. 33, 413), gelang jetzt dem Verf. eine weitere Vereinfachung durch die Verwendung der Berechnungsmethode des Ref. für die Geschwindigkeitsverteilung. Bei schlanken, symmetrischen Profilformen, deren Ordinaten y_m an bestimmten festen Stellen x_m der Profiltiefe vorgegeben sind, ergibt sich für den Widerstandsbeiwert c_w 2 einer Profilstelle der einfache geschlossene Ausdruck:

$$c_w = c_{fl} \left(P_n + \sum_{m=1}^{N-1} P_{mn} 2 y_m \right) + c_{ft} \left(Q_n + \sum_{m=1}^{N-1} Q_{mn} 2 y_m \right),$$

wobei c_{fl} den laminaren, c_{ft} den turbulenten Reibungswiderstandsbeiwert der ebenen Platte (für glatte und rauhe Oberflächen verschieden!) und die P_n, P_{mn}, Q_n, Q_{mn}

festen, in der Arbeit angegebene Konstanten bedeuten. Als Beispiele werden ein Ellipsenprofil, ein abgeändertes Ellipsenprofil, ein Joukowsky-Profil und verschiedene NACA-Profile behandelt. — Der Einfluß einer Profilwölbung wird außerdem abgeschätzt für einige Birnbaum-Glauertsche und neuere NACA-Skelettlinien.

F. Riegels.

Codegone, Césaire: Flow through uniformly tapped pipes. Appl. Sci. Research, A 4, 76 (1953).

Ergänzung zu einer Arbeit von Van der Hegge Zijnen, Appl. Sci. Research, A 3, 144 (1952).

F. Penzlin.

Frankl', F. I.: Über die Bewegung der Sandwellen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 29—32 (1953) [Russisch].

Dans le cas des cours d'eau à fond à peu près horizontal, l'A. reprend la théorie d'entraînement des matériaux solides, déposés sur le lit du courant (ondes de sable). Le mouvement est supposé plan; l'A. admet qu'on peut prendre: $p = p_1 + k u'$, où p_1 et k sont des constantes; p est la vitesse des matériaux, u' est la vitesse horizontale de fluctuation de l'eau (dont V est la vitesse moyenne), petite par rapport à V et prise à la surface de la couche limite. L'A. forme les équations approchées du phénomène, en tenant compte des conditions à la surface libre de l'eau, des variations de la vitesse de l'eau suivant la verticale et du caractère non-stationnaire du régime des eaux du fleuve. Pour ces différentes raisons, la théorie semble plus complète que celle d'Exner. La solution particulière du problème ainsi posé, formée par l'A. semble donner un schéma théorique du mouvement des ondes de sable sinusoïdales, tant au fond des cours d'eau qu'à la surface du sol, sous l'action du vent.

J. Kravtchenko.

Lauwerier, H. A.: Diffusion from a source in a skew velocity field. Appl. Sci. Research A 4, 153—156 (1953).

In einer Parallelströmung herrscht in einer Richtung quer zur Strömung ein konstantes Geschwindigkeitsgefälle. Im Ursprung befindet sich eine Punktquelle konstanter Ergiebigkeit. Das durch Diffusion entstehende Konzentrationsfeld kann Verf. mit Hilfe der Laplace-Transformation durch Besselfunktionen der Ordnung $1/3$ ausdrücken. Die Verteilungskurven in den Ebenen quer zur Strömung zeigen eine geringe Schiefe.

U. T. Bödewadt.

Tjabin, N. V. und M. A. Pudovkin: Die Strömung eines zähplastischen dispersiven Systems in einem konischen Diffusor. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 53—56 (1953) [Russisch].

Merk, H. J. and J. A. Prins: Thermal convection in laminary boundary layers. I. Appl. Sci. Research, A 4, 11—24 (1953).

Verf. behandelt die natürliche Strömung entlang einer warmen Körperwand, die infolge der Wärmeausdehnung der Flüssigkeit und der dabei auftretenden Dichteunterschiede hervorgerufen wird. Für Prandtl-Zahlen $Pr > 1$ und Grashof-Zahlen (Gr) zwischen 10^4 und 10^9 (ungefährer Bereich laminarer Grenzschichten) werden die um das Wärmeausdehnungsglied erweiterten Grenzschichtdifferentialgleichungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung an der Körperwand integriert. Behandelt wird das ebene und rotationssymmetrische Problem (letzteres tritt nur bei vertikaler Achse des Rotationskörpers auf). In erster Näherung ergibt sich für die mittlere Nusselt-Zahl (\overline{Nu}) das einfache Gesetz: $\overline{Nu} = C(Gr, Pr)^{1/4}$ mit einem Koeffizienten zwischen 0,5 und 0,6.

F. Riegels.

Zaldastani, Othar: The one-dimensional isentropic fluid flow. Advances appl. Mech. 3, 21—59 (1953).

Verf. gibt einen Überblick über die wichtigsten Methoden zur Lösung der quasilinearen Differentialgleichungen der eindimensionalen isentropischen Gasströmung. Er beschränkt sich auf stetige Bewegungen, Stoßvorgänge bleiben außer Betracht. Außerdem handelt es sich in erster Linie um analytische Lösungen. Von den numerischen und graphischen Methoden der

Charakteristiken-theorie ist nur nebenher die Rede. Die Differentialgleichungen werden durch eine Legendre-Transformation linearisiert und durch geeignete Veränderliche u, v auf eine lineare Wellengleichung von der Form (1) $Z_{xx} - Z_{yy} = \theta(r)Z_x$ zurückgeführt. u ist die Gasgeschwindigkeit, v eine Funktion der Dichte. Der Druck $p = p(\varrho)$ ist eine im wesentlichen beliebige, vorgebene Funktion der Dichte. Durch diese ist die Funktion $\theta(r)$ in Gl. (1) festgelegt. Im Spezialfall $\theta = 2m/r$ mit $m = \text{const}$ wird Gl. (1) zur Darboux-Gleichung und die Druck-Dichte-Beziehung zur polytropischen Beziehung $p/p_0 = (\varrho/\varrho_0)^\kappa$ mit $\kappa = (2m+3)/(2m+1)$ oder zu einer allgemeineren, kürzlich vom Ref. angegebenen Beziehung (dies. Zbl. 44, 215). Für die Lösung der Differentialgleichung (1) bieten sich zwei Wege, nämlich a) die Darstellung der allgemeinen Lösung durch Integrale mit 2 willkürlichen Funktionen, b) die Riemannsche Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems. Zu a) gibt Verf. eine Anwendung der Integraloperatormethode, die von Bergman beim analogen Problem der zweidimensionalen stationären Überschallströmung entwickelt wurde, und zwar zunächst für die allgemeine Differentialgleichung (1) und hernach für den Spezialfall der Darboux-Gleichung. Zu b) berichtet Verf. über eine Modifikation der Riemannschen Methode nach H. M. Martin und über die v. Mises'sche Verallgemeinerung auf Anfangswertaufgaben, bei denen die Anfangskurve in einzelnen Punkten von Charakteristiken berührt wird. Die Lösung wird aus Teillösungen zusammengeklebt, welche in Teilbereichen mit umkehrbar eindeutiger Zuordnung $x, t \rightarrow u, v$ aus nicht charakteristischen oder charakteristischen Anfangswertaufgaben nach Riemann bestimmt werden können. Für 2-atomige Gase ($m = 2, \kappa = 7/5$) gibt v. Mises die Lösung in expliziter Form. Durch den Ludfordschen Prozeß des Auseinanderfaltens kann man für die nach v. Mises verallgemeinerten Anfangswertprobleme eine umkehrbar eindeutige Abbildung $x, t \rightarrow u, v$ des ganzen Bestimmtheitsbereiches herbeiführen. Im Fall der polytropischen Gase hat Ludford auf diese Weise Bedingungen für das Auftreten von Unstetigkeiten der Lösung in der x, t -Ebene gewonnen. Zum Schluß bringt Verf. mehrere Anwendungen: 1) Überlagerung einfacher Wellen ($m = 2$), 2) Ausbreitung einer Welle ins Vakuum ($m = 1$), 3) Gasbewegung in einem auf beiden Seiten geschlossenen Rohr ($m = 2$).

R. Sauer.

Timman, R.: Zum Reziprozitätssatz der Tragflächentheorie bei beliebiger instationärer Bewegung. Z. Flugwiss. 1, 146—149 (1953).

Im Hinblick auf die Invarianz der Wellengleichung, welcher Geschwindigkeits- und Beschleunigungspotential Φ und q einer kleinen Störung in einem kompressiblen Medium genügen, geht Verf. von den raumfesten zu flugzeugfesten Koordinaten mittels einer Lorentztransformation über und erhält durch Fouriertransformation (nach der zeitlichen Variablen) Funktionen Ψ und ψ , welche auf Grund der Greenschen Formel in der Reziprozitätsbezeichnung

$$\iint_A \psi \bar{\Psi}_z dX dY = \iint_A \Psi \bar{\psi}_z dX dY$$

stehen, wobei über den Flügelgrundriß integriert wird und Ψ, ψ die transformierten Potentiale für eine „umgekehrte“ Strömung bedeuten. Durch Rücktransformation ergibt sich in Form von Faltungsintegralen der Reziprozitätssatz für die ursprünglichen Potentiale. Zwei in allen Einzelheiten durchgerechnete Beispiele erläutern die allgemeine Theorie.

J. Weissinger.

Nocilla, Silvio: Su di un problema di aerodinamica relativo alle ali a delta. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 177—186 (1953).

Die Bestimmung der Auftriebsverteilung an einem Delta-Flügel mit V-Form im Überschallflug kann bei Belegung mit kugeligen Singularitäten auf die folgende Randwertaufgabe zurückgeführt werden: Innerhalb des Einheitskreises ist eine auf dem Rande verschwindende Potentialfunktion zu bestimmen, die an zwei vom Nullpunkt ausgehenden und schwach gegeneinander geneigten Schlitzten Unstetigkeiten aufweisen kann. Langs dieser Schlitzten und deren Verlängerung ist für die Normalableitung eine Integralbedingung vorgegeben, aus der insbesondere folgt, daß die Normalableitung an den Schlitzten beiderseitig verschwindet. Die Potentialfunktion kann dann durch eine Wirbelbelegung der Schlitzten, wobei noch die Randbedingung am Kreis zu beachten ist, dargestellt werden. Die Verarbeitung der Integralbedingung für die Normalableitung liefert dann eine Integralgleichung, die durch Potenzreihenentwicklung nach dem Neigungswinkel und geeignete Substitutionen auf die Integralgleichung des einfachen Schlitzes (Söhngen, dies. Zbl. 20, 362) zurückgeführt wird. Die entsprechenden Rechnungen werden durchgeführt. H. Söhngen.

Woronetz, Konstantin: L'influence des forces extérieures sur l'écoulement par les orifices. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 5, 183—194 (1953).

Stanjukovič, K. P.: Eine neue Näherungsmethode für die Integration gewisser Gleichungen vom hyperbolischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 979—982 (1953) [Russisch].

Verf. approximiert zur Untersuchung der eindimensionalen Strömung eines Gases in einem Rohr die Abhängigkeit zwischen Druck, spezifischem Volumen und Entropie $p v^{\kappa} = \exp [(S - S_0)/c_v]$ durch einen Ausdruck der Form $p = -A^2(S) v + B(S)$ und wird hierdurch auf die Differentialgleichung $\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial \tau^2 + (d \ln A(\tau) / d\tau) \partial u / \partial \tau$ geführt. Für $A = A_0 (\tau + \tau_0)^{2n}$, wo A_0 und τ_0 konstant, n ganzzahlig, kommt man durch geeignete Substitutionen und n -malige Differentiation (n positiv) bzw. n -malige Integration (n negativ) nach τ^2 auf $\partial^2 z / \partial x^2 = \partial^2 z / \partial y^2$ mit der Lösung $z = F_1(x - y) + F_2(x + y)$, F_1, F_2 willkürliche Funktionen.

W. Schulz.

Collatz, Lothar und Henry Görtler: Rohrströmungen mit schwachem Drall. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2 347—352 (1953).

Es wird für die laminare Strömung durch ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt das Abklingen einer Drallströmung in Achsrichtung untersucht, wenn diese in einem Anfangsquerschnitt vorgegeben ist. Falls die azimutale Geschwindigkeitskomponente klein ist im Vergleich zur axialen, ergibt sich für die erstere eine lineare partielle Differentialgleichung, die nach dem Produktansatz gelöst wird. Dabei ergibt sich für die radiale Verteilung der Drallkomponente eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die ein Eigenwertproblem darstellt. Es werden die ersten fünf Eigenfunktionen nach numerischen Methoden ermittelt.

H. Schlichting.

Stewartson, K.: On the flow between two rotating coaxial disks. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 333—341 (1953).

Die stationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen rotierenden Scheiben wird theoretisch behandelt und durch einige qualitative Versuche nachgeprüft. Wenn die Scheiben im gleichen Drehsinn, aber mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten rotieren, dreht sich die Flüssigkeit mit einer mittleren Winkelgeschwindigkeit, und es herrscht Unterdruck. Bei entgegengesetzter Drehung der Scheiben bleibt die Flüssigkeit im Zwischenraum in Ruhe, und es herrscht Überdruck. Die zuerst von v. Karman (1921) abgeleiteten Differentialgleichungen werden für kleine Reynoldssche Zahlen integriert. Die Grenzschichttheorie ist erst bei größeren Reynoldsschen Zahlen anwendbar. Es wird dabei festgestellt, daß die von Bödewadt (1940) für spezielle Randbedingungen erhaltene Lösung fehlerhaft ist.

W. Wuest.

Tan, H. S.: On laminar boundary layer over a rotating blade. J. aeronaut. Sci. 20, 780—781 (1953).

Die Grenzschichtgleichungen eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotierenden, in y -Richtung unendlichen zylindrischen Blattes werden in der Nähe der Vorderkante ($x/y \ll 1$) durch den Ansatz

$$u = \frac{y \omega}{2} \sum_n \left(\frac{x}{y} \right)^n F'_n(\eta), \quad v = \frac{y \omega}{2} \sum_n \left(\frac{x}{y} \right)^n G'_n(\eta), \quad \eta = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu x}}$$

durch Koeffizientenvergleich in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen übergeführt. Ausführlicher behandelt wird der Fall der rotierenden ebenen Platte, der auf ein ähnliches Gleichungssystem wie das von Howarth [Aeronaut. Res. Commit., Rep. Mem., London, Nr. 1632 (1934)] für die zweidimensionale Grenzschicht aufgestellte System führt.

J. Weissinger.

Witting, Hermann: Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Z. angew. Math. Phys. 4, 376—397 (1953).

Bei der schematischen Ersetzung von Differentialquotienten durch Differenzenquotienten in der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung erhält man zur fortgesetzten Berechnung der Grenzschichtprofile eine Formel mit einem Nenner, der für wandnahe Punkte - insbesondere kurz vor dem Ablösungspunkt - sehr klein wird und damit einen Verlust an Rechengenauigkeit hervorruft. Verf. ersetzt deshalb diese Formel für die beiden der Wand zunächst gelegenen Punkte jedes Profils durch eine andere, aus Interpolationsbetrachtungen (über die ersten fünf wandnahen Punkte) gewonnene Vorschrift. Der Zeitaufwand zur Berechnung eines Profils erhöht sich dadurch von etwa 60 auf 70 Minuten (bei 15 Profilpunkten und 1% Genauigkeit). Für Aufrauhungserscheinungen, hervorgerufen vor allem durch die Benutzung überspringender Differenzen, wird eine Glättungsvorschrift gegeben. Einige durchgerechnete Beispiele werden mit den Ergebnissen anderer Verfahren verglichen.

J. Weissinger.

Smith, John W.: A note on the effect of diffusion fields on the laminar boundary layer. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 847—848 (1953).

Für die kompressible laminare Grenzschicht wird das Diffusionsfeld berechnet, welches sich infolge der Beimengung eines fremden Gases ausbildet. Das System der Grenzschicht-Differentialgleichungen wird integriert unter Hinzunahme einer weiteren Gleichung für das Diffusionsfeld. Ein durchgerechnetes Beispiel einer Beimengung von Helium in Luft bei der hohen Mach-Zahl 8 zeigt einen beträchtlichen Einfluß der Diffusion auf den Wärmeübergang.

H. Schlichting.

Morris, Deane N. and John W. Smith: The compressible laminar boundary layer with arbitrary pressure and surface temperature gradients. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 805—818 (1953).

Es wird ein Näherungsverfahren nach v. Kármán-Pohlhausen für die Berechnung der kompressiblen laminaren Grenzschicht mit beliebigem Druckgradienten und beliebiger Verteilung der Oberflächentemperatur längs des umströmten Körpers angegeben. Für die Ermittlung der Strömungs- und Temperaturgrenzschicht sind zwei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen zu integrieren. Daraus ergibt sich die Verteilung des örtlichen Reibungsbeiwertes und des örtlichen Wärmestromes längs der Oberfläche. Es werden Vergleichsrechnungen mit exakten Lösungen mitgeteilt, die in allen Fällen gute Übereinstimmung ergeben.

H. Schlichting.

Pereira Gomes, A.: Discussion d'un résultat de Tsien pour la détermination d'un „convergent“. Choix de la distribution de vitesses sur l'axe. *Gaz. Mat., Lisboa* **14**, Nr. 54, 1—4 (1953).

L'A. s'occupe de la théorie mathématique de la construction d'un cône de contraction à symétrie axiale. A cet effet il introduit (d'une manière trop compliquée) une séparation de variables dans l'équation de Laplace écrite en coordonnées cylindriques. Partant d'une solution particulière (exprimé en fonctions de Bessel) il prend une des lignes de courant comme contour de la contraction. Il semble pourtant difficile de garantir que la vitesse à la paroi soit monotonément croissante. Remarque du référent: Des recherches analogues ont été faites par Greydanus et lui-même [*Nat. Aeronaut. Res. Inst., Amsterdam; Report Nr. 25 (1948)*]. L'article analysé ne contient pas de résultats nouveaux du point de vue mathématique.

A. van Heemert.

Rosenhead, L.: Vortex systems in wakes. *Advances appl. Mech.* **3**, 185—195 (1953).

Verf. gibt einen kurzgefaßten kritischen Überblick über die theoretischen und experimentellen Ergebnisse, welche die Wirbelsysteme betreffen, die sich im Nachlauf der Strömung um ein Hindernis im Bereich der Reynolds-Zahlen bis zu etwa 2500 ausbilden. Er behandelt die Kármánsche Wirbelstraße, das Föppl'sche Wirbellinienpaar der ebenen Strömung und anschließend auch dreidimensionale Probleme.

Er kommt zu dem Schluß, daß noch wesentliche Arbeit zu leisten ist, um über die bisher gewonnenen qualitativen Einsichten hinaus zu einer auch quantitativ voll befriedigenden mathematischen Erfassung der Phänomene zu gelangen. *R. Sauer.*

Sorokin, V. S.: Die Variationsmethode in der Theorie der Konvektion. Priklad. Mat. Mech. 17, 39—48 (1953) [Russisch].

Bei kleinen Dichteunterschieden ist Gleichgewicht einer erwärmten Flüssigkeit im Schwerfeld nur dann möglich, wenn der Gradient der Temperaturverteilung vertikal gerichtet und konstant ist. Mittels der Methode der kleinen Störungen wird die Stabilität eines solchen Gleichgewichtszustandes untersucht, wobei für die Zeitabhängigkeit der Ansatz $e^{-\sigma t}$ (t Zeit) gemacht wird. Bei Erwärmung von unten können die Störungen sowohl anwachsen wie abklingen. Die Störungsgleichungen lassen sich in ein Variationsproblem umformen. Für den kleinsten Eigenwert σ_0 ergibt sich $\sigma_0 = \text{Minimum } J/K$ mit

$$J = \int \left[\left(\frac{v}{\beta g} \right) (\text{rot } v)^2 - \left(\frac{\chi}{A_0} \right) (\text{grad } T)^2 - 2 \, e \cdot v \, T \right] dV \quad \text{und} \quad K = \int \left(\frac{v^2}{\beta g} + \frac{T^2}{A_0} \right) dV$$

für inkompressible Strömungen, welche die Randbedingungen erfüllen. (Es bedeuten g Erdbeschleunigung, v kinematische Zähigkeit, β Ausdehnungskoeffizient, χ Temperaturleitfähigkeit, V Volumen, e Einheitsvektor senkrecht nach oben gerichtet, v Geschwindigkeitsvektor, T Temperaturschwankung, A_0 Gradient der Temperaturverteilung im Gleichgewichtszustand: $V \, T_0 = -A_0 c$). Es resultiert, daß für hinreichend große Temperaturgradienten A_0 das Gleichgewicht instabil wird. Der Übergang vom stabilen zum instabilen Gleichgewicht erfolgt bei einem kritischen Wert des Temperaturgradienten, für den $\sigma_0 = 0$. Die Bestimmung des kritischen Gradienten wird auf folgende Variationsaufgabe in dimensionslosen Variablen zurückgeführt:

$$\left(\frac{\beta g A R^4}{v \chi} \right)_{\text{krit.}}^{1/2} = \text{Minimum} \left(\frac{1}{2} \right) \int [(\text{rot } v)^2 + (\text{grad } T)^2] dV$$

(R charakteristische Längeneinheit des Flüssigkeitsvolumens) mit den Nebenbedingungen $\int e \cdot v \, T \, dV = 1$ und $\text{div } v = 0$. Dazu kommen noch die Randbedingungen. Für die praktische Rechnung wird ein Ritzansatz empfohlen. *W. Szablewski.*

Pomerancev, A. A.: Unstetigkeiten der Konzentration in Gasströmungen; eine neue Gleichung von Rankin-Riemannschem Typus. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 12 (Ser. fiz-mat. estestv. Nauk Nr. 8), 81—84 (1953) [Russisch].

Frenkiel, F. N.: Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence. Advances appl. Mech. 3, 61—107 (1953).

Verf. behandelt in dem Bericht ein besonderes Gebiet der Turbulenzphänomene, nämlich das Diffusionsproblem in einem Strömungsfeld isotroper und homogener Turbulenz. Dieses Gebiet hat ein sehr weites Anwendungsgebiet in Gasdynamik, Thermodynamik, Chemie, Meteorologie usw. Für Leser, die mit der statistischen Turbulenztheorie wenig vertraut sind, ist ein einleitender Abschnitt über die statistische Darstellung turbulenter Felder vorausgeschickt. Die folgenden Abschnitte handeln von der Grundgleichung der turbulenten Diffusion, von der Verteilung der durchschnittlichen Konzentration für eine punktförmige Diffusionsquelle und für linienhafte Mannigfaltigkeiten derartiger Quellen und schließlich von den Differentialgleichungen der Diffusion und der statistischen Turbulenztheorie. In einem Anhang gibt Verf. eine Übersicht über einige weitere Fragen, darunter auch über die Erweiterung seiner Ergebnisse auf den Fall nichtisotroper Turbulenz. *R. Sauer.*

Rotta, J. C.: Similarity theory of isotropic turbulence. J. aeronaut. Sci. 20, 769—778, 800 (1953).

Grundlage der Untersuchung bildet die durch zahlreiche Experimente nahegelegte Hypothese, daß jedes homogene isotrope Turbulenzfeld unabhängig von den Anfangsbedingungen mit der Zeit einem universellen Status zustrebt. Dieser läßt sich durch drei charakteristische Größen: eine Geschwindigkeit $V(t)$, eine Länge $l(t)$ und die kinematische Zähigkeit ν kennzeichnen. Hier bedeutet t die Zeit; die Struktur ist also zeitabhängig. Für das Energiespektrum wird der Ähnlichkeitsansatz $F(k, t) = V^2(t) l(t) f(\chi, R)$ mit der dimensionslosen Wellenzahl $\chi = k l(t)$, der Reynoldsschen Zahl $R = V(t) l(t)/\nu$ und der universellen Funktion $f(\chi, R)$ konstituiert. Der entsprechenden Formulierung der Bewegungsgleichung des Spektrums werden folgende charakteristische Größen zugrunde gelegt: $V^2 = 3 u'^2/2$, $l = \mathfrak{L}$ (Korrelationsintegral $\int_0^\infty g(r) dr$). Als Konsequenz des Ähnlichkeitsansatzes folgt, daß $d \ln \mathfrak{L}(t)/d \ln u'^2 = -\zeta(R)$ eine universelle

Funktion von R darstellt. Im Spezialfall $R = 0$ ergeben sich dann die „self preserving“-Lösungen nach v. Kármán und L. Howarth (dies. Zbl. 18, 158), im Spezialfall $R = \infty$ die Lösungen der sog. „nonviscous similarity“. Für den allgemeinen Fall werden an der Spektralgleichung folgende, durch numerische Rechnungen gestützte, Vereinfachungen vorgenommen: $\partial f / \partial R = 0$, $\xi(R) = \text{const} (= 1, \xi)$. Dem turbulenten Austausch wird der Heisenbergsche Ansatz zugrunde gelegt (dies. Zbl. 34, 269). Aus der einparametrischen Schar von Lösungen $F(k, t)$ der Spektralgleichung wird die Auswahl durch die Festsetzung $\xi = 5$ getroffen, die mit dem aus der Loitsianskyschen Invarianten folgenden universellen Potenzgesetz $F \sim k^4$ für kleine k identisch ist. Diese Festsetzung ergibt folgenden Abfall der Turbulenz hinter einem Gitter: Für $R = 0$ die von G. K. Batchelor und A. A. Townsend (dies. Zbl. 32, 226) abgeleitete Gesetzmäßigkeit $u'^2 \sim x^{-5/2}$, für $R = \infty$ die von A. N. Kolmogoroff (dies. Zbl. 26, 170) angegebene Relation $u'^2 \sim x^{-10/7}$. Der Widerspruch zu der von W. Heisenberg (dies. Zbl. 35, 256) abgeleiteten Beziehung $u'^2 \sim x^{-1}$, die in Gitternähe auch experimentell bestätigt ist, ist so zu klären, daß der universelle Status sich erst in größerer Entfernung vom Gitter einstellt. Die aus der Theorie folgenden Gesetzmäßigkeiten $d \ln \varrho / d \ln u'^2 = -1.5$ und $d \ln \varrho / d \ln x = 7.9 u$ (λ microscale) werden durch Messungen in größeren Gitterabständen gut wiedergegeben. Auch der Vergleich von theoretischen ($R = \infty$) und experimentellen Spektren und Korrelationsfunktionen scheint die Theorie zu bestätigen. W. Szablewski.

Kovácsnay, Leslie S. G.: Turbulence in supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* 20, 657—674, 682 (1953).

In einer Störungstheorie 1. Ordnung können die einem gleichförmig strömenden kompressiblen Medium mit Reibung und Wärmeleitung überlagerten turbulenten Schwankungen aufgegliedert werden in die folgenden drei voneinander unabhängigen Formen: Schwankungen der Wirbelung, der Entropie und des Druckes (Schallwellen). Der Verlauf dieser drei Formen in einer turbulenten Strömung bei Überschall läßt sich durch Hitzdrahtmessungen ermitteln. Als wesentliches Hilfsmittel dient dabei ein Eichdiagramm (fluctuation diagram) für die Anzeige des Meßgerätes auf Strömungs- und Temperaturschwankungen, das sich durch Messungen bei verschiedenen Hitzdrahttemperaturen ermitteln läßt. Ein solches Diagramm läßt sich für jede der drei Formen bei alleiniger Existenz aufstellen. Die Trennung der in einer physikalischen Strömung gleichzeitig auftretenden drei Formen gelingt in den beiden folgenden typischen Spezialfällen: a) die Druckschwankungen sind vernachlässigbar (Grenzschichtströmungen), b) die drei Formen sind nicht korreliert (freie Turbulenz). — Es werden einige Messungen mitgeteilt. W. Szablewski.

Oudart, Adalbert: Contrainte turbulente pariétale. *C. r. Acad. Sci., Paris* 237, 1060—1062 (1953).

Gvozdtkov, N. N. und M. F. Sirokov: Über die turbulente Reibung und die Wärmeabgabe eines Keils in einem Gasstrom. *Vestnik Moskovsk. Univ. S. Nr. 10 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 7)*, 105—115 (1953) [Russisch].

Truesdell, C.: Precise theory of the absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier-Stokes equations. *J. rat. Mech. Analysis* 2, 643—741 (1953).

Der eigentliche Zweck der Arbeit ist die Diskussion aller Wurzeln der Kirchhoff-Langevinschen Gleichung für die komplexe Wellenzahl von ebenen Wellen kleiner Amplitude in Flüssigkeiten und Gasen, die den Navier-Stokes'schen Gleichungen genügen, und nicht nur der einen Wurzel, welche für unendlich kleine Viskositätskoeffizienten und Wärmeleitfähigkeit endlich bleibt. Dazu wird gezeigt, daß alle Absorptions- und Dispersionsmessungen nur von drei dimensionslosen Parametern γ, X, Y abhängen, von denen nur X die Frequenz enthält. Alle Flüssigkeiten dieser Art lassen sich also durch ihre Werte von γ, Y, X charakterisieren, zwei Flüssigkeiten mit denselben γ, Y besitzen, bis auf eine Maßstabstransformation in der Frequenz, auch das gleiche Frequenzverhalten. Die Abhängigkeit der Wurzeln der Kirchhoff-Langevin-Gleichung von γ, Y und X wird ausführlich diskutiert, und es werden Tabellen der Absorptionskoeffizienten (mit drei geltenden Ziffern) für 676 Kombinationen von γ, Y, X -Werten angegeben. — Als Zugabe enthält die Arbeit eine kritische historische Darstellung der Theorie der Absorption und Dispersion und eine Darstellung des gegenwärtigen Standes unter besonderer Berücksichtigung der kinetischen Theorien und der Relaxationstheorien mit Einschluß der viskoelastischen Theorien. Wegen der Fülle von interessanten Einzelheiten muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. J. Meixner.

Guderley, Gottfried: On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns. *Advances appl. Mech.* 3, 145—184 (1953).

Verf. berichtet über die größtenteils von Busemann und ihm selbst gewonnenen Ergebnisse zur Frage, unter welchen Bedingungen stetige, d. h. stoßfreie Unterschall-Profilströmungen mit eingebettetem Überschallbereich möglich sind. Der Bericht besteht aus zwei Teilen, einem mathematischen und einem physikalischen. Im mathematischen Teil wird zunächst festgestellt, daß die in die Schallkurve der physikalischen Ebene (Gasgeschwindigkeit = Schallgeschwindigkeit) einmündenden Machlinien Verdünnungslinien und die reflektierten Machlinien Verdichtungslinien sind. Dies führt sofort zu notwendigen Bedingungen (Konvexität) für die Profilkontur eines eingebetteten Überschallbereichs. Dann wird das Tricomische Randwertproblem der Differentialgleichung $z_{xx} + x z_{yy} = 0$ erörtert und in einer solchen Weise verallgemeinert, daß man hierbei für das in Frage stehende Strömungsproblem plausible Analogieschlüsse ziehen kann. Für eine erste Orientierung wird die Untersuchung in der physikalischen Ebene geführt, weiterhin dann aber in der Hodographenebene, in der die Potentialgleichung linear ist, dafür allerdings unbequemere Randbedingungen vorliegen. Dabei wird insbesondere das schallnahe Gebiet betrachtet, da sich in diesem die Potentialgleichung bekanntlich zur Tricomischen Differentialgleichung spezialisiert. Bei Zulassung kleiner Änderungen der Randbedingungen entsteht ein lineares Randwertproblem, dessen Lösungen sich überblicken lassen. Auf diese Weise kommt man zu folgendem wichtigem Ergebnis: Stetige Lösungen mit eingebettetem Überschallbereich sind nur in besonderen Fällen möglich. Bereits ganz schwache Änderungen der Kontur zerstören die Möglichkeit solcher Lösungen, indem sie Lösungen oszillatorischen Charakters herbeiführen, die sich physikalisch nicht realisieren lassen. Die im mathematischen Teil gewonnenen plausiblen Folgerungen werden im zweiten Teil der Arbeit durch physikalische Überlegungen interpretiert und vertieft.

R. Sauer.

Chester, W.: The propagation of shock waves in a channel of non-uniform width. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 440—452 (1953).

Eine Stoßwelle laufe in x -Richtung mit zunächst konstantem Drucksprung $p_1 - p_0$ in einem Rohr von rechteckigem Querschnitt (Höhe h_0). Für $x > x_0$ ändere sich die Höhe $h(x)$ stetig, so daß $|h'(x)| \ll 1$ und $|h(x) - h_0| \ll h_0$ bleibt. Die allgemeine Lösung dieses linearen Problems wird aufgebaut mittels einer Elementarlösung, die einem infinitesimalen Wandknick entspricht und aus Lighthills Resultat (dies. Zbl. **41**, 543) durch wiederholte Spiegelung an den Kanalwänden abgeleitet ist. — Die Intensitätsänderung der Stoßwelle ergibt sich zu $K(1 - h(x)/h_0) \cdot (p_1 - p_0)$, wobei K monoton von p_1, p_0 abhängt. Die reflektierte akustische Störung wird durch zwei weitere Koeffizienten N (für die Amplitude) und τ (für die Geschwindigkeit) beherrscht; K, N und τ sind für $\gamma = 1.4$ graphisch dargestellt. N hat eine Singularität, wo die Nachströmung mit Schallgeschwindigkeit erfolgt; τ verläuft monoton.

F. Wecken.

Ludloff, H. F.: On aerodynamics of blasts. *Advances appl. Mech.* **3**, 109—144 (1953).

Ein ebener Verdichtungsstoß, der längs einer ebenen Wand fortschreitet, wird beim Auftreffen auf eine Ausbuchtung der Wand entweder normal oder mit Ausbildung eines Machschen „V“ reflektiert. Verf. behandelt drei Fälle, in denen das Problem im Rahmen einer linearen Theorie gelöst werden kann, nämlich 1. schwache Stöße, die an der Wand auf einen Knickwinkel beliebiger Größe treffen, 2. Stöße beliebiger Intensität, die eine nahezu ebene Wand beliebigen Profils schwacher Krümmung entlang laufen, 3. Stöße beliebiger Intensität, die an einer nahezu senkrechten, schwach geknickten Wand reflektiert werden. Die hierbei benutzte, vom Verf. zusammen mit C. S. Gardner und L. Ting entwickelte Methode beschränkt sich nicht wie die Lighthillsche Methode auf pseudostationäre Phänomene („konische Felder“), sondern liefert für willkürliche schwach gekrümmte Wandprofile geschlossene analytische Ausdrücke für Druck und Dichte im ganzen Bereich hinter der Stoßfront. Außerdem führt sie zu Aufschlüssen über die Unstetigkeitsfläche, die beim Machschen „V“ auftritt.

R. Sauer.

Badér, W.: Der wirksame Austrittsquerschnitt bei Zyklonen. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 66—67 (1953).

Carrier, G. F.: Boundary layer problems in applied mechanics. *Advances appl. Mech.* **3**, 1—19 (1953).

Der Grenzschichtbegriff entstammt der Aerodynamik, wo er bei der Strömung

eines Mediums in der unmittelbaren Umgebung des umströmten Hindernisses auftritt. Ziel des vorliegenden Artikels ist es, zu zeigen, daß der Grenzschichtbegriff auch in verschiedenen anderen Zweigen der Physik eine Rolle spielt, und alle diese Probleme unter einheitlichem Gesichtspunkt zusammenzufassen. Die allgemeinen Begriffsbildungen werden am Problem der ozeanischen Strömungen als dem einfachsten Grenzschicht-Phänomen entwickelt. Hierbei handelt es sich um die Differentialgleichung $\varepsilon \frac{1}{h} \psi'' = \sin \psi$, die im Innern eines Dreiecks mit den Ecken $A(x = y = 0)$, $C(x = 2, y = 0)$ und $B(x = y = 1)$ für die Randbedingungen $\psi = \psi' = 0$ auf AB und BC , $\psi = \psi_{,nn} = 0$ auf CA zu lösen ist. Charakteristisch ist die Voraussetzung, daß der Koeffizient der höchsten vorkommenden Ableitungen klein sein soll gegenüber der Einheit. Anschließend werden dann andere Grenzschichtprobleme besprochen, insbesondere Wärmeübergangs- und Wärmeleitungsprobleme und der van der Polsche Oszillator. *R. Sauer.*

Stoker, J. J.: Unsteady waves on a running stream. *Commun. pure appl. Math.* **6**, 471—481 (1953).

The problem is considered of a disturbance initiated at the surface of a stream flowing with uniform velocity over a horizontal bed. It is especially useful to know something about the effect for $t \rightarrow \infty$ far upstream and far downstream. Similar problems have been investigated previously, however only the steady case was, then, considered and obscure conditions at infinity were postulated. In the present article, considering only the 2-dimensional case of the irrotational flow of an incompressible ideal fluid, it is investigated how the motion builds up from the moment when the disturbance is initiated for $t = \infty$. In this way information for the steady limiting case is obtained from the initial value problem. It turns out that in this case the value of the dimensionless parameter ghU^{-2} (h = undisturbed depth, U = undisturbed velocity) is characteristic for the nature of the flow: For $t \rightarrow \infty$, if $ghU^{-2} < 1$ the amplitude of the disturbance dies out far upstream as well as downstream, if $ghU^{-2} > 1$ it dies out far upstream but not necessarily far downstream, if $ghU^{-2} = 1$ a steady state is impossible. The last fact is due to the inapplicability, in that case, of linearized theory used to derive the above results. As to the mathematical elaboration, it is, in addition to the above remarks, observed, that the equations resulting after linearization of the problem are solved by means of the Fourier transform and that especially the transition to the limit $t \rightarrow \infty$ requires careful considerations.

A. van Heemert.

Dmitriev, A. A.: Der Durchgang langer Wellen durch ein Hindernis bei teilweiser Reflexion mit gegebenem Reflexionskoeffizienten. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **90**, 509—512 (1953) [Russisch].

Untersucht wird der Einfluß eines Hindernisses auf eine — offenbar longitudinale — hydrodynamische Welle, die an dem Hindernis z. T. reflektiert wird, zum anderen Teil sich hinter dem Hindernis fortsetzt. Über die Form des Hindernisses ist nichts gesagt. Es wird offenbar als eben vorausgesetzt. Der Reflexionskoeffizient, in der Arbeit durch α bezeichnet, wird bezüglich seiner Abhängigkeit von den Eigenschaften des Hindernisses, seiner Neigung gegen die Fortpflanzungsrichtung der Welle usw. nicht diskutiert. Es wird betrachtet: 1. geradlinige Ausbreitung einer Welle, 2. Wellenausbreitung in einem ringförmigen Kanal. Ferner: a) Vorhandensein von einem Hindernis, b) von zwei Hindernissen. Im ringförmigen Kanal treffen die Wellen immer von neuem auf das bzw. die Hindernisse, die zur Reflexion Veranlassung geben und die sich hinter dem Hindernis ausbreitende Welle gleichfalls immer von neuem schwächen, wodurch „reflektierte“ und „durchgehende“ Welle in ihrer Amplitude beeinflusst werden. Die dadurch am gleichen Orte gleichzeitig bestehenden Wellen entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung überlagern sich und ergeben zum Teil stehende, zum Teil wandernde Wellen. Die Verhältnisse, die sich dadurch ergeben, werden diskutiert.

J. Picht.

Vojt, S. S.: Der Übergang sphärischer Schallwellen aus einem bewegten Medium in ein Medium, das sich mit anderer Geschwindigkeit bewegt und andere Eigenschaften hat. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **92**, 491—493 (1953) [Russisch].

Weirich, H.: Beitrag zur Stabilität des Schwingungsvorganges im Differentialwasserschloß. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **7**, 236—243 (1953).

Verf. hat bereits in zwei früheren Arbeiten Verfahren zur graphischen (dies. Zbl. **37**, 409) und analytischen [Österreich. Ingenieur-Arch. **5**, 154—173 (1951)] Bestimmung der Spiegelbewegungen im Differentialwasserschloß von Johnson angegeben. An die letzte Arbeit anknüpfend, untersucht er im vorliegenden Beitrag die Stabilitätsverhältnisse dieses Wasserschloßtyps für den Belastungsfall und Regelung auf konstante Leistung. Nach Umformung der Bewegungsgleichung des Schwingungsvorganges auf die Form mit zeitlich veränderlichen Ko-

effizienten wird gefragt, unter welchen Bedingungen die Faktoren $q(t)$ und $\psi(t)$ der allgemeinen Schwingungsgleichung $\ddot{s} + q(t)\dot{s} + \psi(t)s = 0$ während des Schwingungsvorganges positiv bleiben. (Abschätzungsverfahren von P. Funk.) Damit gewinnt der Verf. zwei Stabilitätsbedingungen für den erforderlichen Schloßquerschnitt und eine weitere Bedingung für die größte Leistungsabgabe bzw. den größten Reibungsverlust im Stollen zu Belastungsende für gedämpften Schwingungsverlauf. Verf. ist es weiter gelungen, eine Beziehung für das kleinste Querschnittsverhältnis von Zentralrohr zu Gesamtquerschnitt des Wasserschlosses und damit für den kleinsten noch zulässigen Zentralrohrquerschnitt anzugeben, die zur Bemessung des Zentralrohres dienen kann. Die gute Brauchbarkeit der gefundenen Kriterien wird an Hand eines Beispiels gezeigt.

K. Karas.

Laichtman, D. L. und M. I. Judin: Die Transformation der unteren Luftschicht unter dem Einfluß der darunterliegenden Oberfläche. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 249—252 (1953) [Russisch].

Šulejkin, V. V.: Ein hydrodynamisches Bild der Energieübertragung vom Wind auf die Welle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 41—44 (1953) [Russisch].

Kitkin, P. A.: Über die Dynamik der Strömungen in Meeren und Ozeanen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 293—296 (1953) [Russisch].

Elizarov, I. V.: Modelldarstellung des hydraulischen Stoßes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 495—497 (1953) [Russisch].

Wärmelehre:

Haase, Rolf: Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. III. Z. Naturforsch. 8a, 729—740 (1953).

In der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse hat der Begriff des Energieflusses in offenen Systemen einen eindeutigen Sinn, der Begriff des Wärmeflusses bleibt jedoch weitgehend unbestimmt und kann nur durch eine neue Definition festgelegt werden; die besondere Zweckmäßigkeit des vom Verf. in früheren Arbeiten (Teil I und II, dies. Zbl. 44, 218) schon ausgiebig verwendeten „reduzierten Wärmeflusses“ wird begründet. Ferner wird die Wärmeleitfähigkeit in chemisch reagierenden Zweistoffgemischen diskutiert. Schließlich wird kurz auf die Gültigkeitsgrenzen des Prinzips der minimalen Entropieerzeugung für stationäre Zustände eingegangen.

J. Meixner.

Reik, Helmut G.: Zur Theorie irreversibler Vorgänge. IV. Ann. der Physik, VI. F. 13, 73—96 (1953).

Für das in drei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 50, 204) aufgestellte und angewandte Zeitaxiom für den Ablauf eines einfachen irreversiblen Prozesses wird nun eine Verallgemeinerung auf den Fall postuliert, daß gleichzeitig mehrere irreversible Prozesse ablaufen. Der gegenseitigen Beeinflussung der Prozesse wird durch ein „Integrabilitätstheorem“ (es müßte besser „Integrabilitätspostulat“ heißen, Ref.) Rechnung getragen. Aus ihm folgen Beziehungen, welche die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen als Grenzfall enthalten. Die Theorie wird auf die Effusion bei Gasen und auf mehrere gleichzeitig verlaufende chemische Reaktionen angewandt.

J. Meixner.

Popoff, Kyrille: Sur la thermodynamique des processus irréversibles dans le cas où la température et la pression restent constantes. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 698—700 (1953).

Verf. glaubt, daß man die phänomenologischen Gleichungen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse analog zu den Bewegungsgleichungen der Mechanik ansetzen darf, indem man die zweite Zeitableitung jeder inneren Variablen x_i gleich der zugeordneten „Kraft“ X_i (im Sinne der Thermodynamik!), also dem negativen Differentialquotienten eines für die betreffenden Bedingungen in Frage kommenden thermodynamischen Potentials (hier im wesentlichen die freie Enthalpie mit negativem Vorzeichen) annimmt. Diese Bewegungsgleichungen werden integriert, alle Integrationskonstanten, welche zu exponentiell mit der Zeit ansteigenden Lösungen

führen, werden gleich Null gesetzt, und durch Elimination kommt man dann bei den stets vorausgesetzten kleinen Abweichungen zu Beziehungen, welche den phänomenologischen Gleichungen formal ähnlich sind. — Danach müßten aber alle Relaxationszeiten eines thermodynamischen Systems durch seine Gleichgewichtseigenschaften bestimmt sein (zusätzliche Größen kommen in der ganzen Theorie des Verf. nicht vor), und es gäbe unter anderem, in eindeutigen Widerspruch zur Erfahrung, keine Katalyse (Bem. d. Ref.). *J. Meixner.*

Mazur, P. and S. R. de Groot: On Onsager's relations in a magnetic field. *Physica* 19, 961—970 (1953).

Die Onsagersche Methode zur Herleitung von Reziprozitätsbeziehungen wird auf Systeme mit stetig räumlich veränderlichem Magnetfeld und ortsabhängigen thermodynamischen Parametern angewandt. Dazu wird ein solches System in kleine Volumenelemente unterteilt, und die Ortsabhängigkeit der Parameter χ_i wird durch ihre Numerierung nach Volumenelementen beschrieben. Die Onsagersche Methode liefert dann Symmetriebeziehungen zwischen phänomenologischen Koeffizienten der Art $L_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{B}'; \mathbf{r}, \mathbf{B}) = L_{ji}(\mathbf{r}, -\mathbf{B}; \mathbf{r}', -\mathbf{B}')$, die einer Vertauschung der Parameter und der durch die Vektoren \mathbf{r}, \mathbf{r}' gekennzeichneten Volumenelemente entsprechen. Gleichzeitig muß die magnetische Induktion B durch ihren entgegengesetzten Wert ersetzt werden. Aus diesen Symmetriebeziehungen werden die Symmetrieeigenschaften der Tensoren der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit hergeleitet. Dafür erweist es sich als notwendig die energetische Isolierung von Systemen, in welchen sich elektromagnetische Erscheinungen abspielen, mit thermodynamischen Überlegungen in geeigneter Weise zu definieren. *J. Meixner.*

Gibert, René: Sur la thermodynamique des phénomènes irréversibles. *C. r. Acad. Sci., Paris* 236, 2145—2147 (1953).

Versuch, die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen aus den Differentialbeziehungen der Gleichgewichtsthermodynamik herzuleiten. *J. Meixner.*

Glansdorff, P.: Sur le minimum de la production d'entropie. *Physica* 19, 737—741 (1953).

Für die bei einem irreversiblen Prozeß in einem endlichen Zeitintervall erzeugte Entropie wird ein neues Variationsprinzip hergeleitet. Es macht nur Gebrauch von der Kontinuitätsgleichung für eine Größe, für welche eine Quelldichte existiert, setzt aber nicht Gleichgewichtsnähe oder die Gültigkeit von linearen Beziehungen zwischen Flüssen und Kräften voraus. Die Nebenbedingungen sind wesentlich verschieden von denen bei den bereits bekannten Variationsprinzipien der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. Bemerkenswert ist die Notwendigkeit, solche Variationen der Dichte zuzulassen, für welche die Kontinuitätsgleichung nicht gilt. *J. Meixner.*

Glansdorff, P.: Sur la moindre production d'entropie par transmission de chaleur. *Physica* 19, 1029—1034 (1953).

Verf. zeigt, daß die stationäre Wärmeleitungsgleichung eine Folge seines Variationsprinzips (vorsteh. Referat) ist, daß also der stationäre Zustand sein Variationsintegral zum Extremum macht. *J. Meixner.*

Spanner, D. C.: Biological systems and the principle of minimum entropy production. *Nature* 172, 1094—1095 (1953).

Diskussion einiger Schwierigkeiten in der Anwendung des Prinzips der abnehmenden Entropieerzeugung bei stationären äußeren Bedingungen auf den Alterungsvorgang biologischer Systeme und Lösungsvorschläge. *J. Meixner.*

Jacobs, P.: Sur les transformations pseudo-adiabatiques des systèmes ouverts gazeux. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 39, 94—104 (1953).

Verallgemeinerung der Adiabatangleichung für Gase und Dämpfe auf offene Systeme. *J. Meixner.*

Domenicali, Charles A.: Irreversible thermodynamics of thermoelectric effects in inhomogeneous, anisotropic media. *Phys. Review, II. Ser.* 92, 877—881 (1953).

Die phänomenologischen Gleichungen für elektrische Stromdichte und Entropiefluß in Abhängigkeit von den Gradienten des elektrochemischen Potentials und der Temperatur werden für inhomogene anisotrope Leiter aufgestellt. Die einzelnen Effekte werden kurz diskutiert. — Verf. hätte es einfacher gehabt, wenn er seine ersten beiden Gleichungen als Tensorgleichungen gedeutet und die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen für sie angesetzt hätte (Ref.). *J. Meixner.*

Verschaffelt, J. E.: Sur l'équilibre d'ensemble d'un fluide mixte. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 612—621 (1953).

Verschaffelt, J. E.: La polarisation électrique en thermomécanique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 816—837 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur le calcul de l'énergie dissipée. II. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 798—815 (1953).

Klein, G. et I. Prigogine: Sur la mécanique statistique des phénomènes irréversibles. III. Physica 19, 1053—1071 (1953).

(Teil I und II dies. Zbl. 50, 204). Für eine eindimensionale Kette linearer harmonischer Oszillatoren mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt und ihre Lösung als Funktion der Anfangsbedingungen explizit angegeben. Sie lassen sich, wie Schrödinger [Ann. der Physik, IV. F. 44, 916—934 (1914)] gezeigt hat, bei geeigneter Zeitskala in der Gestalt $y_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m(0) J_{m-n}(t)$ schreiben, wenn y_{2s+1} der Abstand der Oszillatoren s und $s+1$, vermindert um den Gleichgewichtsabstand, und y_{2s} die Geschwindigkeit des Oszillators s (beide in geeigneten Einheiten gemessen) bedeuten. $J_n(t)$ = Bessel-Funktion. Dieser einfache Ausdruck für $y_n(t)$ erlaubt, viele statistische Eigenschaften eines solchen Systems bei vorgegebener Verteilungsfunktion der Anfangswerte in allen Einzelheiten durchzurechnen. So wird die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion und ihr asymptotisches Verhalten für große t untersucht. Besonders einfache asymptotische Ergebnisse erhält man für unendliche Systeme, deren Anfangsverteilung ein Produkt unkorrelierter Verteilungsfunktionen der einzelnen Geschwindigkeiten und relativen Abstände ist. Dies bedeutet, daß bereits zu Beginn die Energie auf die verschiedenen Normalschwingungen gleich verteilt ist, während die Anfangsverteilung der Phasen nicht die Zufallsverteilung des Gleichgewichts zu sein braucht. Weiter wird gezeigt, daß eine Störung des Gleichgewichts in einem endlichen Teil des Systems asymptotisch auf die Gaußsche Verteilung hinsichtlich der Geschwindigkeiten und der Abstände mit Gleichverteilung von kinetischer und potentieller Energie abklingt. Endliche Systeme verhalten sich während hinreichend kurzer Zeiten ebenso wie unendliche Systeme. — Für die statistischen Eigenschaften der untersuchten Systeme ist wesentlich, daß die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, damit im Lauf der Zeit eine immer größere Zahl von Zufallsvariablen, welche den Anfangszustand beschreiben, auf die Verteilungsfunktion an irgendeiner Stelle Einfluß gewinnt und so die Bedingungen des central limit theorem der Statistik erfüllt sind im Gegensatz zum kontinuierlichen System (Saite) mit einer einzigen Phasengeschwindigkeit. *J. Meixner.*

Thomsen, John S.: Logical relations among the principles of statistical mechanics and thermodynamics. Phys. Review, II. Ser. 91, 1263—1266 (1953).

Nach Festlegung der Begriffe: System, Zustand, Besetzungswahrscheinlichkeit, Übergangswahrscheinlichkeit, Gleichgewicht, Entropie, Verbundenheit von Zuständen, werden die mikroskopische Reversibilität (M) als Symmetrie der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, das detaillierte Gleichgewicht (D), die Ergodenhypothese (E), der zweite Hauptsatz der Thermodynamik (S) als Satz von der Zunahme der Entropie im abgeschlossenen System und die sogenannte λ -Hypothese (L), welche eine Einschränkung für die Übergangswahrscheinlichkeiten gibt, formuliert. Dann läßt sich auf einfache Weise zeigen, daß (E), (L), (S) unter sich äquivalent sind und daß (M) äquivalent mit den beiden Aussagen (E) und (D) zusammen ist. Die mikroskopische Reversibilität ist daher eine stärkere Bedingung als der zweite Hauptsatz. *J. Meixner.*

Münster, Arnold: Statistische Schwankungen und thermodynamische Stabilität. Z. Phys. 136, 179—205 (1953).

Für die Verteilungsfunktionen der statistischen Thermodynamik wird bewiesen, daß sie sich durch Laplace-Transformationen ineinander überführen lassen und daß

sie unter Bedingungen, die mit denen für die thermodynamische Stabilität gegen kontinuierliche Änderungen äquivalent sind, für unendlich große Systeme in die Legendre-Transformation der thermodynamischen Potentiale übergehen. Die mittleren relativen Schwankungsquadrate der extensiven Parameter sind für große Systeme unter gleichen Bedingungen von der Ordnung der reziproken Systemgröße. Bei Nichterfüllung der genannten Bedingungen findet Phasenumwandlung statt; die verschiedenen Möglichkeiten ihrer statistischen Beschreibung werden diskutiert, und es wird gezeigt, daß thermodynamische Funktionen absolut instabiler Phasen überhaupt nicht vom Standpunkt der statistischen Theorie, solche metastabiler Phasen nur unter gewissen Einschränkungen definiert werden können. *J. Meirner.*

Berlin, T. H., L. Witten and H. A. Gersch: The imperfect gas. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 189—201 (1953).

Die Verteilungsfunktion des klassischen nichtidealen Gases wird mittels eines verallgemeinerten Zellenmodells berechnet, in welchem die Zahl der Teilchen in einer Zelle als statistische Variable gewählt wird. Es zeigt sich, daß dieses Modell, welches für alle Temperaturen und spezifischen Volumina durchgerechnet werden kann, auf einen kritischen Punkt führt, und daß die Isothermen im p, v -Diagramm unterhalb der kritischen Isothermen nicht analytisch vom Volumen abhängen. Diese Eigenschaften ergeben sich immer, wenn das Wechselwirkungspotential der Moleküle bei größerer Entfernung einer Anziehung, bei kleinen Entfernungen einer starken Abstoßung entspricht. Nachteile des Modells sind, daß im Kondensationsbereich der Druck nicht konstant ist, daß vielmehr der Druck eine stetige und stetig differenzierbare Funktion des Volumens mit zwei Stellen unstetiger zweiter Ableitung ist und daß die Isothermen thermodynamische Instabilität zeigen. *J. Meirner.*

Siebert, Arnold J. F.: Remarks on the theory of fusion and condensation. *Phys. Review*, II. Ser. **90**, 97—101 (1953).

Nach der statistischen Mechanik kennt man das thermodynamische Verhalten eines Körpers, wenn das Zustandsintegral $\int_0^\infty e^{-\beta E} \varrho(E, V) dE$ bekannt ist ($\beta = 1/kT$, V = Volumen, E = Energie). Dieses einfache Integral enthält noch das Volumen $\varrho(E, V) dE$ des vieldimensionalen Gesamtphasenraumes, gelegen zwischen den Energieflächen E und $E + dE$. ϱ hängt im allgemeinen in komplizierter Weise von der molekularen Wechselwirkung ab. Es wird nun die Annahme gemacht, daß ϱ verhältnismäßig einfach und analytisch von E abhängt, und gezeigt, daß dann gleichwohl die freie Energie des Körpers sich diskontinuierlich verhält, d. h. ein Schmelzpunkt existiert. In ähnlicher Weise kann man auch die Verdampfung der Flüssigkeit erhalten. Die bekannte van der Waals-Kurve und die zugehörige Tangentenkonstruktion läßt sich an Hand des betrachteten mathematischen Modells interpretieren.

L. Waldmann.

● **Herdan, G.:** Small particle statistics. An account of statistical methods for the investigation of finely divided materials. With a guide to the experimental design of particle size determinations by M. L. Smith. New York-Amsterdam: Elsevier Publishing Co. Inc.; London: Cleaver-Hume Press, Ltd. 1953. XXIII, 520 p. 70 s.

Heber, G.: Quantenstatistik für Teilchen mit einer speziellen Wechselwirkung. *Z. Naturforsch.* **8a**, 827 (1953).

Syoz, Hiro: Statistical mechanics of two dimensional lattices. *Annual Rep. sci. Works Fac. Sci., Osaka Univ.* **1** (1952), 1—18 (1953).

Es handelt sich um das Isingsche Modell zweidimensionaler Ferromagnetika. Verf. stellt zunächst einige Transformationen zusammen, welche verschiedene zweidimensionale Gittertypen miteinander verbinden, und notiert die Beziehungen zwischen den betreffenden Zustandsummen. Die Matrixmethode zur Berechnung dieser Summen wird erläutert und auf verschiedene Gittertypen angewandt. Schließ-

lich wird eine kurze vergleichende Diskussion einiger interessierender physikalischer Größen für verschiedene Gitter gegeben. *G. Heber.*

Mori, Hazime: The quantum-statistical theory of transport phenomena. II. Progress theor. Phys. 9, 473—491 (1953).

Die Blochsche Integro-Differentialgleichung, die der Theorie der metallischen Leitung zugrunde liegt, soll aus den Grundlagen der Quantenstatistik hergeleitet werden. Zunächst wird eine Verallgemeinerung der Wignerschen Phasenraum-Verteilungsfunktion vorgenommen, die der Ersetzung von ebenen Wellen durch Blochsche Bandfunktionen entspricht. Der Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Größen erfolgt durch Anwendung der Methode von Kirkwood [J. Chem. Phys. 14, 180 (1946), 15, 72—76 (1947)] zur Bildung von zeitlichen und räumlichen Mittelwerten. Mit den üblichen Näherungsannahmen gelangt Verf. dann zur Blochschen Integro-Differentialgleichung, deren einzelne Terme eingehend diskutiert werden. *G. Höhler.*

●**Devienne, F. Marcel:** Conduction thermique dans les gaz raréfiés; coefficient d'accommodation. Mém. Sci. phys. 56, 75 S. (1953).

L'A. definisce coefficiente di accomodazione a fra un gas ed un solido il rapporto: $a = (E_r - E_i) / (E_p - E_i)$ dove E_i è l'energia media di una molecola del gas che incontra il solido, E_r l'energia della molecola quando è rinviata dal solido nel gas, E_p l'energia della molecola qualora fosse in equilibrio statistico alla temperatura del solido. In base al coefficiente a , l'A. determina poi il valore della conduttività termica fra due superfici solide immerse in un gas ultrararefatto ed il salto di temperatura fra una parete solida ed il gas rarefatto ad essa aderente. Espone poi i metodi sperimentali e teorici per il calcolo di a e termina indicando altre applicazioni fisiche di quel coefficiente. *D. Graffi.*

Lauwerier, H. A.: Optimum problems in the conduction of heat in a semi-infinite solid. Appl. Sci. Research A 4, 142—152 (1953).

An der Grenzebene $x = 0$ eines halblunendlichen Körpers von der Anfangstemperatur 0 werde eine Zeit t_0 hindurch eine Temperatur T_0 oder eine Wärmestromdichte Q_0 aufrecht erhalten, darauf werde abgeschaltet und die Grenzfläche isoliert. In einem Abstände x wächst die Temperatur dann zunächst weiter bis zu einem Maximum T_m und fällt darauf wieder. In der Lösung dieser Wärmeleitungsaufgabe, die nach klassischen Formeln zu finden ist, läßt Verf. nun x und T_m vorgeschrieben sein und bestimmt die zugehörigen Werte von (t_0, T_0) oder (t_0, Q_0) . Der geringste Energieaufwand findet sich für $t_0 \rightarrow 0$. — Sorgfältige Diskussion der Formeln, Beweis einiger recht scharfer Ungleichungen. *U. T. Bödewadt.*

Zlateff, Ivan: Sur la propagation de la chaleur dans une barre se composant de deux parties de longueur variable dans des conditions linéaires aux limites. C. r. Acad. Bulgare Sci. 4, Nr. 1, 5—8 u. französ. Zusammenfassg. 8 (1953) [Russisch].

On considère une barre, se composant de deux parties A_1 et A_2 , auxquelles correspondent deux coefficients différents de conduction de la chaleur. Le point à l'abscisse constante x_0 sépare ces deux parties. Les extrémités de la barre sont en général variables. Le problème consiste à déterminer la distribution de la température $u_i(x, t)$ aux points des parties A_i ($i = 1, 2$) de la barre. On cherche à déterminer la solution du problème en représentant les fonctions u_i sous la forme des sommes des intégrales de Fourier-Poisson et des intégrales analogues aux potentiels de simple couche (potentiels calorifiques). On obtient ainsi un système d'équations intégrales de Volterra. La méthode appliquée dans le présent travail est analogue à celles dont on se sert pour résoudre les problèmes de Fourier (E. Goursat, Cours d'Analyse, Vol. III, Paris 1927, p. 316). *M. Krzyński.*

Herbeck, M.: Der Wärmeaustausch zwischen einem geheizten Band und einer Konvektionsströmung. Z. angew. Math. Mech. 33, 362—382 (1953).

Die Differentialgleichung $\varrho c_p (v, \text{grad } T) - \text{div } \lambda \text{ grad } T = 0$, ϱ = Dichte, c_p = spezifische

Wärme bei konstantem Druck, λ = Wärmeleitfähigkeit, T = Temperatur) beschreibt die Wärmeleitung in einem isolaren und stationären Geschwindigkeitsfeld w . Sie wird auf eine zur x -Achse parallele Konvektionsströmung im Halbraum $y \geq 0$ mit dem Geschwindigkeitsprofil $w_x = (\tau/\rho \nu) y$ (τ = Wandschubspannung, ν = kinetische Zähigkeit) angewandt, wenn in der (x, z) -Ebene von $x = 0$ bis $x = \infty$ die Wand $y = 0$ gleichmäßig geheizt wird. Die Berechnung der Temperatur im Gas läßt sich auf die Lösung der Differentialgleichung $\partial^2 T / \partial \xi^2 + \partial T / \partial \eta^2 = \eta \partial T / \partial \xi$ mit den Randbedingungen $T = 0$ für $\eta = \infty$, ξ beliebig und $T = T(\xi, 0)$ für $\eta = 0$ zurückführen. Die Lösung wird als Fourier-Integral dargestellt und für verschiedene Fälle genähert berechnet, so 1) $T(\xi, 0) = 0$ für $\xi < 0$, $= 1$ für $\xi > 0$ und 2) $T(\xi, 0) = 1$ für $\xi > 0$, während $T(\xi, 0)$ für $\xi < 0$ auf einer vorgegebenen Strecke praktisch auf Null abfällt; diese Strecke ist verfügbar und kann so gewählt werden, daß die Übereinstimmung mit den Meßergebnissen möglichst günstig wird. Aus der Lösung für die geheizte Halbebene läßt sich ohne weiteres die Lösung für das geheizte Band ermitteln. Die Reibungswärme und die Temperaturabhängigkeit der Stoffkonstanten (Wärmeleitfähigkeit usw.) bleiben unberücksichtigt.

J. Meixner.

Karush, W. and A. V. Martin: Thermal contraction of a split hollow cylinder. J. appl. Phys. 24, 1427—1431 (1953).

Elektrodynamik. Optik:

Melvin, M. Avramy: The new classical electrodynamics. Nature 171, 890—892 (1953).

Bemerkungen zu Arbeiten von Dirac (dies. Zbl. 43, 428; 48, 204). G. Höhler.

Hinteregger, H.: Induktionsercheinungen bei Materiebewegung in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten. III. Theoretische Grundlagen für die Erfassung der allgemeinen Fälle. Acta phys. Austr. 7, 337—354 (1953).

Stöhr, Alfred: Über gewisse nicht notwendig lineare $(n+1)$ -Pole. Arch. elektr. Übertragung 7, 546—548 (1953).

L'A. généralise quelques propriétés des $(n+1)$ -pôles linéaires aux $(n+1)$ -pôles non linéaires qui vérifient la condition de symétrie de la matrice des dérivées $\partial(q_k - q_0)/\partial i_l$ des différences de potentiel entre la borne générique d'indice k et une borne fixe d'indice 0, par rapport à l'intensité dans la borne générique d'indice l . En particulier, il montre le caractère canonique (au sens de la Mécanique analytique) de la transformation entre les tensions et les intensités d'entrée et de sortie d'un $2 \cdot 2n$ -pôle qui vérifie la condition préalable. Certaines formules sont étendues au continu pour des morceaux de matière conductrice avec distribution continue de courant à l'intérieur.

P. Puig Adam.

Emersleben, Otto: Das elektrostatische Selbstpotential äquidistanter Ladungen auf einer Kreislinie. Math. Nachr. 10, 135—167 (1953).

Verf. behandelt das im Titel angegebene Problem I. für alternierende Ladungsanordnung, II. für gleichnamige Ladungsanordnung von dem Betrage nach gleichen Ladungen. Insbesondere werden asymptotische Formeln für viele Ladungen auf dem Kreise angegeben. Auf das Feld dieser Ladungen selbst wird nicht eingegangen.

F. Penzlin.

Mazur, P. and B. R. A. Nijboer: On the statistical mechanics of matter in an electromagnetic field. I. Derivation of the Maxwell equations from electron theory. Physica 19, 971—986 (1953).

Die Verff. leiten die Maxwellschen Gleichungen aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie her, wobei als Ladungsträger Teilchen mit (beliebig vielen) punktförmigen evtl. gegeneinander beweglichen Einzelladungen fungieren. Besonderes Gewicht legen sie auf eine allgemeine, strenge und durchsichtige Behandlung der statistischen Seite des Problems, indem sie die Chapman-Enskog-Methode heranziehen. Das quantenstatistische Analogon wird nur kurz gestreift und dafür auf eine spätere Veröffentlichung verwiesen.

F. Penzlin.

Reza, Fazlollah: Deux théorèmes sur les dipôles électriques. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 429—430 (1953).

Es wird gezeigt 1. Wenn $Z(S) = P(S)/Q(S)$, S komplexe Frequenz, $S = \omega + i\sigma$ die Impedanz eines passiven Zweipoles der N. T. ist, der aus einer endlichen Zahl von reaktiven Elementen besteht, so gilt das ebenfalls von der Funktion

$$Z_n(S) = [d^n(P(S))/dS^n]/[d^n(Q(S))/dS^n].$$

2. Wenn $Z(S) = P(S)/Q(S)$, die Impedanz eines Dipols mit Verlusten ist, der nur aus zwei Typen von Elementen besteht (Resistanzen und Induktanzen oder Resistenzen und Kapazitanzen), so gilt das gleiche von der Funktion

$$Z_n(S) = [d^n(P(S))/dS^n]/[d^n(Q(S))/dS^n].$$

W. O. Schumann.

Kuh, Ernest Shiu-jen: Potential analog network synthesis for arbitrary loss functions. J. appl. Phys. **24**, 897—902 (1953).

Für den Entwurf eines Filters mit vorgeschriebenem Durchlaßbereich ist ein Verfahren bekannt, bei dem die komplexe Frequenzebene oder ein konformes Bild derselben in geeigneter Weise mit Ladungsträgern besetzt wird, deren Potentialfeld mit der geforderten Übertragungsfunktion in Zusammenhang steht, dergestalt daß die Orte der Ladungsträger die Nullstellen und Pole der Übertragungsfunktion sind. Verf. zeigt, wie das Verfahren modifiziert werden kann, um die Lage der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion eines Vierpols festzulegen, wenn dessen Dämpfung eine vorgeschriebene Abhängigkeit von der Frequenz approximieren soll.

A. Stöhr.

Miller, K. S. and R. J. Schwarz: On the interference of pulse trains. J. appl. Phys. **24**, 1032—1036 (1953).

Wenn in einer Schaltung gleichzeitig zwei Impulsreihen auftreten, wobei die erste Reihe z. B. aus rechteckigen Stromstößen von der zeitlichen Länge p_1 besteht, die sich nach der Zeit T_1 regelmäßig wiederholen, und bei der zweiten Reihe entsprechend p_2 und T_2 gilt, ist die Frage nach der Zeit der Überlappung von Pulsen der beiden Reihen wichtig. Die Lage der beiden Reihen ist durch die zeitliche Verschiebung s entsprechender benachbarter Pulse beider Reihen in einem bestimmten Zeitmoment (z. B. $t = 0$) gegeben (Anfangsphase genannt). Die Autoren stellen folgende Fragen: a) Für welchen mittleren Bruchteil der Zeit sind die Pulse zweier Reihen koinzident, bei gegebener Anfangsphase? b) Für welchen mittleren Bruchteil der Zeit sind die Pulse zweier Reihen koinzident, wenn die Anfangsphase zufallsmäßig schwankt? c) Für welchen mittleren Bruchteil der Zeit sind die Pulse zweier Reihen koinzident, aber während eines Zeitintervalls, das einer bestimmten Größe gleich ist oder sie überschreitet, wenn die Anfangsphase fest ist? d) Wie c), wobei aber die Anfangsphase statistisch schwanken soll. e) Wie können die benutzten Methoden dazu dienen, diese Fragen bei mehr als zwei Pulsreihen zu beantworten? — Die Aufgabe wird gelöst mit der Theorie der linearen Kongruenzen, die aus der Zahlentheorie stammt. Für Genaueres muß auf die Arbeit verwiesen werden.

W. O. Schumann.

Preston, Glenn W.: The equivalence of optimum transducers and sufficient and most efficient statistics. J. appl. Phys. **24**, 841—844 (1953).

Pryce, M. H. L.: The diffraction of radio waves by the curvature of the earth. Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. **2**, 67—95 (1953).

Statt der üblichen Kugelkoordinaten R, θ, Φ werden angenäherte Cartesische (x, y) , in der horizontalen Ebene, kombiniert mit einer logarithmischen Vertikalkoordinate (z) . Da Terme höherer Ordnung als $1/a$ (a Erdradius) vernachlässigt werden, ist die Methode auf Entfernungen bis zu einigen 100 km beschränkt. Aus den (auf diese Koordinaten umgeschriebenen) Maxwell'schen Gleichungen werden die magnetischen oder elektrischen Feldgrößen eliminiert. Für die mit dem Faktor $(R/a)^{3/2}$ multiplizierten Feldgrößen ergibt sich eine Art Wellengleichung, die jedoch einen z proportionalen Term enthält. Durch Anpassung des Faktors kann auch eine mit z lineare Variation des Brechungsindex im Luftraum berücksichtigt werden („effektiver Erdradius“). Nun wird nach x und y eine Fourier-Transformation vorgenommen, und zwar für Feld- und Ladungsgrößen. (Das gibt für jede Fourier-Komponente statt einer punktförmigen Quelle eine über die x, y -Ebene „verschmierte“.) Für jede Fourierkomponente (α, β) ergibt sich so eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$d^2u/dz^2 + (k_1 - \alpha^2 - \beta^2 + k_2 z) u = t(z)$$

[$t(z)$ ist im wesentlichen eine Diracsche Funktion $\delta(z - h)$, wo h die Höhe des Senders]. Im Erdraum ist die Gleichung demnach homogen, im Luftraum wird die Lösung der inhomogenen

Gleichung aus zwei unabhängigen Lösungen u , v der homogenen erhalten. (Als Koeffizienten treten dabei Integrale auf, die leicht berechnet werden können, da sie eine δ -Funktion enthalten.) Die homogene Gleichung wird auf $d^2u/d\xi^2 = \xi \cdot u$ transformiert. Lösungen sind die Airyschen Integrale Ai und Bi . Wählt man als u und v unabhängige Kombinationen davon, die den Randbedingungen genügen, so hat man die Lösung für jede Fourier-Komponente (α , β). Daraus erhält man durch Doppelintegration über α , β die endgültige Lösung. Für die Anwendung wird das Doppelintegral durch Transformation der α , β in Polarkoordinaten in ein einfaches verwandelt. Diese Integrale gehen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu einem großen positiven Wert, sie können ohne merklichen Fehler von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden. Nach Erweitern des komplexen Integrationswegs zu einer geschlossenen Kontur wird in üblicher Weise das Integral aus den Residuen bestimmt. Die Pole des Integranden ergeben sich numerisch aus den Daten der Erde und den Eigenschaften der Airy-Funktionen. (Für sehr kurze Wellen entfällt der Erdeinfluß, dann sind allein die Wurzeln des Airy-Integrals bestimmend.) Die Lösung im Schattenraum ist also eine gut konvergente Residuenreihe, die der Watsonschen Lösung des exakten Kugelproblems entspricht. Es wird nachgewiesen, daß die Lösung im Lichtraum auf die direkte und reflektierte Welle der geometrischen Optik hinauskommt. Die angegebene Methode ist für den elektrischen wie den magnetischen Dipol, also für Vertikal- und Horizontalpolarisation brauchbar. *K. Raver.*

Marshall, J. S. and Walter Hitschfeld: Interpretation of the fluctuating echo from randomly distributed scatterers. I. Canadian J. Phys. **31**, 962—994 (1953).

Das Radar-Echo von zufällmässig räumlich verteilten Streuquellen (z. B. Regentropfen) ist „inkohärent“. Die Zufallsschwankungen um den Mittelwert bedeuten eine wichtige Begrenzung der Genauigkeit der erreichbaren Information. Diese Schwankungen werden theoretisch untersucht, um das Ausmaß dieser Begrenzung festzustellen und um die Verbesserungen zu diskutieren, die durch eine Mittelung oder eine Modifikation der Methode der Aussendung der Pulse und der Registrierung auf dem Schirm der Braunschen Röhre möglich ist. Wenn k voneinander unabhängige Intensitätsmessungen gemittelt werden, wird der Schwankungswert um den Faktor $1/k$ reduziert. Unabhängige Messungen können bei Regentropfen durch einzelne Pulse geliefert werden, die bei $\lambda = 10$ cm nach Zeitintervallen von 0,01 bis 0,02 sek ausgesendet werden, so daß je sek 50 bis 100 unabhängige Daten einer beitragenden Schicht geliefert werden können. Die Dicke dieser Schicht, die ein zur Zeit $t = 0$ ausgesendetes Signal zur Zeit t liefert, ist $h = \tau \cdot c$, wenn τ die Impulsdauer ist. Die Zahl der unabhängigen Daten kann erheblich vergrößert werden, wenn die aufeinanderfolgenden Pulse in der Hochfrequenz etwas voneinander abweichen, um etwa $1/\tau$, wenn τ die unveränderte Impulsdauer ist. Auch der Empfang des Echos jedes Pulses durch mehrere räumlich getrennte Antennen vergrößert den Betrag der unabhängigen Informationen. Die Mittelung der empfangenen Signale kann z. B. einfach durch eine Klassifikation nach ihrer Größe und, indem der Bruchteil gezählt wird, der über einer gewissen Schwelle liegt, durchgeführt werden. Besonders einfach ist es, viele unabhängige Signale bei einem Braunschen Rohr übereinander zu schreiben, wobei die hellsten Stellen des Schirmes den Spitzen der Verteilungskurve entsprechen. Hierzu sind keine quadratischen Empfänger brauchbar, dagegen lineare oder logarithmische Empfänger. *W. O. Schumann.*

Wallace, P. R.: Interpretation of the fluctuating echo from randomly distributed scatterers. II. Canadian J. Phys. **31**, 995—1009 (1953).

Verf. bringt die mathematischen Beweise für die von Marshall und Hitschfeld mitgeteilten Tatsachen (vgl. Teil I, vorsteh. Ref.). *W. O. Schumann.*

Wait, James R.: The fields of a line source of current over a stratified conductor. Appl. sci. Research, B **3**, 279—292 (1953).

Chandrasekhar, S.: Theoretical interpretation of the optical activity of quartz. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **37**, 468—484 (1953).

Nach einem Überblick über die bisher durchgeführten theoretischen Untersuchungen verschiedener Autoren über das Drehvermögen des Quarzes für polarisiertes Licht sowie über die Doppelbrechung des Quarzes für Ausbreitung des Lichtes in Richtung bzw. senkrecht zur Richtung der optischen Achse gibt Verf. zunächst an, auf Grund welcher Annahmen er das Problem der optischen Aktivität des Quarzes behandelt. Die Struktur des Quarzes hat eine dreizählige Schraubachse. Jede Zelle besteht aus drei SiO_2 -Tripeln in gleichem Abstand längs der zur Si-O-O -Ebene senkrechten Achse, jedes Tripel aber um 120° gegen die benachbarten gedreht. Es ist aber notwendig anzunehmen, daß die 3 SiO_2 -Gruppen ein „Verbundsystem“ bilden, also nicht voneinander unabhängig behandelt werden dürfen, da sonst das physikalische Verhalten bez. Lichtdrehung nicht verständlich ist. Es wird gezeigt, daß die charakteristischen Schwingungsfrequenzen der individuellen Einheiten in 2 Komponenten aufspalten, die wegen der Kopplung benachbarter „Ganzheiten“ in dem Kristall sich voneinander unterscheiden. Verf. beschreibt das zugrunde gelegte Quarzmodell und gibt die theoretische Behandlung für rechts- und links-zirkular polarisiertes Licht bei Lichtausbreitung längs der optischen Achse sowie senkrecht zur optischen Achse. Für beide Fälle besitzen die Formeln der Rotationsdispersion die

gleiche Form. Es folgt eine Berechnung der Größe der Doublett-Aufspaltung (28 Å) der „charakteristischen“ Wellenlänge der Formel für den Brechungsindex sowie Berechnung des Verhältnisses des Drehvermögens längs der und senkrecht zur optischen Achse, das sich gleich 2 ergibt. — Diskussion der Resultate und Zusammenfassung.

J. Picht.

Bhatia, A. B. and W. J. Noble: Diffraction of light by ultrasonic waves. I. General theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **220**, 356—368 (1953).

Nach einem allgemeinen Überblick über bereits vorliegende einschlägige Arbeiten, ihre Methoden und Gültigkeitsgrenzen wird ein „Streuindex“ τ (pro Volumen des streuenden Mediums) definiert. Mit Einfallswelle $\mathfrak{E}(t, x, y, z) = \mathfrak{B} \exp[i(\omega t - \mathfrak{k} \cdot \mathbf{r})]$ ergibt sich bei Berücksichtigung der Streuung und Vielfachstreuung die Integralgleichung (mit Integration über das ganze Medium)

$$(1) \quad \mathfrak{E}(t, x, y, z) = \mathfrak{B} \exp[i(\omega t - \mathfrak{k} \cdot \mathbf{r})] + \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div} \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{r} \tau \left(t - \frac{r}{c}, x_1, y_1, z_1 \right) \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{c}, x_1, y_1, z_1 \right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1.$$

Darin wird — nach plausibler Begründung — für den Streuindex angesetzt:

$$\tau(t, x) = \tau_0 [1 + \Delta \cos(\Omega t - Kx)] = \tau_0 [1 + \frac{1}{2} \Delta \exp\{i(\Omega t - Kx)\} + \frac{1}{2} \Delta \exp\{-i(\Omega t - Kx)\}]$$

(Δ = Amplitude der Dichtewelle/mittlere Dichte des Mediums und $K = 2\pi/\Lambda$) für fortschreitende Wellen. [Für stehende Wellen: $\tau(t, x) = \tau_0(1 + \Delta \cos \Omega t \cos Kx)$.] Der Einfachheit wegen wird angenommen, daß die einfallende Welle eine parallel zur x, y -Ebene, der Einfallsebene (also $\mathfrak{E} = 0$), polarisierte ebene Welle ist, so daß $\mathfrak{E}_z(t, x, y, z) = \mathfrak{E}_z(t, x, y)$ auch für die Sekundärwellen und die mehrfach gestreuten Wellen ist. Die Integralgleichung wird im Innern des Mediums mit dem Ansatz

$$E_z(t, x, y) = \sum_{l, m} N_{l, m} \exp[i(\omega_{l, m} t - p_l x - q_m y)]$$

zu lösen versucht, wo l, m Parameter sind. Das Streuungsmedium liegt zwischen $y = 0$ und $y = d$ und wird in x, z -Richtung unendlich ausgedehnt angenommen. Anschließend wird ein für die weitere Behandlung wesentlicher Integralausdruck diskutiert. Es werden dann für die verschiedenen parameterabhängigen Größen des zur Lösung der Differentialgleichung angegebenen Ansatzes Beziehungen abgeleitet, die sie zu berechnen gestatten. Es ergeben sich so die Frequenzen und Richtungen der gebeugten Spektren sowie drei unendliche Reihen linearer algebraischer Gleichungen für die Amplituden $N_{l, m}$ und andere Unbekannte. In ähnlicher Weise werden die gebeugten Spektren vor dem streuenden Medium berechnet, indem die zuvor gefundene Lösung auf der rechten Seite von (1) eingesetzt wird und die einfallende Welle zu dem Resultat hinzugefügt wird. Verf. findet so für die Frequenzen und Richtungen der Beugungsspektren

$$\omega_l = \omega + l \cdot \Omega \text{ mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ und } \sin \Phi_l = c(k \sin \vartheta + l K)/(\omega + l \Omega),$$

wo Φ_l den Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung der gebeugten Welle l -ter Ordnung und der Lichteinfallrichtung bezeichnet. Die Ergebnisse stimmen mit denen von Brillouin sowie von Raman und Nath sowie mit den experimentellen Ergebnissen von Bergmann, Villard und andern überein. — Es folgt ein mathematischer Anhang über Integralbeziehungen.

J. Picht.

Bhatia, A. B. and W. J. Noble: Diffraction of light by ultrasonic waves. II. Approximate expressions for the intensities and comparison with experiment. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **220**, 369—385 (1953).

Es werden die Untersuchungen des Teiles I fortgesetzt. Insbesondere wird das im ersten Teil erhaltene dreifach unendliche System algebraischer Gleichungen näher behandelt, und es werden Näherungslösungen für diese gefunden. Es werden weiter die Verhältnisse untersucht für den Fall, daß $\Delta \cdot \Lambda^2/\lambda^2 \ll 1$, ≈ 1 und $\gg 1$ ist. Für die beiden letzten Fälle sind die Lösungen komplizierter, doch zeigt es sich, daß in diesem Falle eine endliche Zahl von Gleichungen genügt. Die theoretisch erhaltenen Ergebnisse zeigen die besonderen Charakteristika der experimentellen Ergebnisse sowohl bezüglich der Anzahl der erhaltenen Spektren als auch bezüglich der auftretenden Unsymmetrien.

J. Picht.

● **Morgan, Joseph: Introduction to geometrical and physical optics.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953. XI, 450 p. 42 s. \$ 6.—.

Das Buch ist aus Vorlesungen für das undergraduate curriculum an der Texas-Universität entstanden und soll dem Lernenden als Hilfe dienen. Die ersten Teile geben einen kurzen Abriß der geometrischen Optik und der Theorie der optischen Instrumente. Ausführlich werden in den folgenden Abschnitten die Interferenz und

Beugung sowie ihre praktische Anwendung besprochen; hier sind die verschiedenen Auffassungen (Emanation, Wellenlehre, elektromagnetische Theorie) miteinander verglichen. Weitere Abschnitte behandeln die Erklärung der Dispersion, Verschluckung und Streuung, sowie die Polarisierung. In einer ausführlichen Darstellung wird die Entstehung der Spektren nach der Quantenlehre behandelt. Zum Schluß wird die Wellen- und Partikeltheorie für Licht und Stoff besprochen, dabei auch die Entdeckungen und Ableitungen der letzten Jahrzehnte (de Broglie, Heisenberg, Schrödinger usw.) erwähnt. Soweit keine genaueren Ableitungen gegeben werden können, wird der Lernende auf weiteres Schrifttum verwiesen. Bemerkt sei noch, daß am Schluß jedes Abschnittes eine Anzahl Übungsaufgaben steht.

H. Boegehold.

Suchy, Kurt: Schrittweiser Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik in inhomogenen anisotropen absorbierenden Medien. II. Lösung der Gleichungen für Wellennormale und Brechungsindex durch WBK-Näherung. Strahlenoptische Reflexion und Alternation. Ann. der Physik, VI. F. 13, 178—197 (1953).

In Fortsetzung der früheren Untersuchung (dies. Zbl. 48, 207) werden die dort erhaltenen Gleichungen für Wellennormale und Brechungsindex durch die sogenannte WBK-Näherung gelöst. Zunächst wird eine Gegenüberstellung der für den Eikonalgredienten n unter verschiedenen Annahmen erhaltenen Ausdrücke (n_B = rein wellentheoretisch, n_K = mit Berücksichtigung einer „Krümmungsbedingung“, n_P = mit Berücksichtigung einer „Polarisationsbedingung“) — auch graphisch — gegeben. Wird in der Eikonaldyade

$$M_P = [n + \nabla/i k_0] \cdot [n I - I n]_{c_k = \text{const}, g_k = \text{const}}$$

das Glied $(\nabla/i k_0) \cdot [n I - I n]_{c_k, g_k}$ fortgelassen, so ergibt sich die „Strahlendiyade“, die gleichfalls eine Näherung n_s für n darstellt. Als Näherungsverfahren für den Übergang zur reinen Strahlenoptik wird die Iterationsmethode kurz diskutiert, sodann die Störungsmethode näher besprochen. Anschließend wird die WBK-Methode zur Lösung der Wellennormalengleichung angewandt und der asymptotische Charakter der WBK-Methode diskutiert. Es werden weiter die beiden möglichen Ausbreitungsarten einer Welle behandelt, von denen der Verf. die eine als „Reflexion“, die andere als „Alternation“ bezeichnet. Auch die WBK-Lösung der Brechungsindex-Gleichung wird durchgeführt. Es werden weiter Divergenzzentren und die Reflexionspunkte durch die sie kennzeichnenden Bedingungsgleichungen untersucht. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen im Wellengleichungssystem das Glied $\nabla \cdot \nabla$ unterdrückt werden darf bzw. was seine Vernachlässigung in den anderen Fällen physikalisch bedeutet. Endlich wird der Näherungsgrad der üblichen Eikonalgleichung bestimmt.

J. Picht.

Bertolini, Fernando: Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. — Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 26—28 (1953).

Verf. zeigt, daß die Voraussetzungen eines von L. Tonelli über das Funktional $J(P) = \int_L f(P) ds$ (vgl. L. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vol. II, Bologna 1923, S. 56 ff.) aufgestellten Satzes vermindert werden können. Es genügt zu fordern, daß $f(P)$ halbstetig nach unten ist. — Als Anwendung dieses Funktional wird der Weg eines Lichtstrahls in einem durchlässigen Medium untersucht und die Existenz eines nicht-erhellten Gebietes einer punktförmigen Lichtquelle nachgewiesen.

W. Quade.

Hagen, G. B.: Über die Konstruktion von Elektronenbahnen in Potentialfeldern. Ann. der Physik, VI. F. 13, 257—284 (1953).

Die Genauigkeit der zeichnerischen Bahnermittlung auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes wird an Hand einer numerisch durchgerechneten Elektronenbahn abgeschätzt.

W. Glaser.

Combe, René et Marc Feix: Mouvement d'un électron dans un onduleur magnétique. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1318—1320 (1953).

Die relativistische Elektronenbewegung in einem durch $B_x = 0$, $B_z = 0$ und $B_y = B \cos \gamma x$ ($B = \text{konst.}$) gegebenen Magnetfeld mit einer in der x -Richtung liegenden Anfangsgeschwindigkeit wird bestimmt. Die Differentialgleichung für die x -Koordinate des Elektrons stimmt mit der Pendelgleichung überein und kann daher durch ein elliptisches Integral erster Art gelöst werden. *W. Glaser.*

Glaser, Walter und Peter Schiske: Bildstörungen durch Polschuhasymmetrien bei Elektronenlinsen. Z. angew. Phys. **5**, 329—339 (1953).

Es wird zunächst das Potentialproblem behandelt für den Fall, daß zwei zur z -Achse annähernd rotationssymmetrische, mit geringem Luftzwischenraum hintereinander stehende Polschuhe von schwach elliptischer Form der Bohrung benutzt werden, von denen noch angenommen wird, daß 1. ihre Achsen gegeneinander parallel versetzt sind, gleichzeitig 2. der zweite Polschuh um eine beliebige Gerade der achsenkrechten Ebene schwach gedreht ist, wobei diese Drehung durch eine um die y - und eine um die x -Achse ersetzt gedacht werden kann. Es werden hierfür die Gleichungen der Innenflächen F_1 und F_2 der beiden Polschuhe aufgestellt. Die gesuchte Lösung der Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ soll dann die Randwerte $+V$ bzw. $-V$ auf F_2 und den zugehörigen Stirnflächen S_2 des Polschuhs 2 bzw. auf F_1 und S_1 besitzen. Das Feld selbst folgt aus $\mathcal{B} = -\text{grad } \varphi$. Zur Bestimmung von φ wird $\varphi = \chi(r, z) + \mu(r, z, \vartheta)$ angesetzt, wo $\chi(r, z)$ Lösung von $\Delta\varphi = 0$ für das „ungestörte“, also das rotationssymmetrische Problem ist. Wegen $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\chi = 0$ ist auch $\Delta\mu = 0$. Für $\Delta\chi = 0$ ist die Lösung für den Fall, daß im Spalt zwischen den beiden Polschuhen das Potential von $-V$ auf $+V$ linear ansteigt, bekannt (nach S. Bertram). Für μ wird ein durch die „Störung“ der Polschuhform nahegelegter Ansatz gemacht, nach dem die Randbedingungen für μ diskutiert sind. Der Ansatz von μ enthält neue Funktionen $\psi(r, z)$, $w(r, z)$, (r, z) mit voneinander verschiedenen Randbedingungen. Die zugehörigen Differentialgleichungen werden anschließend behandelt und gelöst. Es wird weiter die Reihenentwicklung von $\varphi(x, y, z)$ mit Benutzung der Lösungen von ψ , ω , λ angegeben und hieraus die x - und y -Komponenten des zugehörigen Magnetfeldes berechnet. Ferner: Differentialgleichung der Elektronenbahnen in dem gestörten Problem, deren Lösung und Bestimmung der störbedingten Bildaberrationen, insbesondere des axialen Astigmatismus. *J. Picht.*

Quantentheorie:

Park, David: Scattering theory. A second Note. Amer. J. Phys. **21**, 540—541 (1953).

Husimi, Kôdî and Masubiko Ôtuka: Miscellanea in elementary quantum mechanics. III. Progress theor. Phys. **10**, 173—190 (1953).

(Teil I und II, dies. Zbl. **50**, 220). Zwischen dem Grundzustand eines quantenmechanischen Systems und der Heisenbergschen Unschärferelation besteht eine enge Beziehung. Verff. führen Varianten der Unschärferelation vor, in welche sie ortsabhängige Zusatzglieder eingebaut haben, und geben eine Methode zur Bestimmung der Zustände einer Anzahl von Systemen, z. B. des harmonischen Oszillators, des Wasserstoffatoms, des rotierenden Oszillators. Sie formulieren zusammenfassend ein Theorem, das ihre Behandlungsweise von dem allgemeinen Standpunkt beleuchtet, die Eigenfunktion des Grundzustandes der Schrödingergleichung vorzugeben und daraus das Potential zu bestimmen, anstatt umgekehrt. Das Theorem hat zur Folge, daß die Eigenfunktion des Grundzustandes zusammen mit allgemeinen Voraussetzungen auch alle angeregten Zustände eindeutig bestimmt. Diese erstaunliche Tatsache rührt daher, daß nicht ein beliebiger hermitescher Operator bestimmt werden muß, sondern der Schrödingersche Hamiltonoperator. Weiterhin behandeln sie ein Potential mit symmetrischen Doppelminima und eindimensionale Beispiele von Energiebandpotentialen. Sie schließen mit der Untersuchung gewisser Verschiebungsoperatoren im Wasserstoffproblem, welche auf die Schrödinger-Infeldsche Leitermethode zur Gewinnung von Eigenfunktionen hinführt. *W. Kofink.*

Gell-Mann, M. and M. L. Goldberger: The formal theory of scattering. Phys. Review, II. Ser. **91**, 398—408 (1953).

Die bekannten Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für Streu-

probleme (samt *S*-Matrix-Formalismus) werden aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung abgeleitet, wobei das sog. adiabatische Einschalten der Wechselwirkung besonders sorgfältig diskutiert wird. Als Beispiele werden behandelt: Die Streuung eines Teilchens an 2 Potentialen (z. B. Coulomb- und Kern-), der Photoeffekt und der „pick up process“, d. h. der Einfang eines Neutrons durch ein an ein Molekül gebundenes Proton. Zum Schluß werden Theorien betrachtet, bei denen die Gesamtenergie durch die Wechselwirkung verändert wird, oder i. a. W. in denen die Teilchen durch die Wechselwirkung eine zusätzliche Selbstenergie bekommen.

E. Freese.

Corinaldesi, E.: On the scattering theory of relativistic equations. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **10**, 1673—1680 (1953).

Der Verf. behandelt im Anschluß an eine Reihe von Untersuchungen von G. Parzen [dies. Zbl. **40**, 130; **42**, 312; *Phys. Review*, II. Ser. **80**, 355 (1950)] das Verhalten der Phasenverschiebung bei der hochenergetischen Streuung nach der Diracschen Theorie. Während Parzen den Fall untersucht, daß das Potential $V(r)$ in $r = 0$ keinen Pol besitzt und in großen Abständen stärker als das Coulombpotential abfällt, wird vom Verf. der entgegengesetzte Fall erörtert, in dem $V(r)$ gerade im Ursprung einen Pol aufweist und ebenfalls in großen Abständen stärker als $1/r$ absinkt. Er zeigt, daß die Phasenverschiebung wie $\chi_{-1} \ln k$ für $k \rightarrow \infty$ wächst, wobei χ_{-1} das Residuum des Potentials im Ursprung $r = 0$ bedeutet. Diese Untersuchungen zeigen, daß bei relativistischen Energien die Verhältnisse von denen bei der Streutheorie nach der Schrödingergleichung abweichen.

P. Urban.

Mullin, Charles J.: Solution of the wave equation near an extremum of the potential. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 1323—1324 (1953).

Payne, W. T.: A geometric approach to nonrelativistic spin theory. *Amer. J. Phys.* **21**, 621—628 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **46**, 437) gibt Verf. eine geometrische Formulierung der Paulischen Spintheorie.

G. Höhler.

Winogradzki, Judith: Contribution à la théorie des grandeurs physiques attachées aux particules de spin $1/2$. *Ann. de Physique*, XII. Sér. **8**, 763—812 (1953).

Verf. studiert ohne Benutzung der Diracschen Wellengleichung die mit dem Spin $1/2$ zusammenhängenden physikalischen Größen, deren Operatoren nur auf die Spinvariable wirken und gegenüber eigentlichen Lorentztransformationen invariant sind. Ein Grundpostulat, von dem sie bei der Herleitung der allgemeinen Spinorform der Dichten der Mittelwerte von physikalischen Größen ausgeht, ist, daß diese Dichten Tensoren sind. Aus der Form der Dichten zeigt sie, daß man die Observablen in 8 Familien einteilen kann, deren Elemente sich nur durch Parameterwerte unterscheiden. Die Struktur der Operatorensgesamtheit, die zu den Observablen gehört, läßt sich danach sofort bestimmen. Sie sind jedoch voneinander nicht unabhängig. Ihre Strukturformeln zeigen, daß man jede solche Größe von ungeradem Rang in 2 vom ersten Rang und jede von geradem Rang in 2 vom Rang Null und eine antisymmetrische vom zweiten Rang zerlegen kann. Geeignete Basis einer solchen Zerlegung ist eine Gesamtheit physikalischer Größen, deren Operatoren die Basis eines Systems von hyperkomplexen Zahlen sind. Auf diese Weise kommt Verf. aus sehr allgemeinen Voraussetzungen zu den Diracmatrizen für die Spinbeschreibung zurück. Aus der allgemeinen Spinorschreibweise der Dichten gewinnt sie schließlich einige bilineare und quadratische Relationen zwischen den Dichten, die ein wenig spezialisiert in die sogenannten Pauli-Kofink-Relationen übergehen.

W. Kofink.

Takahashi, Yasushi: On the gauge invariancy and the structure of elementary particle. *Progress theor. Phys.* **10**, 366—367 (1953).

Within the framework of quantum electrodynamics a connection is shown between the vacuum polarization current and the vacuum expectation value of the spur of the energy-momentum tensor. Dimensional analysis shows that the photon self-energy should vanish.

J. Rayski.

Pratelli, Aldo M.: Leggi integrali del campo di Proca-Yukawa nell'interpretazione di Bopp. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **2**, 550—558 (1953).

Verallgemeinerung einer im Grundsätzlichen von der Elektrodynamik her

bekannten Integralformulierung der Feldgesetze auf den Fall von Feldern, die zu Partikeln mit Ruhmasse gehören (Proca-Kemmer, Mie-Bopp). *F. L. Bauer.*

Petiau, Gérard: Sur une nouvelle théorie des corpuscules de spin quelconque et son application au calcul des sections efficaces de diffusion coulombienne. *J. Phys. Radium* **14**, 501—509 (1953).

Ausgehend vom Lubanskischen Ergebnis in der Theorie der Spinwellengleichungen, daß der Zustand höchsten Spins und kleinster Masse durch totalsymmetrische Fusion der Wellenfunktionen gekennzeichnet ist, gibt Verf. den zugehörigen symmetrisierenden (Projektions-)Operator explizit an. Anwendung auf den Wirkungsquerschnitt der Streuung zweier Teilchen beliebigen Spins aneinander.

F. L. Bauer.

Petiau, Gérard: Sur le calcul de la diffusion des corpuscules de spin $\hbar/2$ par un potentiel pseudoscalaire coulombien. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 2303—2305 (1953).

Das Massenglied einer Diracgleichung wird ergänzt durch einen pseudo-skalaren, und zwar (Spezialisierung eines allgemeineren Ansatzes des Verf., dies. Zbl. **45**, 135) mit $1/r$ gehenden Term. Es wird die Streuung einer ebenen monochromatischen Welle durchgerechnet.

F. L. Bauer.

Silveira, Adel da: Note on the non-relativistic approximation for particles of spin $3/2$. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **25**, 197—199 (1953).

Verf. zeigt mit Hilfe der Methode von Foldy und Wouthuysen (dies. Zbl. **39**, 226), daß die nichtrelativistische Näherung der Theorie von Pauli und Fierz (dies. Zbl. **23**, 430) für Teilchen von Spin $3/2$ mit der von Tiomno [Centro Brasil. Pesq. Fis., Notas Fis., n° 8 (1952)] angegebenen nichtrelativistischen Näherung der Theorie von Rarita und Schwinger (dies. Zbl. **26**, 287) übereinstimmt. *F. Penzlin.*

Koppe, H.: The quantum radiation of a given current. *Amer. J. Phys.* **21**, 548—550 (1953).

Der Strom wird als vorgegebene Quelle des quantisierten Strahlungsfeldes angesehen. Verf. führt die Berechnung der ausgesandten Strahlung im Heisenbergbild durch.

G. Höhler.

Costa de Beauregard, Olivier: Sur l'introduction de la théorie du photon de M. L. de Broglie dans l'électromagnétisme quantique de Schwinger. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 2215—2217 (1953).

Einer Übertragung des Schwinger-Dyson'schen Vorgehens auf die de Broglie'schen Spinwellengleichungen bereitet das Auftreten des Viererstroms in den zugrunde liegenden Gleichungen vom Typus der Dirac'schen gewisse Schwierigkeiten. Eine Maßnahme zu ihrer Beseitigung wird vorgeschlagen.

F. L. Bauer.

Kita, Hideji: On the solution of the equation of motion. *Progress theor. Phys.* **10**, 231—232 (1953).

Es wird gezeigt, daß die von Yang und Feldman (dies. Zbl. **38**, 407) definierten Operatoren $\psi_{in}(x)$ usw. nicht identisch mit den Wechselwirkungsoperatoren $\psi_w(x)$ sind: In den Integralgleichungen für die Feldoperatoren der Heisenbergdarstellung müssen als inhomogenes Glied die Operatoren ψ_{in} , nicht aber die ψ_w , auftreten.

E. Freese.

Kilmister, C. W.: A new quaternion approach to meson theory. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **55**, 73—99 (1953).

The ideas of quaternion algebra are extended to the algebra of E -numbers. An element f of this algebra can be written as $f = A + B E_5 + c^\mu E_\mu + D^\mu E_{\mu 5} + \frac{1}{2} H^{\mu\nu} E_{\mu\nu}$. An involution $f \rightarrow f^c$ is defined by: $A \rightarrow -A$, $D_\mu \rightarrow -D_\mu$, $H_{\mu\nu} \rightarrow -H_{\mu\nu}$. This involution is invariant under the group G_6 , the group which leaves a 4-space $S_4(E_1, E_2, E_3, E_4)$ invariant. In the application S_4 is interpreted as space-time and the tensors in V_4 are considered as spin-space tensors. The wave equation is $\Sigma E_\mu \partial_\mu \psi = \kappa \psi$, where ψ is an E -number satisfying $\psi = \pm \psi^c$. It is shown that

this equation gives the field equations for particles of spin 0 and 1. Using the algebra of the linear transformations of the elements f (the double frame) a wave equation describing mesons is obtained. These equations differ from the usual particle formulation.

J. Haantjes.

Mugibayashi, Nobumichi and Mikio Namiki: Perturbation theory of relativistic eigenvalue problem. Progress theor. Phys. **10**, 108—109 (1953).

Salpeter hatte in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **45**, 225) eine störungstheoretische Behandlung des relativistischen Eigenwertproblems für zwei Spin-1/2-Teilchen beschrieben, bei denen die ungestörte Wechselwirkung momentan wirksam vorausgesetzt ist. Die Verff. geben eine einfache (sich im wesentlichen an die übliche Schrödingersche Theorie anschließende) Methode der Störungsrechnung an, bei der diese Voraussetzung nicht notwendig ist und auch äußere Felder mit berücksichtigt werden können. Die Salpetersche Methode ist ein Spezialfall hiervon. *H. Kummel.*

Baumann, Kurt: Die relativistische Beschreibung von Bindungszuständen. Acta phys. Austr. **8**, 4—15 (1953).

„Bericht“.

Goldstein, Jack S.: Properties of the Salpeter-Bethe two-nucleon equation. Phys. Review, II. Ser. **91**, 1516—1524 (1953).

Die Salpeter-Bethe-Gleichung für 2 gebundene Teilchen wird unter der Annahme gelöst, daß die Gesamtenergie der beiden gebundenen Teilehen Null ist, während die Kopplungskonstante g als Eigenparameter behandelt wird. Ergebnis: Es gibt für jede Wahl von g eine Lösung. Da es aber physikalisch bei richtiger Wahl von g zur Energie Null überhaupt keine Lösung geben kann, wird die Lösungsmannigfaltigkeit durch Normierungsbedingungen eingeschränkt. Allerdings ohne ein physikalisch vernünftiges Ergebnis zu liefern. *E. Freese.*

Katayama, Yasuhisa: Theory of the interactions with higher derivatives and its application to the non-local interaction. Progress theor. Phys. **10**, 31—56 (1953).

Der Verf. konstruiert mit Hilfe einer Potenzentwicklung nach der Kopplungskonstanten die Hamiltonfunktion für Feldtheorien mit höheren Ableitungen der Feldvariablen in der Lagrangefunktion. Der Zusammenhang mit der orthodoxen Quantisierung nach Heisenberg und Pauli wird diskutiert. *G. Källén.*

Rzewuski, J.: Differential conservation laws in non-local field theories. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 784—802 (1953).

Verf. untersucht Feldtheorien, die sich aus einem Variationsprinzip:

$$(*) \quad \delta W = \delta \sum_n \int \dots \int_{\sigma_1} dx_1 \dots dx_n L_n[x_1, \dots, x_n; q^1(x_1), \dots, q^1(x_n); \dots, q^{r_1} \dots r_s(x_n)] = 0$$

herleiten lassen. Als „nicht-lokal“ bezeichnet er nur Theorien, bei denen sich die Summe in (*) nicht auf den einzigen Term $n = 1$ reduziert. Aus den Forderungen der Eich-, Translations- und Lorentzinvarianz folgen integrale Erhaltungssätze. Durch eine (dem Ref. nicht einleuchtende) Verallgemeinerung des aus der Theorie lokaler Felder bekannten Grenzübergangs erhält Verf. differentielle Erhaltungssätze jedoch nur für den (aus $n = 1$ stammenden) lokalen Anteil. Daß die Integranden der in den integralen Sätzen auftretenden Größen (bei geeigneter Normierung) differentielle Erhaltungssätzen genügen, wird durch explizite Rechnung unter Heranziehung der Feldgleichungen gezeigt. Als Beispiel behandelt der Verf. die Theorie von MacManus (dies. Zbl. **31**, 230).

F. Penzlin.

• **Ôno, Yôrô: On the constants of motion for the case of non-localised interactions.** Progress theor. Phys. **10**, 125—136 (1953).

The energy-momentum-stress tensor, the angular momentum tensor, and the charge and current density four-vector satisfying continuity equations are constructed with the aid of methods known in the theory of general relativity. The resulting

expressions for the constants of motion (energy, etc. . .) are equivalent to those given previously by Rzewuski (this Zbl. 50, 225) and Pauli [Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 648—667 (1953)].

J. Rayski.

Peaslee, D. C.: A speculation on \mathbf{I} -spin. Progress theor. Phys. 10, 227—230 (1953).

Cap, Ferdinand: Nonlinear pseudoscalar meson theory. Progress theor. Phys. 10, 235—236 (1953).

Weber, G. P.: Zur zweiten störungstheoretischen Näherung der Meson-Nukleon-Streuung. Ann. der Physik, VI. F. 13, 369—380 (1953).

Der Verf. berechnet mit Hilfe der geladenen pseudoskalaren Mesontheorie in pseudoskalarer Kopplung in zweiter störungstheoretischer Näherung die Beiträge zum differentiellen Wirkungsquerschnitt der Pion-Nukleon-Streuung. Hierbei wird angenommen, daß die Mesonenmasse verschwindet. Die Energieabhängigkeit des differentiellen und totalen Wirkungsquerschnittes wird im nicht relativistischen Grenzfall und im Grenzfall extrem großer Geschwindigkeiten diskutiert. Bei der Störungsrechnung zeigt sich, daß die Entwicklungskoeffizienten in der Reihe nach wachsenden Potenzen von $g^2 \sim 1$ nur sehr langsam abnehmen, so daß z. B. im extrem relativistischen Energiebereich die g^6 -Näherung die g^4 -Näherung überwiegt. Das Störungsverfahren ist also nur für einen gewissen kleinen Energiebereich gültig. Die Arbeit vermag nicht, die experimentellen Werte zu erklären, läßt es jedoch als möglich erscheinen, daß in pseudovektorieller Kopplung bessere Ergebnisse erzielt werden könnten.

F. Cap.

Alaga, G., O. Kofoed-Hansen and A. Winther: On the pseudoscalar interaction in β -decay. Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd. 28, Nr. 3, 10 S. (1953).

Les AA. étudient en utilisant la transformation de L. L. Foldy-S. A. Wouthuysen (ce Zbl. 39, 226), l'influence d'une interaction pseudoscalaire sur la forme des spectres β en tenant compte du recul du noyau. La forme des spectres β est déterminée pour un mélange d'interactions tensorielles et pseudoscalaires dans le cas des transitions permises avec échange maximum de spin et dans le premier cas d'interdiction $0 \rightarrow 0$ (oui). Les estimations numériques de la limite supérieure de la valeur de la constante de couplage pseudoscalaire, obtenues par comparaison avec la forme des spectres observés semble difficile à concilier avec les résultats obtenus par A. G. Petschek et R. E. Marshak [Phys. Review, II. Ser. 85, 698—699 (1953)] à partir du spectre de RaE.

G. Petiau.

Pniewski, J.: β -spectrum of RaE in the low energy region. Acta phys. Polon. 11, 215—225 (1953).

Das kontinuierliche β -Spektrum von RaE (^{210}Bi), das bekanntlich einfach ist und einem in erster Ordnung verbotenen Übergang entspricht, wurde in dem Intervall von 4,6—100 keV mit einem magnetischen Siegbahnschen Spektrographen untersucht. Zum Nachweis der Elektronen wurden Ilford-Kernplatten benutzt und die β -Intensität durch Auszählen der Spuren gewonnen. Es ergab sich — im Gegensatz zu Messungen von Waltner und Rogers, Phys. Review, II. Ser. 74, 699—700 (1948), 75, 1445—1446 (1949) —, daß die β -Intensität in Abhängigkeit von der β -Energie bei niedrigen Energien einem endlichen Grenzwert zustrebt.

L. Waldmann.

Yamada, Masami: Correction to the beta-decay nuclear matrix elements. Progress theor. Phys. 10, 245—251 (1953).

L'A. considère les corrections à apporter à la théorie actuelle des transitions β résultant de la considération des valeurs exactes des parties radiales des fonctions d'ondes de l'électron dans le noyau et non plus seulement de leurs valeurs à la surface du noyau. Bien que les éléments de matrices nucléaires ne puissent être calculés exactement, l'introduction d'un potentiel régularisé convenable à l'intérieur du noyau permet de réduire une partie de l'arbitraire de la théorie actuelle.

G. Petiau.

Yamada, Masami: Theoretical reinvestigation of the β -spectrum of RaE. *Progress theor. Phys.* **10**, 252—264 (1953).

L'A. reprend le calcul théorique de la forme du spectre β du RaE en tenant compte de l'effet de la longueur d'onde finie signalé par M. E. Rose, C. L. Perry et N. M. Dismuke [Oak Ridge Nat. Lab. Rep. Nr. 1459 (1953)], et des corrections résultant de la considération des parties radiales des fonctions d'ondes à l'intérieur du noyau étudiées par l'A. dans l'article précédent. Ces corrections permettent d'expliquer correctement la forme expérimentale du spectre et conduisent à rejeter les conclusions de A. G. Petschek et R. E. Marshak (*Phys. Review*, II. Ser. **85**, 698 (1952)).

G. Petiau.

Bouchez, R. et R. Nataf: Sur les transitions β et la structure nucléaire. III. Les transitions super-permises. *J. Phys. Radium* **14**, 217—225 (1953).

(Pour la II^e p^{te} v. ce Zbl. **46**, 443). Les AA. généralisent le critère de Konopinski (classification des transitions β par le produit $f_0 T$) en définissant pour les transitions ($\Delta L, \Delta J$) un produit $f_n T$ (f_n , fonction de probabilité exacte). Ils discutent ensuite en détail les mélanges d'interactions susceptibles de rendre compte de l'ensemble des données expérimentales pour les transitions β entre noyaux miroirs (paires isobares telles que $N - Z = \pm 1$) et entre noyaux légers du type $A = 4n + 2$. On montre notamment que certaines transitions sont caractérisées par une valeur trop élevée de l'élément de matrice nucléaire si l'on admet une interaction de Gamow-Teller pure et que la valeur devient convenable si l'on admet un mélange d'interactions du type Fermi (S ou V) et Gamow-Teller (T ou A) avec des proportions $0,25 - 0,05$ et $0,75 \pm 0,05$.

G. Petiau.

Finkelstein, R. and P. Kaus: Note on the beta interaction. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 1316—1319 (1953).

La discussion de la forme la plus générale compatible avec les règles de l'invariance par rapport à la transformation de Lorentz pour l'interaction entre quatre champs de Fermions conduit l'A. à l'élément de matrice d'interaction

$$(S - T + P) f_1(n, m) + (V - A) f_2(n, m) + (S - A - P) f_3(n, m),$$

$n = n_f - n_i$, nombre de particules produit dans l'interaction, $m = n_+ - n_-$, différence entre les nombres de particules et d'antiparticules. f_1, f_2, f_3 sont des fonctions associées aux différents types de graphes de Feynman possibles. Un choix simple de f_1, f_2, f_3 permet de retrouver les différentes combinaisons proposées pour l'interprétation de la forme des spectres β .

G. Petiau.

Peaslee, D. C.: The linear combination in β decay. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1447—1457 (1953).

L'A. étudie la forme des spectres β interdits en vue de déterminer la combinaison linéaire des invariants S, V, T, A, P , intervenant dans l'interaction β . La discussion des résultats expérimentaux et notamment du cas du RaE conduit l'A. à proposer la combinaison linéaire $S - T + \delta^{-1} P$, le signe δ correspond aux émissions β^+ , δ est un facteur numérique positif de l'ordre de l'unité. La comparaison de cette loi avec le spectre de désintégration du méson μ montre que si la combinaison linéaire est la même, la constante de couplage est également la même et a pour valeur moyenne $|f| = (1,44 \pm 0,04) 10^{-49}$ erg cm³.

G. Petiau.

Tanikawa, Yasutaka: On the interaction forms of the beta-decay. *Progress theor. Phys.* **10**, 361—362 (1953).

Ahrens, Tino: Pseudoscalar interaction in the theory of beta-decay. II. *Phys. Review*, II. Ser. **90**, 974—977 (1953).

Morita, Masato: Note on coexistence of tensor and axialvector interactions in β -decay. *Progress theor. Phys.* **10**, 364—366 (1953).

Yamada, Masami: Note on the finite nuclear size effect in beta-decay. *Progress theor. Phys.* **10**, 241—243 (1953).

Morita, Masato: Interference terms of β -ray angular correlations. Progress theor. Phys. **10**, 363—364 (1953).

Abraham, A. and R. V. Pound: Influence of electric and magnetic fields on angular correlations. Phys. Review, II. Ser. **92**, 943—962 (1953).

Eine sehr allgemeine Ableitung und Formulierung für die bei mehrfachen Kernzerfällen zu erwartenden Winkelkorrelationen wird angegeben. Die Methode gestattet vor allem die explizite Berücksichtigung einer zeitabhängigen äußeren Störung im Zwischenzustand. Die Gültigkeitsgrenzen der Methode werden diskutiert und mit denen früherer Autoren verglichen. Der Einfluß von Kernquadrupolmomenten wird für folgende Fälle angegeben: Statische Wechselwirkungen in Pulvern (statische Verteilung der Kristallvorzugsrichtung) von Kristallen mit axialer und rhombischer Symmetrie, Einkristallen und freien Molekülen; zeitabhängige Störungen wie Brownsche Bewegung in Flüssigkeiten und elektronische paramagnetische Relaxation; Einfluß von statischen Magnetfeldern und Kernresonanzfeldern.

W. Humbach.

Skornjakov, G. B.: Die Ausstrahlung von γ -Quanten beim Zerfall eines μ -Mesons. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **89**, 431—434 (1953) [Russisch].

Die beim Zerfall eines μ -Mesons herausfliegenden Elektronen besitzen eine relativistische Energie, derart daß die Wahrscheinlichkeit der Ausstrahlung eines γ -Quants relativ groß ist. Es wird diese Wahrscheinlichkeit berechnet durch die Anwendung der üblichen S -Matrix-Methoden. Es wird die Form des Spektrums der γ -Quanten im Grenzfall kleiner und großer Energie gegeben. Das Spektrum der γ -Quanten, im Gegensatz zu dem der Elektronen, hängt weder von den Zerfalls-schemata noch von der Variante der Wechselwirkung wesentlich ab. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meson beim Zerfall ein Photon mit einer Energie größer als 1 MeV auslöst, ist gleich 0,04. Die mittlere Energie der γ -Quanten ergibt sich zu etwa 7 MeV.

P. Budini.

Eguchi, T. and M. Ohta: Capture of μ -mesons by atomic nuclei. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 1415—1423 (1953).

Bei der Theorie des μ^- -Einfanges in Atomkernen hat man die Umstände zu berücksichtigen, daß im Elementarprozeß $P + \mu^- \rightarrow N + \nu$ das absorbierende Proton eine kinetische Energie hat, daß das μ^- vor dem Einfang in der innersten Bohrschen Bahn an den Kern gebunden war und daß das entstehende Neutron eine Energie haben muß, die oberhalb der Grenzenenergie liegt, die der Neutronenzahl des Anfangszustandes entspricht. Das wird in der vorliegenden Arbeit durchgeführt, wobei skalare bzw. Vektor-Kopplung angenommen wird. Das Ergebnis weicht von den von Wheeler bzw. Wheeler und Tiomno [Reviews modern Phys. **21**, 133 bzw. **21**, 153 (1949)] berechneten Werten ab, indem für die schweren Kerne ein Korrekturfaktor hinzutritt, der von 0,831 (Fe^{56}) über 0,640 (Ba^{138}) auf 0,487 (U^{238}) abfällt. Damit werden die theoretischen Werte zwar verbessert, aber noch nicht mit dem Experiment in Einklang gebracht. Insbesondere zeigt sich entgegen der Erfahrung mit zunehmender Massenzahl eine Abnahme der wahrscheinlichsten Anregungsenergie. — In der Arbeit wird eine Gleichgewichtsbedingung wesentlich benutzt, die besagt, daß bei verschiedenen Potentialtopftiefen (wegen Coulombscher Abstoßung) für Protonen und Neutronen die Fermischen Grenzenenergien für beide Nukleonsorten gleich hoch liegen müssen. Bekanntlich führt diese Vorstellung nicht zum richtigen Wert des Neutronenexzesses $\theta(A) = (N - Z)/(N + Z)$. Möglicherweise ließe sich nach Vermutung des Ref. an dieser Stelle durch Anwendung einer auf die empirische Formel für $\theta(A)$ gegründeten halbempirischen Gleichgewichtsbedingung eine Verbesserung erzielen.

R. Hagedorn.

Sik, N. C.: Classical theory of charged meson. Indian J. Phys. **27**, 311—322 (1953).

Wenn Strahlungskorrekturen nicht in Betracht gezogen werden, werden bekanntlich die Wirkungsquerschnitte mancher Prozesse mit anwachsender Energie sehr groß. Um den Einfluß dieser Korrekturen genau erfassen zu können, geht Verf. auf die klassische Feldtheorie zurück. Für neutrale Mesonen haben Bhabha (dies. Zbl. **22**, 187; **26**, 382) und Harish-Chandra [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **185**, 269—287 (1946)] und für geladene Mesonen Fierz (dies. Zbl. **25**, 285) und insbesondere Le Couteur (dies. Zbl. **33**, 134) solche klassische Theorien angegeben.

Da in einer klassischen Theorie nach Meinung des Verf. (der Ref. nur bedingt zustimmen möchte) kein Unterschied zwischen einer skalaren und einer pseudoskalaren Theorie gemacht werden könne, untersucht Verf. die klassische geladene skalare Theorie. Die Bewegungsgleichung des mit einem solchen Mesonfeld in Wechselwirkung stehenden Nukleons wird klassisch gelöst, und der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung geladener Mesonen an Nukleonen wird unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung abgeleitet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

F. Cap.

Werle, J.: On mutual nucleon-nucleon interaction through meson fields. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **1**, 95—98 (1953).

Feldman, David: The invariant forms of the nucleon-nucleon interaction. Phys. Review, II. Ser. **92**, 824—826 (1953).

Es wird eine neue Methode angegeben, die möglichen invarianten Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen zu bestimmen. Verf. geht aus von der allgemeinsten invarianten Form der Matrix der elastischen Streuung, wie sie von L. Wolfenstein und J. Ashkin (dies. Zbl. **46**, 439) sowie von R. H. Dalitz (dies. Zbl. **46**, 226) angegeben wurde. Durch Entwicklung der Koeffizienten (die in dieser Matrix vor den verschiedenen Operatoren stehen) nach entweder \vec{n}^2 ($\vec{n} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$; End- bzw. Anfangsimpuls) oder m^2 ($\vec{m} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$) gewinnt man im Ruhssystem des Schwerpunktes die Wechselwirkungen entweder ohne oder im zweiten Falle mit Austausch. Die erhaltenen Ausdrücke werden dann für eine beliebiges Galileisystem verallgemeinert. Benutzt man noch den Isotopenspin, so ergeben sich dieselben Wechselwirkungen wie nach der Methode von E. P. Wigner (dies. Zbl. **15**, 380) sowie E. P. Wigner und L. Eisenbud [Proc. nat. Acad. Sci. USA **27**, 281 (1941)]. Die Benutzung des Isotopenspinformalismus ist aber nur von Vorteil, solange man entweder den Massenunterschied Neutron-Proton vernachlässigt oder sich auf das Schwerpunktsruhsystem beschränkt.

R. Hagedorn.

Banerjee, C. C.: Proton-proton scattering and the pseudoscalar meson theory. Indian J. Phys. **27**, 173—182 (1953).

In nichtrelativistischer Bornscher Näherung berechnet Verf. die Proton-Proton-Streuung für 150, 240 und 340 MeV für die pseudoskalare Theorie (Potential 2. Ordnung) und kommt zum Schluß, daß weder diese Theorie noch irgendeine andere Kombination von Zentral- und Tensorkräften die experimentell gefundene Isotropie zu erklären vermag. Verf. weist darauf hin, daß Jastrows hard core (Abstoßung für $r < 10^{-13}$ cm, um den experimentellen Wert von $\sigma = 4,5 \cdot 10^{-27}$ cm² für $15^\circ < \theta < 90^\circ$ zu erreichen) das Problem nicht löst, da die Voraussetzung für eine solche Erklärung, nämlich $\lambda_{\text{proton}} = 1,0 \cdot 10^{-13}$ cm nicht zutrifft. Der Einfluß des $1/r^3$ Terms auf den Gang des Wirkungsquerschnittes mit der Energie wird besonders hervorgehoben — für andere radiale Abhängigkeiten des PS-Potentials dürften daher die Schlüsse des Verf. nicht mehr zutreffen.

F. Cap.

Brueckner, K. A., M. Gell-Mann and M. Goldberger: On the damping of virtual nucleon-pair formation in pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. **90**, 476—478 (1953).

Die Verf. untersuchen im Rahmen der pseudoskalaren Mesonentheorie die Dämpfung der für die Bildung von Nukleonenpaaren verantwortlichen, gerade in dieser Theorie sehr großen, Matrixelemente. Es zeigt sich, daß die Strahlungskorrekturen die Nukleonenpaarterme und in nichtrelativistischer Näherung auch die Mesonenpaarterme stark dämpfen. Dies hat zur Folge, daß die S-Wellen-Streuung der Pionen viel schwächer wird und daß der Teil des Potentials 4. Ordnung, der von Mesonenpaaren erzeugt wird, praktisch verschwindet. Damit überwiegt aber zumindest für niedere Energien — der für kleine Geschwindigkeiten praktisch ungedämpfte lineare pseudovektorielle Kopplungsterm. Auf die Tatsache, daß Strahlungseffekte die Emission virtueller Mesonen hoher Energie stark einschränken, (so daß die von der Gradientenkopplung herrührenden Divergenzen wegfallen) hat übrigens schon Hu (dies. Zbl. **40**, 431) hingewiesen.

F. Cap.

Biswas, S. N.: Covariant theory of radiation damping and the scattering of charged scalar mesons by nucleons. Indian J. Phys. **27**, 197—207 (1953).

Das von der Gradientenkopplung herrührende starke Ansteigen von Wirkungsquerschnitten mit anwachsender Energie, das auch von der invarianten Feynman-schen Störungstheorie nicht beseitigt werden konnte, kann durch Einschluß der Strahlungsdämpfung beseitigt werden. Um dies zu beweisen, löst Verf. die Heitler-sche Integralgleichung nach einem neuen Variationsverfahren von Goldberger (dies. Zbl. 45, 137) für die skalare Theorie mit Vektorkopplung. Es zeigt sich, daß die Lösung sich an experimentelle Meson-Nukleon-Streuwirkungsquerschnitte und an theoretische Ergebnisse anderer Autoren gut anpassen läßt. *F. Cap.*

Hasegawa, Kazu and Shôkô Azuma: The π -nucleon scattering and the damping effect. Progress theor. Phys. 10, 240—241 (1953).

Matsumoto, Tokuji, Tetuo Hamada and Masao Sugawara: On the effects of excited states of nucleons upon static nuclear potential in symmetrical pseudoscalar meson theory. I. Derivation of nuclear potential and qualitative conclusions. Progress theor. Phys. 10, 199—226 (1953).

Es wird der Einfluß der Existenz angeregter Nukleonenzustände auf das statische Potential der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie untersucht. Das Nukleon wird nach Rarita-Schwinger (dies. Zbl. 26, 287) als Spin-3/2-Teilchen angesehen und durch eine zusätzliche Hamiltonfunktion beschrieben. Die Verff. geben die nichtrelativistischen statischen Beiträge vierter Ordnung zum Nukleonenpotential an und weisen auf einen Fehler in der Arbeit von Taketani, Machida und Onuma (dies. Zbl. 46, 227) hin. Es ergibt sich, daß der Einfluß der angeregten Zustände unerwartet groß ist; das Potential enthält eine sehr starke Zentralkraft und eine sehr schwache Tensorkraft, beide mit hohen Singularitäten (bis r^{-6}). Für Ladungs-Triplettzustände sind die Einflüsse der angeregten Zustände weitaus größer als für Ladungsingulettzustände. *F. Cap.*

Hamada, Tetuo: Effect of nucleon excited state on magnetic moment anomaly. Progress theor. Phys. 10, 309—322 (1953).

Verf. diskutiert den Einfluß angeregter Nukleonen-Zustände auf das magnetische Moment einzelner Nukleonen. Die angeregten Nukleonenzustände werden durch Spinorfelder höherer Masse, Ladung und Spins beschrieben. Diese Felder sind durch Wechselwirkungsglieder mit neuen Kopplungskonstanten mit dem Feld verbunden, welches die unangeregten Nukleonen beschreibt. Diese neuen Kopplungskonstanten erhöhen natürlich die Zahl der anpaßbaren Parameter; Verf. hofft aber, auf diese Weise die Effekte höherer Ordnung der starken Nukleon-Meson-Kopplung in einer groben Näherung zum Teil berücksichtigen zu können. Die Berechnung der Erwartungswerte der magnetischen Momente für 1 Proton bzw. 1 Neutron geht mit Hilfe des Dyson-Feynmanschen Formalismus vonstatten, führt aber im Falle angeregter Nukleonen des Spin 3/2, isotonen Spin 1/2 auf nichtrenormierbare Divergenzen. Im Falle angeregter Nukleonen des Spin 1/2, isotonen Spin 3/2 (der wohl keine reale Bedeutung hat) gibt es jedoch vernünftige Resultate. Bei geeigneter Wahl der beiden Kopplungskonstanten (Nukleon-Meson, Nukleon-angeregtes Nukleon) lassen sich die magnetischen Momente besser darstellen als bisher. *G. Heber.*

Wentzel, Gregor: Many-nucleon forces. Phys. Review, II. Ser. 91, 1573—1574 (1953).

Bohr, Aage and Ben R. Mottelson: Collective and individual-particle aspects of nuclear structure. Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd. 27, Nr. 16, 174 S. (1953).

In der ersten Zeit der Theorie der Atomkerne war es eine große Enttäuschung, als sich herausstellte, daß man mit dem Einteilchenbild die wesentlichsten Züge der Erfahrung selbst qualitativ verfehlte. Das Tröpfchenmodell Niels Bohrs war — wenigstens für die schwereren Kerne — eine glänzende Lösung, und es ließ eine Menge Erscheinungen verstehen. Als man im Laufe der folgenden Jahre die Feinheiten des Kernbaues systematisch untersuchte, zeigten sich die Mängel dieses doch recht groben Modells deutlich. Insbesondere bestand keine Hoffnung, mit ihm die „magic numbers“ und die systematische Änderung fast aller wesentlichen Kerneigenschaften etwa mit Annäherung an eine von ihnen erklären zu können. Hier begann mit der Entwicklung des Schalenmodells [M. Goeppert-Mayer, Phys. Review, II. Ser. 78, 16 (1950); O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Süss, Ergebn. exakt. Naturwiss. 26, 244 (1952)] eine neue Periode des Verstehens, und diesmal konnte man gerade eine Menge individueller Eigenschaften der Kerne behandeln. Merkwürdigerweise konnten beide Modelle nur einen Teil der Erscheinungen beschreiben und das, ohne miteinander in Konflikt zu geraten. Als jetzt immer noch mehrere

gut untersuchte Kerneigenschaften, wie z. B. die Quadrupolmomente, von keinem der beiden Modelle erfaßt wurden, lag es nahe zu fragen, ob nicht das eine oder das andere, sondern beide miteinander zu benutzen wären. Erste Versuche, auf diese Weise an die Quadrupolmomente heranzukommen (J. Rainwater, dies. Zbl. 40, 432) und Anomalien im Spin des Grundzustandes zu verstehen (A. Bohr, dies. Zbl. 42, 221) hatten einen vielversprechenden Erfolg. Das damit gestellte Problem wurde von verschiedenen Seiten angegriffen, und die vorliegende Arbeit ist (im Zusammenhang mit ihrer Vorläuferin: A. Bohr, dies. Zbl. 47, 229) die bisher wohl wichtigste. In dieser Arbeit werden Schalen- und Tröpfchenmodell in solcher Weise vereinigt, daß, grob gesagt, das Schalenmodell mit einem deformierbaren Potential gekoppelt wird. Nun wäre der Idealzustand der, den Kern durch eine $(N + P)$ -Teilchen-Schrödingergleichung zu beschreiben, wobei die Lösungen nicht nur alle Zustände des Kerns (N, P) repräsentieren, sondern auch alle Aufteilungen der $N + P$ Nukleonen von ihrer restlosen Vereinzelung über mehrere kleinere Kerne bis zu dem aus allen zusammen gebildeten Kern (N, P) . Selbst wenn die Natur der Kernkräfte restlos bekannt wäre, würde es aussichtslos sein, dieses Problem zu lösen. So blieb also vorerst nichts anderes übrig, als den oben erwähnten Weg zu beschreiten und ad hoc eine Deformierbarkeit des Kernes anzunehmen und deren Einfluß auf das Schalenmodell zu diskutieren. Hier ergeben sich ganz ähnliche Verhältnisse wie in der Molekülphysik: Die Deformierbarkeit des Kernes erlaubt Kollektivbewegungen, die durch passende Parameter beschrieben und quantisiert werden können. Auf der anderen Seite stehen die Bewegungen der Einzelnukleonen in dem nun nicht mehr konstanten und kugelförmigen Potential. Die Wellenfunktionen der Einzelnukleonen hängen vom Zustand des Gesamtkerns mehr oder minder stark ab, bestimmen aber umgekehrt auch den Kollektivzustand. So werden z. B. Kerne mit abgeschlossenen Schalen einer Deformation starken Widerstand leisten, wogegen Kerne mit teilweise gefüllten Schalen spontan in abgeplattete oder verlängerte Rotationskörper übergehen. Daher bieten sich hier von selbst zwei qualitativ völlig verschiedene Grenzfälle an, die die Autoren mit schwacher bzw. starker Kopplung der Einzelnukleonen an die Kollektivbewegung bezeichnen. Im ersten Fall ist der Kern annähernd kugelförmig mit einer leichten Kräuslung durch Oberflächenwellen (d. h. Schwingungen um die kugelförmige Gleichgewichtslage, von denen nur die Grundschwingung betrachtet wird) und die Wellenfunktion vom Typ $\Phi_\alpha(x) \cdot \Psi_\alpha(x, \alpha)$, wo α die Parameter der Kollektivbewegung, x die Nukleonenkoordinaten, $\Phi_\alpha(x)$ die der Kollektivbewegung und $\Psi_\alpha(x, \alpha)$ die den Nukleonen entsprechenden Wellenfunktionen sind. Daß die Parameter α selbst Funktionen der Nukleonenkoordinaten sind, wird zwar angedeutet, aber nicht explizit durchgeführt. [Die Separation des Hamiltonoperators in einen Kollektivteil, der als Koordinaten die α , und einen Nukleonteil, der die Teilchenkoordinaten enthält, wobei aber die α als Funktionen der Teilchenkoordinaten ausgedrückt werden, und das Aufsuchen von Lösungen der Schrödingergleichung zu diesem Operator ist eine der wichtigsten Aufgaben der Kernphysik, die gegenwärtig angegriffen sind.] Im zweiten Fall ist der Kern zu einem (ebenfalls von Kräuselnwellen überzogenen) abgeplatteten oder länglichen Rotationskörper verformt. Die Wellenfunktion ist dann vom Typ $q(\varphi, \gamma) \sum_{L, M} D(\theta_L) \cdot$ wobei $q(\varphi, \gamma)$ die Schwingungen um die Gleichgewichtslage (hier werden wieder nur die längsten „Kräuselnwellen“ berücksichtigt), $\sum_{L, M}$ die Einteilchenwellenfunktion für den verformten Kern und $D(\theta_L)$ Kreiseigenfunktionen darstellen. In der Tat kann ja [im Gegensatz zum kugelsymmetrischen Kern] ein verlängerter oder abgeplatteter Kern eine gewisse Rotation ausführen, zwar nicht wie ein starrer Körper, sondern durch eine Art umlaufende Flutwelle, deren Höhe genau die Deformation darstellt. Das damit verbundene Trägheitsmoment ist viel kleiner als das des entsprechenden starr rotierenden Körpers. Die seit einiger Zeit bekannten Rotationsniveaus verformter Kerne entsprechen quantitativ diesem Bild. Zwischen beiden Grenzfällen liegt das wie immer schwierig zu behandelnde Gebiet mittlerer Kopplung. Hier wird — in erster Näherung in den Deformationsparametern α — ein Wechselwirkungsoperator $H_{\text{int}} = - \sum_p k(r_p) \sum_{\nu \mu} \alpha_{\nu \mu} Y_{\nu \mu}(\theta_p, \varphi_p)$ benutzt (r_p, θ_p, φ_p Teilchenkoordinaten) und die Wellenfunktion nach den bekannten Einteilchenfunktionen des ungestörten Systems entwickelt. Mit diesen drei Kopplungen werden dann die wichtigsten Kerneigenschaften diskutiert und die Ergebnisse mit den experimentellen Daten verglichen. Einzelheiten würden hier zu weit führen. Es zeigt sich aber bei einer überzeugenden Übereinstimmung in den allgemeinen Zügen, daß die „hydrodynamischen“ Daten des alten Tröpfchenmodells quantitativ oft versagen. — Auf insgesamt 167 Seiten werden behandelt: Die Kopplungsschemata, Grundzustandspins, magnetische Momente, Quadrupolmomente, Struktur der Energieniveaus, Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung, β -Zerfall, 32 Tafeln und 17 Abbildungen geben ein umfangreiches Zahlenmaterial an.

R. Hagedorn.

Lane, A. M.: Studies in intermediate coupling. The energy states of ^{13}C and ^{13}N belonging to the configuration $1p^9$. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 977–994 (1953).

Verschiedene Eigenschaften der leichten Kerne zeigen, daß im Schalenmodell eine zwischen den Extremfällen L - S - und j - j -Kopplung liegende Kopplungsart angenommen werden muß, wobei mit zunehmender Nukleonenzahl die j - j -Kopplung die Oberhand gewinnt. Die Verhältnisse sind aber kompliziert, denn der Übergang (vor allem in der Gegend von $A = 12$) geht nicht stetig vor sich. Um diese Situation zu klären, wurden für die Kerne ^{13}C und ^{13}N solche Eigen-

schaften herausgesucht und im Schalenmodell behandelt, die im wesentlichen nur von der Art der Kopplung und nicht von anderen ungenügend bekannten Kerneigenschaften abhängen: Magnetische Dipolübergänge, magnetische Momente, reduzierte Termbreiten für Nukleonemission. Es werden reine L - S -, reine j - j - und gemischte Kopplung diskutiert. Bei der Rechnung wird die Methode der „fractional parentage“ benutzt. Es zeigt sich nach Definition eines Kopplungsparameters, der ein Maß für die Anteile von L - S - bzw. j - j -Kopplung angibt, daß die untersuchten Eigenschaften sämtlich mit annähernd demselben Parameterwert verträglich sind.

R. Hagedorn.

Cini, M. and S. Fubini: Adiabatic nuclear potential for large values of the coupling constant. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1695—1703 (1953).

In der Wechselwirkungsdarstellung wird ein allgemeiner Ausdruck für das adiabatische Potential zwischen 2 Nukleonen (gültig für große Abstände der Nukleonen und bei Vernachlässigung des Nukleonenrückstoßes) in Operatorform abgeleitet. Zur genäherten Berechnung des Potentials wird dann ein Variationsprinzip vorgeschlagen, mit dessen Hilfe die unbestimmten Koeffizienten eines versuchsweise angesetzten Lösungsoperators bestimmt werden können. Die Lösung ist eine meromorphe Funktion der Kopplungskonstanten, stellt also eine analytische Fortsetzung der üblichen Entwicklung nach der Kopplungskonstanten dar und damit evtl. eine bessere Näherung. Die Methode hat leider den Nachteil, daß außer den üblichen renormierbaren Divergenzen auch physikalisch nicht abseparierbare Divergenzen auftreten, die davon herrühren, daß man sich auf das Vakuum freier Teilchen und nicht auf das Heisenbergvakuum bezieht.

H. Freese.

Corben, H. C.: Long range nuclear forces. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1485 (1953).

Der Verf. knüpft an die Neutrino-Paar-Theorie der Gravitation von Gamow und Teller [Phys. Review, II. Ser. 71, 550 (1947)] an und zeigt, daß andererseits auch die gewöhnliche Fermikopplung des Betazerfalles zu Termen 4. Ordnung führt, die als Gravitationskräfte gedeutet werden können. Größenordnungsmäßig läßt sich die Gravitationskonstante ableiten, so daß eine genaue Berechnung dieser weitreichenden Kräfte zwischen zwei Nukleonen und Vergleich dieser Terme mit den Gravitationskräften wichtige Aussagen für die Fermikopplung ermöglichen.

F. Cap.

Yoshida, Shiro: Deuteron stripping reaction. Progress theor. Phys. 10, 1—10 (1953).

Verf. berechnet die Wirkungsquerschnitte für Kernreaktionen vom Typus $Z^M(d, p)Z^{M-1}$ („deuteron stripping reaction“) auf Grund der üblichen Annahmen, nämlich Vernachlässigung 1. der Wechselwirkung zwischen Proton und Folienkern; 2. der Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron außer im Anfangszustand; 3. der Coulombschen Wechselwirkung; 4. des Beitrages des D -Zustandes für den Deuterongrundzustand und 5. einer γ -Ausstrahlung. Aus den beobachteten Winkelverteilungskurven des bei der Reaktion freigemachten Protons können Rückschlüsse auf die Struktur des Folienkernes gezogen werden.

Th. Sexl.

Roth, Benjamin: Two-body scattering at low energy. Phys. Review, II. Ser. 92, 1250—1252 (1953).

Verf. entwickelt die Streuwelle des Zweikörperstreuproblems im Falle kleiner Energien nach Potenzen von ik . Er zeigt ferner, daß die übliche Reihe für $k \cot \delta$ daraus hergeleitet werden kann. Auf Grund der vorgenommenen Ableitung wird eine Energieschranke für die Reihe von $k \cot \delta$ gefunden, welche für große und kleine Streulängen wirkt. Die Größe der Streulänge entscheidet, welche der zwei abgeleiteten Ausdrücke Verwendung findet. Für die Analyse von Streuversuchen von Neutronen an Komplexkernen ist diese Unterscheidung unter Umständen wertvoll.

P. Urban.

Basu, D.: Production of π -mesons in neutron-proton collisions. Indian J. Phys. 27, 347—353 (1953).

Verf. berechnet den Wirkungsquerschnitt für die π -Mesonenerzeugung in n - p -Zusammenstößen nach der geladenen pseudoskalaren Theorie mit pseudoskalarer Kopplung. Es wird hierbei angenommen, daß die Mesonenerzeugung ein Prozeß 3. Ordnung sei: Nach virtueller Emission und Wiederabsorption erfolgt erst die eigentliche Erzeugung. Die Bornsche Näherung ergibt einen verschwindenden Wirkungsquerschnitt, wenn der Rückstoß des ursprünglich ruhenden Nukleons vernachlässigt wird. Sonst ergibt sich für $g^2 = 0.3$ ein totaler Wirkungsquerschnitt von 10^{-29} cm^2 , der mit der Energie wie $\log E_{\text{Nukleon}}$ wächst. Für hohe Energien müßte die Strahlungsdämpfung Berücksichtigung finden. Gegenüber anderen Autoren, insbesondere Tahagi, der dasselbe Problem mit der invarianten Störungstheorie behandelte [Progress theor. Phys. 4, 557 (1949)] treten nicht aufgeklärte Unterschiede auf. (S. auch Morette, dies. Zbl. 35, 137.) F. Cap.

Horowitz, J. et A. M. L. Messiah: Sur les réactions (dp) et (dn). J. Phys. Radium 14, 695—706 (1953).

● Nelms, Ann T.: Graphs of the Compton energy-angle relationship and the Klein-Nishina formula from 10 Kev to 500 Mev. (National Bureau of Standards Circular 542.) Washington: U. S. Government Printing Office 1953. 89 S. 55 cents.

Goldhaber, M.: A hypothesis concerning the relations among the „new unstable particles“. Phys. Review, II. Ser. 92, 1279—1281 (1953).

Altshuler, Saul: The binary rearrangement collision. Phys. Review, II. Ser. 92, 1157—1159 (1953).

Es wird die Theorie des binären Umordnungsstoßes diskutiert und gezeigt, daß die Streuamplitude für die Umordnung aus der Integralgleichung für die direkten Streuamplituden abgeleitet werden kann. Außerdem wird die Mehrdeutigkeit der Matrixelemente, welche bei der Bornschen Näherung für Umordnungsamplituden auftritt, beseitigt. Der Verf. behandelt alle Partikeln als unterscheidbar, was aber keinen Verlust an Allgemeinheit darstellt, da durch Bildung von Linearkombinationen der durch Austausch entarteten Wellenfunktionen die Symmetrie in jeder Gruppe identischer Partikeln gesichert erscheint. P. Urban.

Lopuszański, J.: Lösung der G -Gleichungen von Jánossy für die kosmischen Schauer. Acta phys. Polon. 12, 156—159 (1953).

Die Jánossy-Grundgleichungen (L. Jánossy, dies. Zbl. 37, 141) für die Theorie der Nukleonen- und Elektronen-Photonen-Schauer werden für den einfacheren Fall der Elektronen-Photonenkomponente schrittweise gelöst [für $\epsilon < 1$ gilt bei $\epsilon \rightarrow 1/n$ der $(n-1)$ -te Schritt]. Diese Methode läßt sich auch auf den Fall der Approximation B (d. h. mit Berücksichtigung der Ionisierungsverluste) erweitern. P. Budini.

Messel, H. and H. S. Green: The general three-dimensional theory of cascade processes. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 1009—1018 (1953).

Es wird eine Methode angegeben zur Lösung des Problems der dreidimensionalen Entwicklung einer Kaskade. Die Grundgleichungen werden durch Fouriertransformationen auf eine einfachere Form gebracht und durch Reihenentwicklung gelöst. Es wird gezeigt, daß die Koeffizienten der lösenden Reihe gleich den Momenten der Verteilungsfunktionen sind. Die Methode wird bei der Entwicklung einer von einem primären Nukleon ausgelösten Kaskade angewandt. P. Budini.

Castagnoli, C., G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini and D. Moreno: An investigation on jets. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1539—1558 (1953).

Die Sterne der kosmischen Strahlung, wie sie in den Photoplatten erscheinen, sind mit den Namen Jet benannt, wenn sie nur Schauer-Spuren (von relativistischen Teilchen, die am Minimum Ionisation erzeugen) enthalten. Es wird oft angenommen, daß diese Sterne aus einem Nukleon-Nukleon-Stoß entstanden sind. Um dieses Phänomen mit der Theorie der Mesonen-Erzeugung bei sehr großen Energien vergleichen zu können, ist es notwendig, die Energie des Primärteilchens zu kennen. In dieser Arbeit wird eine statistische Methode angegeben, um diese Energie aus den

gemessenen Auslauf-Winkeln der einzelnen Schauer-Spuren zu bestimmen. Als Beispiel wird die Theorie auf 43 Jets angewandt, im Rahmen der Fermi- und Heisenberg-Theorien der Mesonen-Erzeugung. Die Energiebestimmung hängt stark von dem angenommenen Energie-Spektrum der erzeugten Mesonen ab. In diesem Beispiel scheint die Energie des Primärteilchens nicht eine eindeutige Funktion der Zahl der Schauer-Teilchen zu sein, was mit der neueren Heisenberg'schen Theorie der Explosionschauer übereinstimmt (Kosmische Strahlung, herausgeg. v. W. Heisenberg, Berlin 1953, S. 148, dies. Zbl. 50, 444).

P. Budini.

Cester, R. e E. Clementel: Sul calcolo delle tracce elettrofotoniche. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1441—1450 (1953).

Die Elektronen- und Photonen-Wege $\int_0^\infty \pi(E, t) dt$, $\int_0^\infty \gamma(E, t) dt$ (track-length der englischen Literatur) werden durch Anwendung der Bhabha-Chakrabarty-Methode zur Lösung der Diffusionsgleichungen (H. J. Bhabha und S. K. Chakrabarty, dies. Zbl. 39, 431) abgeleitet. Für $E = 0$ wird die Reihe unbestimmt; wenn man aber Energie-Erhaltung verlangt, erhält man auch bei $E = 0$ den von anderen Autoren gefundenen Verlauf.

P. Budini.

Sjöstrand, Nils Göran: The influence of a cadmium sheet on the distribution of neutrons in graphite. Ark. Fys. 6, 497—512 (1953).

Es wird die Neutronenverteilung in folgendem System untersucht: 2 quaderförmige Graphitklötze stoßen mit ihren quadratischen Grundflächen zusammen. In der Grenzebene befindet sich eine Cadmiumschicht. In einer dazu parallelen Ebene innerhalb des einen Graphitklotzes soll die Neutronendichte bekannt sein, auf der Oberfläche des Systems soll sie verschwinden. Der Behandlung wird die Boltzmannsche Integralgleichung zugrunde gelegt. Die Neutronendichte wird nach Kugelfunktionen entwickelt und damit die Integralgleichung in ein System von Differentialgleichungen übergeführt. Die auf Grund der Grenzbedingungen zu erfüllenden Gleichungen für die Koeffizienten werden zunächst allgemein angeschrieben und dann für ein spezielles Anordnungsbeispiel zahlenmäßig gelöst. Die berechneten Werte werden mit experimentellen Werten verglichen und sehr gute Übereinstimmung gefunden, wenn Kugelfunktionen bis zum Index 3 mitgenommen werden. *H. Volz.*

Gallone, S.: Sul fattore d' utilizzazione termica ed il tratto di diffusione termico in una pila eterogenea. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1495—1497 (1953).

Mit Hilfe der Diffusionsgleichung einschließlich passender Erzeugungs- und Vernichtungsglieder wird ein „Pile“ durchgerechnet, der aus ebenen, senkrecht zur x -Achse liegenden Schichten von Uran und verlangsamen Medium besteht. Die Anordnung ist in y -Richtung unendlich ausgedehnt, in z -Richtung durch 2 parallele Ebenen begrenzt. Für die Neutronendichte wird der Ansatz $\Phi(x, z) = n(z) \cdot \varphi(x)$ gemacht und angenommen, daß $n(z)$ einer Gleichung der Form $d^2n/dz^2 + \omega^2 n = 0$ genügt. Unter Berücksichtigung der Diffusionsgleichung und der Grenzbedingungen des Problems zeigt sich, daß ω^2 einer transzendenten Gleichung genügen muß. Physikalisch hängt ω^2 zusammen mit der thermischen Diffusionslänge und dem thermischen Vermehrungsfaktor. Abgesehen von kleinen Zusatzgliedern werden für diese Zusammenhänge bekannte Formeln wiedergefunden und bestätigt. *H. Volz.*

Cohén, Bernard L.: The statistical theory of nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. 92, 1245—1248 (1953).

Seiden, Joseph: Effet de rotations aléatoires des aimants sur les bandes de résonance du cosmotron à fort convergence. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 560—562 (1953).

Die Arbeit behandelt die Frage nach dem Einfluß kleiner Verdrehungen (oder Lageabweichungen) der einzelnen Magnete eines Betatrons (oder Cosmotrons) auf die Resonanzbanden. Von Sturrock war gezeigt, daß die — näherungsweise adiabatische —

Teilchenbewegung darstellbar ist durch $\begin{pmatrix} Y \\ P_y \\ Z \\ P_z \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} Y \\ P_y \\ Z \\ P_z \end{pmatrix}_0$, worin Y, Z = radiale bzw. vertikale

(betatronische) Schwingungen als Funktion der Anfangskoordinaten Y_0, Z_0, P_{y0}, P_{z0} und P_y, P_z die zugehörigen Bewegungsgrößen bezeichnen. (M) ist eine quadratische Matrix von 16 Elementen, deren charakteristische Gleichung die Form $t^4 - a t^3 + b t^2 - a t + 1 = 0$ hat. Stabilität der Schwingungen erfordert $t = 1$, wenn (M) sich auf eine Umdrehung der Teilchen bezieht. Verf. zeigt, daß sich die oben erwähnten kleinen Verdrehungen aller oder einzelner Magnete, die sich gleichfalls durch Matrizen ausdrücken lassen und als „Störungen“ behandelt werden, nur quadratisch auf die Teilchenbewegung auswirken, d. h. die Phase wird nur in zweiter Ordnung modifiziert, während sie durch azimutale magnetische Inhomogenitäten in Größen erster Ordnung beeinflußt wird.

J. Picht.

Seiden, Joseph: La diffusion des protons par le gaz résiduel dans le cosmotron à forte convergence. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1075—1077 (1953).

Im Anschluß an die vorstehend referierte Arbeit behandelt Verf. gleichfalls matrizentheoretisch den Einfluß von Zusammenstößen der beschleunigten Protonen im Cosmotron starker Konvergenz mit in diesem enthaltenen Gasresten und zeigt, daß derartige Zusammenstöße zu Störschwingungen von empfindlich störenden Maximalamplituden führen. Die Verhältnisse und die dadurch bedingten Folgeerscheinungen werden theoretisch näher untersucht.

J. Picht.

Bau der Materie:

Vroelant, Claude: Calcul des intégrales intervenant pour certaines formes approchées de la fonction d'onde. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2504—2506 (1953).

Als Näherungslösungen der Wellengleichung, die für die Molekularphysik von Interesse sind, betrachtet Verf. Ausdrücke von der Form

$$\Psi = \sum_k f_k(\dots x_i, y_i, z_i, \dots) e^{-ik(x_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots)},$$

in denen die f und g Polynome sind, wobei die letzteren vom zweiten Grade und so beschaffen sind, daß die Terme x_i^2, y_i^2, z_i^2 denselben Koeffizienten besitzen und die Terme $x_i y_i, y_i z_i, z_i x_i$ nicht auftreten. Verf. macht darauf aufmerksam, daß dieser Fall dadurch bemerkenswert ist, daß sich bei ihm alle Energieintegrale in einfacher Weise bestimmen lassen. Die einzigen, deren Berechnung auf den ersten Blick schwierig erscheint, sind von der Form $\int_{r_{Ai}} \frac{\Psi^2}{r_{Ai}} d\tau, \int_{r_{Aj}} \frac{\Psi^2}{r_{Aj}} d\tau,$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, r_{Ai} = \sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2},$$

und diese können durch geeignete Substitutionen auf die beiden Integrale $\int_0^a e^{-kr} dr$

$$\int_0^a r e^{-kr} dr \text{ zurückgeführt werden.}$$

W. Quade.

Wagenbreth, H.: Zur Dublettaufspaltung von Alkalitermen. Ann. der Physik, VI. F. 13, 285—289 (1953).

Arnowitz, R.: The hyperfine structure of hydrogen. Phys. Review, II. Ser. 92, 1002—1009 (1953).

Die Methoden zur Behandlung des relativistischen Zweikörperproblems der Quantenelektrodynamik werden auf die Bestimmung der Hyperfeinstruktur des Wasserstoffs angewendet. Die Wechselwirkung des anomalen magnetischen Moments (mesonischen Ursprungs) des Protons mit dem Feld wird durch die Zufügung einer Art von Pauli-Term zur Lagrange-Funktion berücksichtigt. Zunächst wird die Greensche Funktion abgeleitet und mit dieser dann eine neue Form der Störungsrechnung vorgeführt. Über die üblichen Schwierigkeiten hinaus entstehen zwei neue Divergenzen: 1. Im UV wegen der Punkt-Dipol-Natur des anomalen Protonenmoments. Diese Divergenz hängt nur logarithmisch vom Abschneideradius ab, und

ist insofern ungefährlich. 2. Im UR erzeugt die näherungsweise Verwendung ebener Wellen für die virtuellen Zwischenzustände in der Greenschen Funktion ebenfalls eine Divergenz. Diese kann, wie zum Schluß der Arbeit angedeutet wird, durch eine von Anfang an konsequentere Durchführung der Methode behoben werden.

W. Humbach.

Viswanath, G.: Electronic spectra of molecules containing six and five membered rings. Calculating of energy levels. *Indian J. Phys.* **27**, 251—256 (1953).

The energy levels of the indene molecule have been calculated by the Valence Bond method, on the basis of seven canonical structures. The lowest absorption band is predicted at 3228 Å corresponding to an experimental value of 2952 Å.

J. Jacobs.

Porod, Günther: Die statistische Gestalt von Fadenmolekülen II. *Acta phys. Austr.* **8**, 181—190 (1953).

The special random walk problem in three dimensions for n vectors of equal length is discussed, and an integral recursion formula for the distribution function $h_n = H_n r$ is derived. On the basis of these integrations a general formula for the distance-density-function for arbitrary n is found.

J. Jacobs.

Tomita, Kazuhisa and Kiyoshi Fukui: On the electronic structure of LiH atomic orbital approach with configurational interaction. *Progress theor. Phys.* **10**, 362—363 (1953).

Rushbrooke, G. S. and H. I. Scoins: On the theory of fluids. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **216**, 203—218 (1953).

Sowohl die thermische Zustandsgleichung $p = p(T, \rho)$ eines nichtidealen Gases oder einer Flüssigkeit (p Druck, T Temperatur, ρ Teilchenkonzentration) als auch die für die Dichteschwankungen maßgebende Größe $\partial \rho / \partial p$ sind nach der statistischen Mechanik durch einfache Integrale über die radiale Verteilungsfunktion $g(r)$ gegeben. [$g(r)$ gibt die Wahrscheinlichkeit, im Abstand r von einem Teilchen ein anderes anzutreffen.] $g(r)$ ist seinerseits durch eine Potenzreihe in ρ dargestellt, deren Koeffizienten durch die Mayerschen cluster-Integrale gegeben sind. Durch $g(r)$ ist ferner auch, bei bekanntem Atomformfaktor, die Winkelabhängigkeit der Streuintensität von Röntgenstrahlung gegeben. Nun haben Born und Green aus ihrer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten eine genäherte lineare Integralgleichung für $g(r)$ aufgestellt, die von Fournet [*Acta Cryst.* **4**, 293 (1952)] zur Berechnung der Röntgenstreuung herangezogen wurde. In der vorliegenden Arbeit wird (ohne Born-Green) durch Vergleich mit der statistischen Mechanik gezeigt, daß die Fournetsche Methode richtig ist nur in dem in ρ linearen Glied, und die richtige nächste Näherung ($\sim \rho^2$) wird berechnet.

L. Waldmann.

Thellung, A.: On the hydrodynamics of non-viscous fluids and the theory of helium II. Part II. *Physica* **19**, 217—226 (1953).

Teil I. s. dies. Zbl. **47**, 448. Durch Benutzung der Transformation von Clebsch bringt Verf. die Gleichungen der Hydrodynamik auch in dem allgemeineren Fall, daß Wirbel zugelassen sind, auf kanonische Form. Nach der Quantisierung versucht er dann, Gleichungen zu gewinnen, die Landau für seine Theorie des He II angenommen hat. In etwas anderer Weise und mit besserem Erfolg sind die Landauschen Gleichungen von Ziman (dies. Zbl. **51**, 227) hergeleitet worden. Auch eine Arbeit von Itô (dies. Zbl. **51**, 228) beschäftigt sich mit demselben Problem. *G. Höhler.*

Kronig, R.: On the hydrodynamics of non-viscous fluids and the theory of helium II. Part III. *Physica* **19**, 535—544 (1953).

Die phänomenologischen Gleichungen des Zwei-Flüssigkeiten-Modells des He II werden aus der Landauschen Theorie hergeleitet mit ausführlicher Diskussion der dabei auftretenden Schwierigkeiten.

G. Höhler.

Tyabji, S. F. B.: Classical considerations on the abnormal properties of helium-4. *Nature* **172**, 849—850 (1953).

Atkins, K. R.: The surface tension of liquid helium. *Canadian J. Phys.* **31**, 1165—1169 (1953).

Leist, Margarete: Konzentriertere Elektrolyte. *Wiss. Z. Univ. Rostock, Reihe Math. Natur.* **2**, 187—202 (1953).

Nishiyama, Toshiyuki: A quantum theory of boson assemblies. II. *Progress theor. Phys.* **9**, 245—267 (1953).

Im zweiten Teil wird das Programm des ersten Teils (dies. Zbl. **18**, 447) nicht weitergeführt. Verf. untersucht vielmehr das Kollektivverhalten eines Bosegases mit Hilfe der von Husimi (dies. Zbl. **23**, 286) eingeführten „klassischen“ Dichtematrix sowie eines „klassischen“ Geschwindigkeitsoperators. Dann werden Transportgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt. Linearisierung führt auf eine Theorie der Schallwellen im Bosegas. Es wird gezeigt, daß ein schnelles Teilchen gebremst wird und in Analogie zum Cerenkov-Effekt Schallquanten abstrahlt. Aus der Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Feld der kollektiven Schwingungen aller andern folgen Effekte, die als Selbstenergie bzw. „Møller-Wechselwirkung“ zweier Teilchen bezeichnet werden können.

G. Höhler.

Ziman, J. M.: Bose-Einstein condensation in helium films. *Philos. Mag.* **VII, Ser. 44**, 548—558 (1953).

Verf. behandelt die Bose-Kondensation mit den Methoden von Föwler und Jones (*Proc. Cambridge philos. Soc.* **34**, 573—576 (1938)). jedoch für einen Kasten quadratischer Grundfläche L^2 und der Höhe $D = L$. Die Kondensationstemperatur ergibt sich als abhängig von L und D , insbesondere geht sie gegen Null für $D = \text{const.}$, $L \rightarrow \infty$. Die Ergebnisse werden in Anwendung auf He II-Filme diskutiert.

G. Höhler.

Ecker, G.: Die Stabilisierung des Lichtbogens vor Anode und Kathode. *Z. Phys.* **136**, 1—16 (1953).

Der axiale Temperaturverlauf hängt von der Endkontraktion des in Richtung der Elektroden eingeschnürten Bogens ab. Der in einer früheren Arbeit des Verf. abgeleitete Verlauf gilt nur für einen beschränkten Endkontraktionsbereich. Zerlegt man das Übergangsgebiet von der Säule zur Elektrode in 3 Abschnitte, für die jeweils passende Vereinfachungen in der die Energiebilanz wiedergebenden Differentialgleichung vorgenommen werden, dann kann man den Temperaturverlauf abhängig von der Endkontraktion berechnen. Insbesondere ist im 1. sogen. „Leitungsbestimmten“ Abschnitt, der an die Säule anschließt und noch keine wesentliche Kontraktion aufweist, der axiale Wärmetransport in Richtung zur Elektrode nicht zu vernachlässigen. Es zeigt sich, daß bei einer bestimmten Endkontraktion der Langmuir'sche Sättigungsstrom (d. h. der Strom, der durch die im Plasma durch thermische Ionisation erzeugten Ladungsträger in der Raumladungszone, die sich in unmittelbarer Elektrodenmaße ausbildet, aufrecht erhalten wird) ein druckabhängiges Maximum hat. Höhere Bogenströme sind nicht stabil, es sei denn, daß ein völlig anderer Kathodenmechanismus eintritt (Um Schlag des Bogens, verschiedene Brennflecktypen). Je kleiner der Druck, um so eher tritt dieser Fall ein. Die Vorgänge an der Anode, insbesondere die viel kleinere Kontraktion und die Anodenaufheizung werden ebenso gut erklärt wie diejenigen an der Kathode. Das Steenbecksche Minimumprinzip kann fallen gelassen werden.

E. Palm.

Schirmer, Herbert: Die Strahlung des Xenon-Hochdruckbogens hoher Leistungsaufnahme. II. Theoretische Grundlagen der Bestimmung der Plasmatemperatur und Anwendungen. *Z. Phys.* **136**, 87—104 (1953).

Der Xenon-Hochdruckbogen wird entgegen der Kramers-Ünsöld'schen Theorie auf Grund der gemessenen Spektralverteilung als Graustrahler aufgefaßt. Dann erlauben zwei Beziehungen zwischen Leuchtdichte, Absorptionskoeffizient und Druck, die effektive Temperatur eines beliebigen Xenon-Hochdruckbogens aus Leuchtdichte und Druck zu berechnen, wenn man den Wert einer Konstanten K , die in einer jener Beziehungen auftritt, gefunden hat. K wurde aus Messungen an einer theoretisch leicht zu behandelnden Entladung bestimmt. Das Graustrahler-Modell bewährte sich auch bei der Messung der visuellen Ausbeute der Gesamtstrahlung in Abhängigkeit von der Temperatur, die oberhalb 8800° K abnimmt. Dieser im Vergleich mit der Hohlraumstrahlung (dort etwa 6500° K)

allerdings zu hohe Wert erklärt sich durch den Anteil der Linienstrahlung im Xenon-Bogen.

E. Palm.

Fridkin, V. M.: Zur Theorie der Hochfrequenzentladung. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 8 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 5, 109—114 (1953) [Russisch].

Teltow, J.: Zur Gitteraufweitung von Kristallen durch Zusätze. Ann. der Physik, VI. F. 12, 111—120 (1953).

Es wird bewiesen, daß die aus der Lage der Reflexmaxima röntgenographisch gemessene mittlere Gitterkonstante eines idealen Mischkristalls, in dem die Fremdatome entweder statistisch regellos oder äquidistant auf Gitterplätze der Wirtsatome verteilt sind, gleich ist der pyknometrisch-makroskopisch berechneten. Vorausgesetzt wird hierbei mit K. Huang [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 190, 102—117 (1947)], daß die Wirtsatome umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes von einem Fremdatom radial um den Vektor Δa aus ihrer ungestörten Lage versetzt werden, wobei sich die Störungen aller Fremdatome auf jedes Wirtsatom vektoriell addieren. Um allerdings auf der Oberfläche des Kristalliten nur Tangentialspannungen zu erhalten, ist hierzu bei von 1/2 verschiedener Poissonscher Zahl μ noch ein Verschiebungsanteil hinzuzufügen, der in erster Näherung für genügend große Kristallite (Radius R) vernachlässigbar ist. Für jedes Wirtsatom n gilt für den Verschiebungsvektor Δa_n :

$$\Delta a_n = a^3 \sum_i \left\{ \frac{A}{a_{ni}^2} + \frac{2A(1-2\mu)}{(1+\mu)R^3} \cdot a_{ni} \right\} s_{ni}.$$

Dabei ist a_{ni} der Abstand zwischen n und dem Fremdatom i , s_{ni} ein Einheitsvektor in Richtung von i nach n , a die Gitterkonstante, und es ist die Summe über alle Fremdatome zu erstrecken. Indem Verf. die n - und i -Summen durch Integrale ersetzt, findet er für die mittlere Gitterkonstante den Wert $a(1+\alpha)$ mit $\alpha = 4\pi A c(1-\mu)/(1+\mu)$, wobei c der Quotient aus der Zahl der Fremd- und Wirtsatome ist. Bei Anwesenheit von nur einem Fremdatom in einem hinreichend großen Gitter ergibt sich dagegen das 2,5fache dieses Wertes. Auf die praktische Bedeutung dieser Ergebnisse zur Klärung der Frage, ob in gewissen Kristallen (z. B. AgBr) Schottkysche Fehlordnungen existieren oder nicht, wird hingewiesen.

R. Hosemann.

Haasen, P.: Zur Orientierungsabhängigkeit der Verfestigungskurve kubisch-flächenzentrierter Metallkristalle. Z. Phys. 136, 26—39 (1953).

Die Arbeit befaßt sich mit der in jüngster Zeit in den Vordergrund des Interesses gerückten Orientierungsabhängigkeit der Verfestigungskurve von kubisch-flächenzentrierten Metallen; insbesondere von Reinstaluminium. Zunächst wird als Verfestigungsmodell eine Anordnung von Stufenversetzungen in den betätigten Gleitebenen vorgeschlagen, welches gestattet, das von Kochendörfer zuerst vertretene „Schubspannungsgesetz“ für die Verfestigung in latenten Gleitsystemen abzuleiten. Die Orientierungsabhängigkeit der Verfestigungskurve wird, wie üblich, mit der Mitwirkung von Versetzungen in sog. Nebengleitsystemen in Verbindung gebracht. Als Maß für die Rückwirkung dieser Versetzungen auf solche im Hauptgleitsystem wird der „Lomerfaktor“ f_i genommen. Dieser ist proportional zu der beim Zusammenfügen von Versetzungen, welche verschiedenen Gleitsystemen angehören, zu gewinnenden oder aufzuwendenden Energie. Die Anzahlen der Versetzungen in den verschiedenen Gleitsystemen sollen sich wie die Quadrate (um vom Vorzeichen unabhängig zu werden) der in diesen wirkenden Schubspannungen verhalten; das Produkt aus Anzahl der Versetzungen und zugehörigem f_i soll den „Störeinfluß“ des betreffenden Gleitsystems ergeben. Der Verfestigungsanstieg wird proportional zur Summe der Störfaktoren derjenigen drei Nebengleitsysteme angenommen, die die höchsten Schubspannungen aufweisen. Als wirkende Schubspannungen sind dabei im ersten Teil der Verfestigungskurve die äußere Schubspannung, im zweiten Teil die um die latente Verfestigung verminderte äußere Schubspannung angesetzt. Für Kristallorientierungen in der Nähe der trigonalen Achsen führt der oben erwähnte Ansatz zu einer „Entfestigung“ eines der latenten Systeme. Die gemessenen Verfestigungskurven sind bei Aluminium bei den betrachteten Orientierungen auf dem Rande des stereographischen Dreiecks, insbesondere auf der Symmetralen, in guter qualitativer Übereinstimmung mit der oben gegebenen Diskussion.

A. Seeger.

Saroléa, L.: Influence of volume changes and lattice vibrations in order-disorder transitions. Physica 19, 615—626 (1953).

Es wird eine Verbesserung der üblichen Theorien der Ordnungs-Unordnungsumwandlungen, die von der Vorstellung eines starren Kristallgitters ausgehen, durch Berücksichtigung der Gitterschwingungen und der thermischen Ausdehnung angestrebt. Für eine Reihe von Beispielen wird an Hand von entsprechenden Erweiterungen des Bragg-Williamsschen Modells der Einfluß der Gitterschwingungen und insbesondere der Änderung des mittleren Atomabstandes mit der Temperatur auf die Lage des kritischen Punktes, die Art der Singularität am Umwandlungspunkt

und die spezifische Wärme im geordneten Bereich untersucht. Es ergibt sich, daß der Charakter der Umwandlung erhalten bleibt und daß die Umwandlungstemperatur erniedrigt wird. Der Sprung der spezifischen Wärme am Umwandlungspunkt wird durch Berücksichtigung der oben genannten Faktoren vergrößert. *A. Seeger.*

Buerger, M. J.: Solution functions for solving superposed Patterson syntheses. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **39**, 674—678 (1953).

Es werden in der Theorie der „superposed vector sets“ sog. Lösungsfunktionen definiert und besprochen, die analog zu den „image-seeking functions“ gebildet sind und durch Ungleichungen mit der Elektronendichte im Kristall zusammenhängen. Besprochen werden die Summenfunktion, die Produktfunktion und verschiedene Minimumfunktionen. Die letztgenannten Funktionen geben die stärksten Ungleichungen. *A. Seeger.*

Buerger, M. J.: An intersection function and its relations to the minimum function of X-ray crystallography. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **39**, 678—680 (1953).

Die Eigenschaften der in vorangehender Arbeit besprochenen Summenfunktion werden durch die Einführung einer „intersection function“ verbessert. Es erweist sich, daß diese den doppelten numerischen Wert der Minimumfunktion vom Rang 2 hat. *A. Seeger.*

Booth, Andrew D.: A „zero“ synthesis for Fourier refinements. *Nature* **171**, 168—169 (1953).

Dingle, R. B.: The anomalous skin effect and the reflectivity of metals. *Physica* **19**, 1187—1199 (1953).

Mrozowski, S.: Zone structure of graphite. *Phys. Review, II. Ser.* **92**, 1320—1321 (1953).

O'Rourke, R. C.: Absorption of light by trapped electrons. *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 265—270 (1953).

Berechnung der optischen Absorption von Elektronen in *F*-Zentren. Frühere Ergebnisse von Huang und Rhys (dies. Zbl. **38**, 416) sowie von M. Lax [*J. Chem. Phys.* **20**, 1752—1760 (1952)] werden durch Benutzung der Dichtematrix des harmonischen Oszillators einfacher und in größerer Allgemeinheit erhalten. Die Temperaturverschiebung der Absorptionskurve ergibt sich als Folge einer kleinen Änderung der Gitterfrequenzen beim Elektronenübergang. *G. Höhler.*

Slater, J. C.: An augmented plane wave method for the periodic potential problem. *Phys. Review, II. Ser.* **92**, 603—608 (1953).

Es wird ein neues Verfahren zur Bestimmung von Eielektronen-Wellenfunktionen des Bändermodells vorgeschlagen: Man umgibt die Atome derart mit Kugeln, daß das Potential innerhalb der Kugeln durch ein kugelsymmetrisches, außerhalb durch ein konstantes Potential möglichst gut angenähert werden kann. Die Wellenfunktionen nullter Näherung außerhalb der Kugeln werden als ebene Wellen angenommen und nach innen stetig und mit stetiger Ableitung so fortgesetzt, daß die entstehende Funktion die Schrödingergleichung mit dem genannten Näherungspotential so gut wie möglich erfüllt. Die Lösung des aus dieser Forderung entstehenden Variationsproblems kann explizit angegeben werden mit Hilfe von Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen der Schrödingergleichung innerhalb der Kugeln, welche geeigneten Randbedingungen für den Anschluß an die ebene Welle unterworfen sind. Aus jeder ebenen Welle entsteht so ein Satz von aufeinander orthogonalen Funktionen, welche jedoch nicht orthogonal sind zu den entsprechenden Funktionen, die zu anderen ebenen Wellen gehören. Die endgültigen Näherungslösungen sind dann geeignete Linearkombinationen aus den Wellenfunktionen nullter Näherung. — Das Verfahren ist für gestörte Gitter ebenso gut verwendbar wie für idealperiodische. *W. Brenig.*

Carr jr., W. J.: Use of non-orthogonal wave functions in the treatment of solids, with applications to ferromagnetism. Phys. Review, II. Ser. 92, 28—35 (1953).

Die Gültigkeit des Vektormodells der Heitler-London-Heisenberg-Näherung für den festen Körper wird untersucht. Besteht die Wellenfunktion der Elektronen aus einer einzigen Slaterdeterminante, so läßt sich mit Hilfe der Löwdinschen Entwicklungen [P. O. Löwdin, J. Chem. Phys. 18, 365—375 (1950)] zeigen, daß keine „Überlappkatastrophe“ auftritt. Nimmt man an, daß sich an dieser Tatsache bei Linearkombinationen von Determinanten qualitativ nichts ändert, so lautet die Bedingung für die Gültigkeit des Vektormodells (im Falle eines Elektrons pro Atom): Die Zahl der nächsten Nachbarn, multipliziert mit ihrem Überlappintegral, muß klein gegen Eins sein. Die höheren Näherungen (Wechselwirkung eines Elektrons mit seinen Nachbarkernen und Überlappeffekte zwischen drei verschiedenen Elektronen) werden angegeben und diskutiert.

W. Brenig.

Isay, Wolfgang-Hermann: Beitrag zur Leitfähigkeitstheorie der Halbleiter. Ann. der Physik, VI. F. 13, 327—348 (1953).

Baltensperger, Walter: On conduction in impurity bands. Philos. Mag., VII. Ser. 44, 1355—1363 (1953).

Wohlfarth, E. P.: The energy band structure of a linear metal. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 889—893 (1953).

Das $1-s$ Band einer linearen Kette von Wasserstoffatomen wird nach der Näherungsmethode für feste Bindung bestimmt. Der Einfluß der Nichtorthogonalität von Wellenfunktionen der nächsten und übernächsten Nachbarn wird diskutiert.

W. Brenig.

Niessen, K. F.: Ratio of exchange integrals in connection with angles between partial magnetizations in ferrimagnetic spinels. Physica 19, 1035—1045 (1953).

Es handelt sich um eine Ausdehnung der Molekularfeldtheorie der Ferrite auf solche Substanzen, bei welchen die magnetischen Vorzugsrichtungen für die verschiedenen magnetischen Ionen und Gitterplätze im Kristall verschieden sind. Die spontanen Magnetisierungen der Teilgitter sind dann nicht mehr antiparallel zueinander, sondern bilden im allgemeinen beliebige Winkel miteinander.

G. Heber.

Ledinegg, E. und P. Urban: Über das magnetische Verhalten einer linearen Atomkette am absoluten Nullpunkt bei positivem Austauschintegral. Acta phys. Austr. 8, 167—174 (1953).

Verff. berechnen die Verteilung der Eigenwerte des Austauschenergie-Operators der linearen Kette in der Umgebung des tiefsten Eigenwertes mit Hilfe einer linearen Integralgleichung, ähnlich wie in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 50, 240). Am absoluten Nullpunkt wird hieraus die spontane Magnetisierung bei Anwesenheit eines Magnetfeldes errechnet. Aus dem Resultat glauben Verff. schließen zu müssen, daß die lineare Kette auch bei positivem Austauschintegral nicht ferromagnetisch sein kann, während Ref. gerade das Entgegengesetzte aus denselben Resultaten entnehmen zu können glaubt.

G. Heber.

Juretschke, Hellmuth J.: Exchange potential in the surface region of a free-electron metal. Phys. Review, II. Ser. 92, 1140—1144 (1953).

Nagamiya, Takeo: A tentative interpretation of Bickford's observation of the resonance absorption in magnetite below its transition point. Progress theor. Phys. 10, 72—82 (1953).

Verf. schlägt eine Deutung der von Bickford beobachteten doppelten Resonanzspitzen in Magnetit vor, deren wesentliches Kennzeichen die Annahme einer unvollständigen magnetischen Sättigung des Materials ist. Dabei kommt es auf die Struktur der Weißschen Bezirke durchaus an; es wird eine Struktur angegeben, welche mit den Beobachtungen im Einklang ist. Die Rechnung erfolgt im wesentlichen nach der Kittelschen halbklassischen Methode zur Behandlung solcher Resonanzen.

G. Heber.

Oguchi, Takehiko: On the spin wave theory of Bloch wall. *Progress theor. Phys.* **9**, 7—13 (1953).

Der Diracsche Austauschenergie-Operator wird aufgeschrieben für eine lineare Kette von N Spins, deren Quantisierungsrichtungen von Gitterpunkt zu Gitterpunkt um den gleichen Winkel $\theta = \pi/N$ gegeneinander verdreht sind. Die Diagonalisierung dieses Operators wird mittels der Kramers-Hellerschen Spinwellenmethode genähert durchgeführt. Man kann die freie Energie des Systems als Funktion von θ in einer gewissen Näherung (für tiefe Temperaturen) angeben und aus einer Extremalforderung an diese Größe den Parameter N ermitteln. Damit hat man die Dicke der Blochwand erhalten, sie ist genau wie in der klassischen Theorie $\sim (\text{Austauschenergie}/\text{Anisotropieenergie})^{1/2}$. *G. Heber.*

Néel, Louis: L'anisotropie superficielle des substances ferromagnétiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 1468—1470 (1953).

Verf. macht auf eine neue Art von Anisotropie-Energie aufmerksam, welche den anisotropen magnetischen Wechselwirkungen benachbarter Atome an der Oberfläche des Kristalles entspringt. Diese Energie ist proportional zur Oberfläche des Kristalles, während die bisher beachtete Anisotropie-Energie zum Volumen proportional ist. Insbesondere bei Pulvern aus kleinen Kristalliten oder geschichteten, dünnblättrigen magnetischen Substanzen dürfte diese Oberflächenanisotropie eine wesentliche Rolle spielen. *G. Heber.*

Busch, G. und E. Mooser: Die magnetischen Eigenschaften der Halbleiter mit besonderer Berücksichtigung des grauen Zinns. *Helvet. phys. Acta* **26**, 611—656 (1953).

Dingle, R. B.: Low-temperature diamagnetism of electrons in a cylinder. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 1320 (1953).

Wangsness, Roald K.: Sublattice effects in magnetic resonance. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1085—1091 (1953).

Berechnung der Resonanzfrequenzen nach der üblichen halbklassischen Methode unter Annahme verschiedener gyromagnetischer Faktoren für die verschiedenen Teilgitter. *G. Heber.*

Schafroth, M. R.: Spin-wave theory of antiferromagnetism for simple cubic lattices. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 553 (1953).

Kubos Behandlung des Spinwellenproblems der Antiferromagnetika mittels der Variationsmethode (dies. Zbl. **50**, 239) wird auf das einfach-kubische Gitter angewandt. (Kubo betrachtete das kubisch-raumzentrierte Gitter.) Die hierbei auftretenden transzendenten Funktionen (gewisse Integrale über Bessel-Funktionen) sind numerisch ermittelt worden. *G. Heber.*

Yosida, Kei: Theory of antiferromagnetism. *Annual Rep. sci. Works Fac. Sci., Osaka Univ.* **1** (1952), 19—38 (1953).

Die Molekularfeldtheorie des Antiferromagnetismus wird in verschiedener Richtung verfeinert bzw. verallgemeinert, um bessere Übereinstimmung der Aussagen der Theorie mit den betreffenden empirischen Daten zu erhalten. Es handelt sich um folgende Punkte: Eine genauere Diskussion der Form und des Ursprungs der Anisotropie-Energie. — Explizite Einführung dieser Energie in die Molekularfeldtheorie. — Beachtung des Falles, in dem das äußere Magnetfeld stärker wird als das Anisotropiefeld. — Stabilitätskriterien für den antiferromagnetischen Zustand. *G. Heber.*

Kanô, Kenzi and Shigeo Naya: Antiferromagnetism. The Kagomé Ising net. *Progress theor. Phys.* **10**, 158—172 (1953).

Fröhlich, H.: Superconductivity and lattice vibrations. *Physica* **19**, 755—764 (1953).

Marcus, Paul M. and E. Maxwell: Two-fluid models of superconductivity with application to isotope effects. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1035—1042 (1953).

Philbert, Georges: Sur une définition et le calcul des coefficients d'auto-induction des supraconducteurs. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 1403—1405 (1953).

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben

- Abdelhay, J. (Mathematische Analysis. I.) 287.
- Abraham, A. and R. V. Pound (Angular correlations) 441.
- Abramowitz, Milton (Differential equation occurring in heat convection in laminar flow) 69; (Integral $\int_0^{\infty} e^{-u^2 - z/u} du$) 98.
- Achiezer, N. I. (Schwache Gewichtsfunktionen) 301. — — — und S. N. Bernštejn (Gewichtsfunktionen) 300.
- Aczél, J. („Klassische“ orthogonale Polynome) 304.
- Agarwal, Ratan Prakash (Note de M. P. Humbert) 308; (Hypergeometric identities) 308.
- Agostini, Amedeo (Archimede) 242.
- Ahrens, Tino (Interaction in beta-decay. II.) 440.
- Aigner, Alexander (Klassen-Gruppe eines quadratischen Körpers) 268.
- Alaga, G., O. Kofoed-Hansen and A. Winther (Interaction in β -decay) 439.
- Albert, A. A. (Power-associative algebras) 23.
- Alekseev, A. s. V. Babič 415.
- Alexits, G. (Einfluß einer Funktion auf Konvergenz fast überall ihrer Fourier-Reihe) 302.
- Alguneid, A. R. (Complete quadric primals) 119.
- Aliaga, C. A. Costa s. Costa
- Aliaga, C. A. 7.
- Allen, E. F. (Inversive geometry) 117.
- Althuler, Saul (Exchange scattering of an electron) 224; (Binary rearrangement collision) 446.
- Amaldi, E., L. Mezzetti and G. Stoppini (Development of air showers) 222.
- Amar, Henri and Carl Oberman (Nonplanar circuit) 192.
- Ambrosino, Georges, Jean Houbault et Paul Maignan (Photons d'annihilation des électrons) 211.
- Ambrosino, Georges s. Jacques des Cloizeaux 212.
- Andersson, Bengt J. (Constant of Koebe) 311.
- Andreotti, Aldo (Superficie irregolari) 378.
- Andress, W. R., W. Saddler and W. W. Sawyer (Perspective triads) 376.
- Ansari, A. R. (Theorem on matrices) 275.
- Antonescu, M. (Théorème de Hilbert) 383.
- Antosiewicz, H. A. and J. M. Hammersley (Numerical iteration) 347.
- Aoi, T. s. S. Tomotika 173.
- Aotani, Kiyo (Uniform space) 399.
- Aoyama, Hirojiro (Chi-square test) 368.
- Apéry, Roger (Fonctions de variable réelle) 44.
- Apté, Achuyt (Onde solitaire) 184.
- Arfwedson, G. (Collective risk theory) 373.
- Armellini, G. (Problema dei due corpi di masse variabili) 237.
- Armistead, W. s. C. O. Tuckey 376.
- Arnous, E. and W. Heitler (Line-breadth phenomena) 212.
- Arnowitz, R. (Structure of hydrogen) 448. — — — and S. Deser (Meson-nucleon equation) 215.
- Arsove, Maynard G. (Network postulates) 192.
- Ascoli, Guido (Integrali dell'equazione $y'' = (1 + f(t))y$) 66.
- Atanasjan, L. S. (In zentroaffinen Raum eingebettete Mannigfaltigkeiten) 397.
- Atkins, K. R. (Surface tension of liquid helium) 450.
- Austern, N. (Interaction effect in n - p capture) 217.
- Ayant, Yves, Maurice Buyle-Bodin et François Lubat (Résonance quadrupolaire) 221.
- Aymerich, Giuseppe (Oscillazioni) 195; (Teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche) 195.
- Ayoub, R. G. (Waring-Siegel theorem) 282.
- Azorin Poch, Francisco (t-Verteilung) 359.
- Azuma, Shūkō s. K. Hasegawa 443.
- Babič, V. und A. Alekseev (Dünne elastische Schicht) 415.
- Bachmann, Karl-Heinz (Graeffesches Verfahren) 347.
- Bacon, Ralph Hoyt („Best“ straight line) 110.
- Bade, W. L. and Herbert Jehle (Spinors) 207.
- Bader, R. s. P. Germain 75. — W. (Austrittsquerschnitt bei Zyklonen) 423.
- Baer, Reinhold (Nilpotent characteristic subgroups) 16; (Group elements of prime power index) 257.
- Bagchi, S. N. s. R. Hosemann 453.
- Bagemihl, F. s. V. V. Novoshilov 163.
- Baiada, Emilio (Equazione alle derivate parziali) 73.
- Baidaff, Bernardo I. (Bestimmtes Integral eines exakten Differentials) 44; (Systeme von Gleichungen) 94.
- Bailey, Norman T. (Analysis of intra-household epidemics) 111. — W. N. (Sum of a terminating ${}_3F_2$. I.) 308.
- Balaguer, F. Sunyer i s. Sunyer i Balaguer, F. 57, 310, 337.
- Balazs, N. L. (Energy-momentum tensor) 200.
- Baltensperger, Walter (Conduction in impurity bands) 453.
- Bambah, R. P. (Lattice coverings) 283.
- Banaschewski, Bernhard (Konstruktion wohlgeordneter Mengen) 39.

- Banbury, P. C. (Injecting point contacts) 232.
- Band, William (Diamagnetism of electrons) 232.
- Banerjee, C. C. (Proton-proton scattering) 442.
- Banerji, R. B. (Random fading characteristics) 199.
- Bang, Thøger (Infinitely differentiable functions) 44.
- Bar-Hillel, Yehoshua (Recursive definitions) 245.
- Baranger, M., H. A. Bethe and R. P. Feynman (Lamb shift) 212.
- Barbot, Jacques (Jeu de Nain Jaune) 358.
- Barker, J. A. (Interacting dipoles) 188.
- Barner, Martin (Komplexflächen. I.) 392.
- Barnes, E. S. (Linear forms) 35.
- Barthel, Woldemar (Inhaltsbegriff) 396.
- Bartle, Robert G. (Functional equations) 345.
- Bartsch, Helmut (Hyperflächengewebe) 387.
- Basu, D. (Production of π -mesons) 445.
- Bateman, E. H. (Solution by iteration) 347.
- P. T. s. E. Landau 280.
- Bates, D. R. and A. Dalgarno (Electron capture. III.) 224.
- — — G. Griffing (Inelastic collisions. I.) 225.
- — — Kathleen Ledsham and A. L. Stewart (Hydrogen molecular ion) 225.
- Batson, F. J. s. G. W. Bird 408.
- Batuner, L. M. und M. E. Pozin (Chemische Technik) 288.
- Baudez, Gaston (Distributions) 107.
- Baudoux, Pierre (Potentiel vecteur) 192.
- Bauer, E. (Vibrational spectrum of sodium) 229.
- Baumann, Kurt (Bindungszustände) 438.
- Baur, Arnold (Gleichungen) 94.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 207, 208, 437.
- Beck, F. (Energie-Impulstensor in der Supraleitung) 233.
- Beckwith, Ivan E. (Dissociation in stagnation region of a body) 172.
- Behari, Ram s. P. B. Bhattacharya 385.
- Behnke, Heinrich (Aufbau der Mathematik) 1.
- Behrbohm, Hermann (Tragflächentheorie) 174; (Flat triangular wing) 177.
- Bekefi, G. (Diffraction of electromagnetic waves) 197.
- Belgrano, J. C., A. Lopez Nieto und J. M. Urcelay (Nomographie) 98.
- Belinfante, Frederik J. (Pions from production of baryons by protons) 217; (Magnetic moments of neutron) 221; (Magnetic moment of elementary particles) 221.
- Bellin, Albert I. (Non-autonomous systems) 321.
- Bellman, Richard (Probability theory. I.) 356; (Dynamic programming) 374; (Functional equations in dynamic programming) 374.
- Belov, N. V. (Kristallographische Symmetrie) 228.
- Benard, A. and Ph. van Elteren (Method of m rankings) 368.
- Benedicty, Mario (Geometria algebrica astratta) 120.
- Benedikt, Elliot T. (Opennose body of revolution) 181.
- Benoist-Gueutal, P. (Radioactivité β) 220.
- Bereis, R. (Symmetrische Rollung) 409.
- Berezina, L. Ja. (Zweiseitig stratifizierbare Paare) 386.
- Berge, Claude (Problème du gain) 358.
- Berger, W. J. s. E. Saibel 348.
- Bergmann, Peter G. and Alice C. Thomson (Onsager relations) 187.
- Berkson, Joseph (Estimating the bio-assay) 110.
- Berlin, T. H., L. Witten and H. A. Gersch (Imperfect gas) 428.
- Berman, Gerald (Finite projective plane geometries) 113.
- Bernard, Jean Joseph (Vitesse d'agitation moléculaire) 188.
- Bernštejn, S. N. s. N. I. Achiezer 300.
- Bers, Lipman (Pseudo-analytic functions) 316; (Linear elliptic systems) 317.
- Bersohn, R. s. J. Wenener 213.
- Bertolini, Fernando (Funzioni omogenee) 45; (Teorema di Abel) 55; (Teorema di Jacobi) 331; (Traiettorie luminose) 434.
- Beth, E. W. (Theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel-Malev) 6.
- Bethe, H. A., L. Maximon and F. Low (Bremsstrahlung) 221.
- — — s. M. Baranger 212.
- Beurling, Arne (Riemann mapping theorem) 60.
- Beyer, Rudolf und Ernst Schörner (Raumkinematische Grundlagen) 382.
- Bhatia, A. B. and W. J. Noble (Diffraction of light. I. II.) 433.
- Bhatnagar, K. P. (Self-reciprocal functions) 335.
- Bhattacharya, P. B. and Ram Behari (Sannia's quadratic forms) 385.
- Bieberbach, Ludwig (Satz Pólyascher Art) 57.
- Bilimovitch, Anton (Déflexion d'une fonction non analytique) 62; (Équations de nature vélocidique) 383.
- Binet, F. E. (Positive binomial distribution) 372.
- Bing, R. H. (Connected countable Hausdorff space) 139.
- Bini, Umberto (Discendenza napoleonica) 115.
- Bird, G. W. (Mechanics) 408.
- Birindelli, Carlo (Sistemi lineari ai differenziali totali) 73.
- Birkhoff, Garrett (Induced mass) 169.
- Birman, S. E. (Harter Stempel auf elastischer Schicht) 410.
- Birnbaum, Allan (Comparing Poisson processes) 108.
- Z. W. (One-sided test) 364.
- Biswas, S. N. (Radiation damping) 442.
- Blackwell, J. H. (Radial-axial heat flow) 189.
- Blanc-Lapierre, A. (Problèmes de mécanique statistique) 358.
- et Robert Fortet (Fonctions aléatoires) 357.

- Blanch, Gertrude (Parabolic partial differential equations) 351.
- Bland, D. R. (Boundary of an elastic solid) 410.
- Blanuša, Danilo (Espaces elliptiques) 387.
- Blaschke, W. (Topologische Differentialgeometrie) 386; (Osservazioni sui tessuti) 386.
- Blenk, Hermann (Ludwig Prandtl †) 4.
- Bloch, F. s. R. K. Wangsness 223.
- Block, H. D. (Contact transformations) 325; (Errors in nonlinear problems) 349.
- I. Edward (Kernel functions) 62.
- Bloom, Martin (Boundary layers) 175.
- Blunden, W. R. s. W. H. Wittrick 411.
- Boaga, Giovanni (Triangolo geodetico ellissoidico) 148.
- Boas jr., R. P. (Tauberian theorem) 58; (Functions of exponential type) 58.
- Bochner, S. s. K. Yano 394.
- Bodiu, Georges (Fonction d'onde $\psi(M_1, \dots, M_i, \dots, M_N)$) 206.
- Bodmann, Hans-Walter (Bewertung vorgegebener Beleuchtungen) 198.
- Bodmer, A. R. (Nuclear scattering of electrons) 223.
- Boer, J. de (Liquides monoatomiques) 227; (Cayley form and Barsotti form) 123.
- Bohm, David (Probability density) 205.
- Böhm, Friedrich (Versicherungsmathematik. II.) 111.
- Bohr, Aage and Ben R. Motelson (Nuclear structure) 443.
- Bol, Gerrit (Vierseite von Demoulin) 127; (Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt) 127.
- Bolie, Victor Wayne (Periodic orbits) 153.
- Bompiani, Enrico (Complessi lineari) 377.
- Bonati, Savorgnan, Carlo (Derivazione di funzioni composte) 42.
- Bonnor, W. B. (Field theories) 204.
- Booth, Andrew D. („Zero“ synthesis for Fourier refinements) 452.
- Booth, A. D. and K. H. V. Booth (Automatic digital calculators) 354.
- K. H. V. s. A. D. Booth 354.
- Bopp, Fritz (Grundprozeß der Quantentheorie der Elementarteilchen) 204; (Statistisches Modell) 205.
- Bordoni, Piero Giorgio (Girazione baricentrale) 152.
- Borel, A. (Groupes de Lie compacts) 19.
- Boreli, Mladen (Écoulement de révolution) 183.
- Borkmann, K. (Hilfsfunktionen) 102.
- Borsuk, K. (Cartesian division by manifold) 402.
- Bortolotti, Ettore s. P. Ruffini 250.
- Bory, Charles (Diffusion) 189.
- Bouchez, R. et R. Nataf (Transitions β et structure nucléaire. III.) 440.
- Bouligand, Georges (Énoncé stable) 135.
- Bowden, B. V. (Digital computing machines) 353.
- Box, G. E. P. (Tests on variances) 108; (Tests of kurtosis) 108.
- Brafman, Fred (Bessel polynomials) 305.
- Brahmachary, R. L. (Modèle statique de cosmologie. I. II.) 202.
- Brandsen, B. H. and A. Dalgarno (Autoionization probabilities. I. II.) 224.
- — —, — — and N. M. King (Scattering by ions. II.) 224.
- Breidenbach, W. (Delisches Problem) 116.
- Breit, G. s. R. L. Gluckstern 212.
- Breny, H. (Thickness in random slivers) 106.
- Bressan, Aldo (Deformazioni dei corpi cristallini) 162.
- Brewster, J. (Cauchy's existence theorem) 326.
- Brodskij, M. L. (Fehler bei numerischer Integration) 350.
- Bromberg, J. (Whittaker's confluent hypergeometric function) 54.
- Brousse, Pierre (Problème de Dirichlet singulier) 78.
- Browder, Félix (Problème des vibrations) 328.
- Brown, Arlen (Class of operators) 343.
- Brudno, A. L. (Toeplitzsche Felder) 46; (Toeplitzsche Matrizen) 46.
- Brueckner, K. A., M. Gell-Mann and M. Goldberger (Damping of virtual nucleon-pair formation) 442.
- — — and K. M. Watson (Potentials in quantum field theory) 213; (Nuclear forces) 215.
- Bruhat, François (Représentations induites) 341.
- Bruijn, N. G. de (Factorization of cyclic groups) 258.
- — — and W. M. Zaring (G. c. d. algorithms) 275.
- Bruins, E. M. (Babylonian mathematics) 242.
- Bucerius, H. (Bahnbestimmung. IV.) 236.
- Buchdahl, H. A. (Equations of gravitational field) 201.
- Buckingham, M. J. (Interaction of electrons) 235.
- Buckthought, K. (Liquid helium) 227.
- Budini, P. (Interazione alla Fermi) 214.
- — e G. Poiani (Urti nucleone-nucleone) 214.
- — e L. Taffara (Radiazione di Cerenkov) 222.
- Buerger, M. J. (Superposed Patterson syntheses) 452; (Intersection function) 452.
- Bukovics, E. (Numerische Integration. I. II.) 350.
- Buran, Werner (Veronese-Relationen) 122; (Relazioni quadratiche d'una grassmanniana) 122; (Klassifikation der Grassmann-Relationen) 122.
- Burdina, V. I. (System von Differentialgleichungen) 323.
- Bureau, Florent (Problème de Cauchy) 75.
- Burgat, Paul (Problèmes aux limites) 326.
- Burton, W. K. and B. F. Touschek (Schwinger's dynamical principle) 210.
- Busbridge, Ida W. (Coherent and non-coherent scattering) 237.
- Busch, G. und E. Mooser (Halbleiter) 454.
- Bush, Robert R. and Frederick Mosteller (Stochastic model) 356.

- Butcher, P. N. (Field equations) 191.
- Butzer, P. L. (Bernstein polynomials) 50.
- Buyle-Bodin, Maurice s. Yves Ayant 221.
- Buzano, Piero (Trasformazioni puntuali) 389.
- Caacciopoli, Renato (Integrazione k -dimensionale) 294.
- Cade, R. (Problems involving anisotropic bodies) 192.
- Cadwell, J. H. (Distributions of measures of dispersion) 107; (Linear cyclic transformations) 117.
- Cafiero, Federico (Funzioni additive) 41.
- Cahn, A. S. s. David S. Saxon 155.
- Calabi, Eugenio (Isometric imbedding) 131.
- — and Beno Eckmann (Compact, complex manifolds) 403.
- Calapso, Renato (Reti derivate dalle reti 0) 126; (Geometria conforma) 388.
- Calderon, A. P. and H. B. Mann (Stochastic integrals) 104.
- Callahan, J. J. (Symbolism) 244.
- Cameron, R. H. and R. E. Fagen (Transformations of Volterra type) 345.
- Campbell, C. G. and J. Kyles (β -ray spectrometer) 199.
- Candido Gomes, Marco Expedito (Reeller Drehungsoperator) 381.
- Cap, Ferdinand (Spinortheorie der Elementarteilchen. I. III.) 208; (Pseudoscalar meson theory) 439.
- Capildeo, R. (Flexure with shear centres) 161.
- Caprioli, Luigi (Sistemi di equazioni lineari) 94; (Comportamento dei modi TEM nei cavi coassiali) 196.
- Capriz, Gianfranco (Trasformata parziale di Laplace) 83, 336.
- Carin, V. S. (Minimalbedingung für Normalteiler) 16.
- Carlitz, L. (Bernoulli functions) 7; (Formulas of Rodeja F.) 7; (Orthogonal matrices) 9; (Bernoulli and Euler polynomials) 250; (Bernoulli and Euler numbers) 276; (Congruences of Vandiver) 276; (Kummer's congruences) 276, 277; (Bernoulli and Euler polynomials) 307; (ζ -function) 311.
- Carlitz, L. and J. Riordan (Eulerian numbers) 276.
- Caro, E. de (Variazione degli elementi orbitali) 236.
- Carr jr., W. J. (Non-orthogonal wave functions) 452.
- Carrelli, A. (Separabilità delle variabili) 408.
- Carrier, O. F. (Boundary layer problems) 423.
- Carruccio, Ettore (Giovanni Vacca) 244.
- Casotti, M. Walcher s. Walcher Casotti, M. 2.
- Cassels, J. W. S. (Minkowski's theorem) 283; (Diophantine approximation) 286.
- Cassirer, Ernst (Substance and function) 202.
- Castagnoli, C., G. Cortini, C. Franzinetti, A. Manfredini and D. Moreno (Investigation on jets) 446.
- Castoldi, Luigi (Teoria delle connessioni) 133; (Connessione affine integrale) 133.
- Castro, Antonio de (Oscillazioni dei sistemi) 67; (Oscillazioni non-lineari) 67.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Divina proporzione) 242.
- Cecconi, Jaurès (Integrali sopra una superficie) 295; (Superficie di Fréchet) 295; (Teorema di Stokes) 296; (Teorema di Gauss-Green) 296; (Definizioni di variazione totale) 296.
- Čečik, V. A. (Methode von S. A. Čapligin) 351.
- Cernjaev, M. P., N. M. Nestorovič und N. M. Ljapin (D. D. Morduchaj-Boltovskoj) 244.
- Cester, E. e E. Clementel (Tracce elettrofotoniche) 447.
- Četković, Simon (Zéros réels) 251.
- Chakrabarty, N. K. (Bate-man's k -function) 307; (Operational calculus) 336.
- Chamberlin, Eliot and James Wolfe (Homomorphisms of matrices) 24; (Trigonometric identities) 251.
- Chandra Das, Sisir (Elastic distortion of a hole) 413.
- Chandrasekhar, F. R. S. (Onset of convection) 239.
- Chandrasekhar, S. (Optical activity of quartz) 432.
- Chang, Han and V. C. Rideout (Modulation spectra) 98.
- Kai-Yi s. Tsing-Tsuan Kou 226.
- Charles, Bernard (Anneau commutatif d'opérateurs linéaires) 24.
- Charzyński, Z. (Transformations isométriques) 85.
- Chaundy, T. W. (Second-order linear differential equations) 70.
- Chenea, P. F. (Impedance method to continuous systems) 169.
- Chern, Shiing-shen (Complex sphere bundles) 143.
- Chester, W. (Shock waves) 423.
- Chintschin (Chinčin), A. J. (Entropie) 107.
- Chisini, O. (Postulato di Euclide) 113; (Piani multipli) 378.
- Chitty, Dennis s. P. H. Leslie 110.
- Helen s. P. H. Leslie 110.
- Chong, Frederick (Boussinesq problem) 410.
- Christoph, Kathryn s. E. Mar-den 355.
- Chung, K. L. (Correction to „Fluctuations“) 356.
- Tong-Der (Pairs of plane curves) 127.
- Cimino, Massimo (Equilibrio stellare) 237.
- Cimmino, Gianfranco (Equazioni alle derivate parziali) 327.
- Cini, M. and S. Fubini (Adiabatic nuclear potential) 445.
- Cinquini-Cibrario, Maria (Equazioni non lineari di tipo iperbolico) 75.
- Clagett, Marshall (Medieval mathematics and physics) 243.
- Clarion, Claire s. Jacques Valensi 183.
- Clark, C. E. (Statistics) 359.
- Clementel, E. s. R. Cester 447.
- Clifford, A. H. (d -simple semigroups) 13.
- Cloizeaux, Jacques des et Georges Ambrosino (Annihilation d'un positron) 212.
- Clunie, James (Quasi-monotone series) 46.
- Cobb, R. H. (Geometry of triangle) 114.

- Cochran, W. G. (Sampling techniques) 107.
- Codegone, Césaire (Flow through pipes) 417.
- Coelho, R. Pereira s. Pereira Coelho, R. 399.
- Cohen, Bernard L. (Nuclear reactions) 447.
- Eckford (Congruence representations) 277.
- Kalman Joseph („Intuitionistic theory of deduction“) 6.
- Cohn, H. s. J. H. Giese 176.
- Paul and Kurt Mahler (Composition of pseudovaluations) 28.
- Cole, A. J. (Diophantine approximation) 36.
- Collatz, Lothar (Einschließungssätze) 8; (Funktionalanalytische Methoden) 95.
- — und Henry Görtler (Rohrströmungen) 419.
- Colombo, G. (Teorema di dinamica) 150; (Sistema quasilineare) 153; (Moto di due corpi) 153; (Oscillazioni forzate) 194.
- Colonnetti, Gustavo (Théorème de réciprocité) 164.
- Colucci, Antonio (Maggiorazione dei polinomi) 10.
- Combe, René et Marc Feix (Mouvement d'un électron) 435.
- Conforto, Fabio (Superficie abeliane impure) 123; (Funzioni abeliane) 379.
- Conkling, Randall and David Ellis (Metric groupoids) 253.
- Consiglio, Alfonso (Dinamica di punti vincolati) 153.
- Conte, Luigi (Huygens) 3.
- S. D. and W. C. Sangren (First order equations) 324.
- Conti, Roberto (Equazioni differenziali ordinarie) 324; (Integrali del calcolo delle variazioni. I. II.) 331.
- Cooke, J. C. s. L. Sowerby 170.
- K. L. (Differential-difference equations) 321.
- Richard G. (Banach-Hausdorff limits) 90.
- Copeland, sr., A. H. and Frank Harary (Boolean rings) 21.
- Corben, H. C. (Nuclear forces) 445.
- Corinaldesi, E. (Scattering theory) 436.
- Cornell, R. W. (Stresses in cemented lap joints) 411.
- Corominas, Ernest (Dérivation d'ordre supérieur) 42.
- Cortini, G. s. C. Castagnoli 446.
- Costa, M. A. Fernandes (Grenzwerte von Folgen) 45.
- Aliaga, C. A. (Cyclic number 142857) 7.
- de Beauregard, Olivier (Principe des potentiels retardés) 207; (Intégrales de Fourier covariantes) 208; (Théorie du photon) 437.
- Cottrell, A. H., S. C. Hunter and F. R. N. Nabarro (Interaction of a dislocation and a solute atom) 231.
- Couffignal, Louis (Cybernétique) 112.
- Courant, R. and D. Hilbert (Mathematical physics. I.) 288.
- Court, N. A. (Pascal's theorem) 118.
- Cox, D. R. (Tests for Poisson variates) 108.
- Craemer, H. (Momenten- und Spannungsausgleich) 414.
- Craig, C. C. (Populations of flying insects) 110; (Neighboring cells in contingency tables) 367.
- Cramér, Harald (R. von Mises' work) 244.
- Crandall, Stephen H. (Stability criterion) 72.
- Cremer, L. (Stabilitätskriterien) 10.
- Crispin, J. W. s. K. M. Siegel 306.
- Croisot, Robert (Demi-groupes) 253.
- s. M. L. Dubreil-Jacotin 260.
- Cuesta, N. (Deduktive Ordnungsmodelle) 289.
- Cugiani, Marco (Punti esclusi dalle coperture) 37; (Frazioni continue) 37.
- Dacey, G. C. (Current in germanium) 234.
- Dalenius, Tore (One-stage stratified sampling) 108; (Multivariate sampling problem) 366.
- Dalgarno, A. s. D. R. Bates 224.
- s. B. H. Brandens 224.
- Darbo, Gabriele (Estremo assoluto per integrali) 80.
- Darling, B. T. and P. R. Zissel (Finite displacement operators) 208.
- Darmois, G. (Liaisons stochastiques) 360.
- Das, S. Chandra s. Chandra Das, S. 413.
- Daudel, Raymond (Corpuscules dans les noyaux) 226.
- Davenport, H. (Product of n linear forms) 35.
- David, F. N. (Multivariate normal integral) 103.
- — and M. G. Kendall (Symmetric functions. IV.) 107.
- H. A. (Power function of some tests) 108.
- Davies, T. V. (Rotating viscous liquid) 239.
- Davin, Marcel (Résistance d'une éprouvette) 188.
- Davis, Martin (Arithmetical problems) 245.
- Philip (Differential operators) 93.
- Robert L. (Structures of finite relations) 247.
- De Giorgi, Ennio s. Giorgi, Ennio De 294.
- Dean, W. R. (Green's function of an elastic plate) 160.
- Deaux, R. (Cubiques anallagmatiques) 119; (Deux complexes quadratiques) 377.
- Debreu, Gerard and I. N. Herstein (Nonnegative square matrices) 9.
- Decuyper, Marcel (Surfaces) 128.
- Dedò, M. (Classica superficie I. III.) 380.
- Deeg, Emil (Diffusion) 190.
- Deicke, Arno (Finsler-Räume) 130; (Darstellung von Finsler-Räumen) 130.
- Delachet, André (Résistance des matériaux) 410.
- Delange, Hubert (Diviseurs premiers de n) 35; (Théorème de Pólya) 56.
- Delerue, Paul s. Pierre Humbert 55.
- Deming, W. Edwards (Economic balance) 366.
- Demkov, Ju. N. (Variationsprinzipien und Virialsatz) 205.
- Denjoy, Arnaud (Ordnation des ensembles) 290.
- Deresiewicz, H. s. R. D. Mindlin 412.
- Derwidu, L. (Variétés exceptionnelles) 121.

- Descombes, Roger (Approximation non homogène) 284; (Théorème d'Hurwitz) 284.
- Deser, S. s. R. Arnowitt 215.
- Desoyer, K. und A. Slibar (Pendel-Schwingungstilger) 150; (Kolbenmaschinen) 155.
- s. A. Slibar 415.
- Devaney, Joseph J. (Alpha decay. I.) 220.
- Devienne, F. Marcel (Conduction thermique) 429.
- Dexter, D. L. (Angle scattering of X-rays) 231.
- Dienemann, W. (Wärmeübergang an umströmten Körpern) 175.
- Dieudonné, Jean (Unitary groups. II.) 18.
- Dinghas, Alexandre (Fonctions sougharmoniques) 79; (Fonctions sougharmoniques bornées) 79.
- Dingle, H. (Science and Modern Cosmology) 202.
- R. B. (Magnetic properties of metals. VI.) 233; (Anomalous skin effect) 452; (Diamagnetism of electrons) 454.
- Dini, Ulisse (Opere. I.) 1.
- Dirac, G. A. (Colouring of maps) 147.
- Dixmier, J. (Bases orthonormales) 338.
- Dixon, W. J. (Power functions of sign test) 363.
- Dmitriev, A. A. (Durchgang langer Wellen durch ein Hindernis) 424.
- Doetsch, Gustav (Lineare Differentialgleichung) 68.
- Domenicali, Charles A. (Irreversible thermodynamics of thermoelectric effects) 426.
- Donnert, Hermann (Spinortheorie der Elementarteilchen. II.) 208.
- Dörr, Johannes (Integrale mit Bessel-Funktionen) 54; (Integrale über Produkte von Besselfunktionen) 305.
- Dou, P. Alberto (Ebene Viergewebe) 126.
- Dreyer, J. L. E. (History of astronomy) 407.
- Droussent, Lucien (Cubiques circulaires anallagmatiques) 120.
- Dubreil, P. (Demi-groupes. III.) 253.
- Dubreil-Jacotin, M. L., L. Lesieur et R. Croisot (Théorie des treillis) 260.
- Duffin, R. J. (Discrete potential theory) 72.
- Dufresnoy, J. et Ch. Pisot (Ensemble fermé d'entiers algébriques) 29, 282.
- Dugas, René (Huygens devant le système du monde) 3.
- Dumitras, V. (Espaces A_3) 397.
- Duncan, D. B. (Undamped systems) 156.
- Dunge, J. W. (Magneto-hydrostatic problem) 238.
- Duparc, H. J. A., C. G. Lekkerkerker and W. Plemans (Sequences of integers) 274.
- Durand, Émile (Identité) 206.
- Dussart, R. L. G. (Complexe invalidité-décès) 373.
- Dutta, M. (Quasi-lattice theory of real gases) 188.
- Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz (Sequential decision problems) 366.
- Dyke, G. V. s. M. J. R. Healy 353.
- Dyson, F. J. (Fourier transforms of distribution functions) 84; (Mass-renormalization) 210; (Tamm-Dancoff method) 210.
- Ecker, G. (Lichtbogen) 450.
- Eckmann, Beno s. E. Calabi 403.
- Eden, R. J. (Bound states. II.) 210.
- Effertz, H. F. (Beschränkte Funktionen) 195.
- Egerváry, E. (Projector matrices) 249.
- Egorov, I. P. (Bewegungen in Räumen mit affinem Zusammenhang) 132.
- Eguchi, T. and M. Ohta (Capture of μ -mesons) 441.
- s. Julian K. Knipp 222.
- Einstein, Albert (Éther et relativité) 199.
- Eisenhart, Luther P. (Generalized Riemann spaces) 130.
- Elizarov, I. V. (Hydraulischer Stoß) 425.
- Elliott, R. J. and K. W. H. Stevens (Magnetic resonance experiments) 233.
- Ellis, David (Parallelogram law characterization) 86; (Cross-associativity) 252; (Metric representations of groups) 259.
- Ellis, David and Gaines Lang (Space of groupoids) 138.
- s. R. Conkling 253.
- H. W. and Israel Halperin (Function spaces) 87.
- El'sgol'c, L. E. (Differenzen-Differentialgleichungen) 350.
- Elste, G. (Entzerrung von Spektrallinien) 237.
- Elteren, Ph. van s. A. Bernard 368.
- Eltermann, Heinz (Kurvenintegrale) 98.
- Emersleben, Otto (Selbstpotential äquidistanter Ladungen) 430.
- Epstein, Benjamin and Milton Sobel (Life Testing) 365.
- and Chia Kuei Tsao (Some tests) 365.
- Erdélyi, Arthur (Funzioni epicicloidali) 305.
- W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (Transcendental functions. I.) 303.
- Erdős, Paul (Kleine Schwingungen) 154; (Polynomials) 277.
- and G. A. Hunt (Sums of random variables) 103.
- and R. Rado (Ordered sets) 40.
- Ericksen, Jerald Laverne (Equations of motion) 182.
- Eršov, B. A. (Stabilität eines automatischen Reglersystems) 409.
- Erwe, Friedhelm (Lücken bei Laurentreihen) 56.
- s. E. Peschl 64, 309.
- Eshelby, J. D. (Motion of dislocation) 231.
- Espagnat, Bernard d' (Section efficace) 216.
- Est, W. T. van (Group cohomology. I. II.) 260.
- Estermann, Theodor (Primitive lattice points) 33.
- Evans, Trevor (Multiplicative systems. II.) 11.
- Fabre de la Ripelle, Michel (Équations de perturbation. III.) 206.
- Fabri, E. (Diffusione dei mesoni) 217.
- Fabricius-Bjerre, Fr. (Geometrie. I.) 117.

- Fadini, Angelo (Elementi di aritmetica) 274.
- Faedo, Sandro (Equazioni algebriche a coefficienti reali) 252; (Calcolo delle variazioni) 332.
- Fagen, R. E. s. R. H. Cameron 345.
- Falk, Gottfried (Klassische Mechanik und Quantenmechanik) 204.
- Falkenstein, Adam (Babylonische Schule) 2.
- Fano, U. (High-energy radiations) 221.
- Favre, Henry (Mécanique. I.) 149.
- Federhofer, Karl (Belasteter Kreisringträger) 162.
- Feix, Marc s. R. Combe 435.
- Fejes Tóth, L. (Kreisausfüllungen) 113; (Kreisüberdeckungen) 114.
- Feldman, David (Nucleon-nucleon interaction) 442.
- Fergusson, H. B., J. Kudar and R. B. Harvey (Stress distribution) 412.
- Ferretti, B. (Diagonalizzazione della hamiltoniana. II.) 209.
- Feshbach, Herman s. Ph. M. Morse 406.
- Feynman, R. P. s. M. Baranger 212.
- Fichera, Gaetano (Equazioni differenziali lineari) 327.
- Fieschi, R. and F. G. Fumi (High-order matter tensors) 229.
- Finikov, S. P. (S. S. Bjušgens) 243; (Stratifizierbare Paare) 383.
- Finkelstein, R. and P. Kaus (Beta interaction) 440.
- Finkelštejn, B. V. (Grenzverteilungen der Glieder der Variationsreihe) 104.
- Finn, Robert (Minimal surfaces) 125.
- Fisher, Ronald (Dispersion) 371.
- Walter D. (Pooling problem) 362.
- Fitting, F. s. H. Schubert 6.
- Flanders, Harley (Linear frames in Riemannian geometry. I.) 393.
- Florian, H. (Abstrahlung einer Lecherleitung) 196.
- Flügge-Lotz, Irmgard (Automatic control) 156.
- Fodor, G. (Generalized continuum hypothesis) 289.
- Foldy, Leslie L. (Nuclear photoeffect) 219.
- Föllinger, Otto (Variationsprobleme mit Gefällebeschränkung) 332.
- Foote, Richard J. (Graphic multiple correlation) 369.
- Föppl, Ludwig (Ringschalen) 162; (Mittelwertsatz) 410.
- Forster, Herbert (Grenzwertsatz) 47.
- Forte, Bruno (Proprietà cinematiche) 153.
- Fortet, Robert s. A. Blanc-Lapierre 357.
- Fosdick, Lloyd D. and Herbert M. James (Order-disorder problems) 230.
- Foster, Alfred L. (Universal algebras. I.) 22; (II.) 262.
- F. G. (Stochastic matrices) 106.
- Fraïssé, Roland (Ordre des nombres rationnels) 38.
- Francis, N. C. and K. M. Watson (Elastic scattering) 216.
- Franckx, E. (Chaîne de Markoff) 356.
- Frank, F. C. and J. F. Nicholas (Dislocations in crystal lattices) 230.
- V. (Hall effect) 234.
- Frankl', F. I. (Relativitätstheorie) 200; (Sandwellen) 417.
- Franqui, Benito and Mariano Garcia (Multiply perfect numbers) 278.
- Franzinetti, C. s. C. Castagnoli 446.
- Fraser, P. A. and W. R. Jarman (Vibrational transition probabilities. I.) 225.
- — s. W. R. Jarman 226.
- Fréchet, Maurice (Fonctions hypercomplexes) 63; (Rectification) 248.
- Freedman, Benedict (Symmetric homogeneous sum) 7.
- Freeman, G. H. (Spread of diseases) 111.
- Freistadt, Hans (Electromagnetic mass) 209.
- French, J. B. and Y. Shimamoto (Multipole radiation) 197.
- Frenkiel, F. N. (Turbulent diffusion) 421.
- Freud, Géza (Lebesguesche Funktionen) 48.
- Freudenthal, Hans (Groupe exceptionnel E_8) 259.
- Frey, Gerhard (Mehrwertige Logiken) 245.
- Freytag Löringhoff, Bruno Baron von (Lehre von Identität und Verschiedenheit) 244.
- Fridkin, V. M. (Hochfrequenzentladung) 451.
- Friedman, F. L. and W. Tobočan (Deuteron stripping) 219.
- Friedrichs, K. O. (Linear elliptic differential equations) 327.
- Frisch, Harry L. (Equipartition principle) 188.
- Fröhlich, H. (Superconductivity) 454.
- Frühauf, Hans (Besselsche Differentialgleichung) 195.
- Fubini, S. s. M. Cini 445.
- Fuchs, Aimé (Théorie des processus de Markoff) 105; (Processus stochastiques réels de Markoff) 105.
- Fujimoto, Yoichi, Satio Hayakawa and Kazuhiko Nishijima (Rearrangement collisions) 222.
- Fukui, Kiyoshi s. K. Tomita 449.
- Fulton, Curtis M. (Weierstrass tensors) 381.
- Fumi, F. G. s. R. Fieschi 229.
- Funaioli, Ettore (Slittamento elastico) 151.
- Fung, Y. C. (Dynamic loads) 155.
- Furtwängler, Ph. (Algebraische Zahlen) 267.
- Futterman, Anne s. E. Marden 355.
- Gadd, G. E. (Laminar or turbulent boundary layers) 175.
- Gagliardo, Emilio (Funzioni simmetriche semplici) 9; (Convergenza uniforme) 51; (Integrali dell'equazione differenziale $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$) 68; (Equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$) 320.
- Gale, David (Inscribing sets in a n -simplex) 134.
- Galerkin, B. G. (Werke. II.) 158.
- Gallarati, Dionisio (Complessi lineari) 123.
- Galli, M. (Rotazione terrestre) 243.
- Gallone, S. (Utilizzazione termica) 447.
- Gal'pern, S. A. (Cauchysches Problem) 326.
- Gamba, A. (Independent components of tensors) 222.

- Gamba, A. e Luigi A. Radicati (Rappresentazioni del gruppo simmetrico) 259.
- Gambier, B. (Potentiels circulaires) 118.
- Ganea, Tudor (Symmetrische Produkte) 402.
- Garabedian, P. R. (Oblique water entry of a wedge) 171; (Orthogonal harmonic polynomials) 305.
- García, Mariano s. B. Franqui 278.
- García, C. Sáenz s. Sáenz García, C. 148.
- Gáspár, R. und A. Kónya (H.J.-Molekül) 225.
- Gatteschi, Luigi (Polinomi di Jacobi) 306.
- Gatto, R. (Scattering of μ -mesons) 216; (Momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti) 221.
- Gauss, Ch.-Fr. (Recherches arithmétiques) 30.
- Geary, R. C. (Functional relationship) 370.
- Gebelein, Hans (Verfahren von Mosteller und Tuckey) 360.
- Geiringer, Hilda (Ideal plastic body) 413.
- Gel'fond, A. O. (Primzahlverteilung) 34.
- Gell-Mann, M. and M. L. Goldberger (Scattering) 435.
- s. K. A. Brueckner 442.
- Georgiev, G. (Mechanische Quadratur) 97; (Mechanische Quadraturformeln) 97.
- Gerber, Nathan s. John C. Martin 178.
- Germain, F. et R. Bader (Équations aux dérivées partielles du type mixte) 75.
- Germay, R. H. (Equations intégrales-différentielles récurrentes) 334.
- Germeier, Ju. B. und D. S. Irger (Lineare Differentialgleichungen) 319.
- Gersch, H. A. s. T. H. Berlin 428.
- Gerstenhaber, Murray (Discontinuous groups) 402.
- Ghizzetti, Aldo (Ricerche abeliane e tauberiane) 336.
- Gianuzzi, Maria (Equazioni integro-differenziali) 334.
- Gibellato, Silvio (Macchina „G. A. Philbrick“) 354.
- Gibert, René (Phénomènes irréversibles) 420.
- Giese, J. H. and H. Cohn (Conical flows) 176.
- Giesekus, Hanswalter (Statistisches Prüfverfahren) 360.
- Gilbarg, D. and D. Paolucci (Structure of shock waves) 181.
- Gilles, J. M. (Cycle de Bethe-Weizsäcker) 220.
- Ginsburg, S. (λ -type transfinite series) 289; (Everywhere branching sets) 289.
- Giorgi, Ennio De (Espressione analitica del perimetro) 294.
- Glandsdorff, P. (Production d'entropie) 426.
- Glaser, Walter und Peter Schiske (Bildstörungen) 435.
- Gleason, A. M. s. R. E. Greenwood 104.
- Gluck, S. E. (Electronic computer) 100.
- Gluckstern, R. L. and M. H. Hull jr. (Polarization of Bremsstrahlung cross section) 212.
- — — — — and G. Breit (Bremsstrahlung radiation) 212.
- Godeaux, Lucien (Surfaces canoniques) 121; (Involution di Geiser) 121; (Involution de Geiser) 378; (Suite de Laplace) 390.
- Gödel, K. (Continuum hypothesis) 289.
- Godwin, H. J. (Theorem of Khintchine) 285.
- Goldberg, S. I. (Lie algebras) 23.
- Goldberger, M. s. K. A. Brueckner 442.
- L. s. M. Gell-Mann 435.
- Goldhaber, J. K. (Lie k system automorphisms) 264.
- M. („New unstable particles“) 446.
- Goldstein, Jack S. (Salpeter-Bethe two-nucleon equation) 438.
- — s. E. E. Salpeter 218.
- Goldstine, H. H. s. J. von Neumann 281.
- Golubev, V. V. (Bewegungsgleichungen eines starren Körpers) 151.
- Gomes, A. Pereira s. Pereira Gomes, A. 420.
- M. E. Candido s. Candido Gomes, M. E. 381.
- Gomes, Ruy Luís (Invarianzprinzip) 148.
- Good, I. J. (Serial test) 362; (Population frequencies) 371.
- Goodman, Leo A. (Measuring useful life of equipment) 366.
- Goodstein, R. L. (Recursive function theory) 246.
- — — and E. J. F. Primrose (Projective geometry) 376.
- Goormaghtigh, R. (Géométrie infinitésimale) 120.
- Gorowara, K. K. (Distribution of generators of ruled surfaces) 385.
- Görtler, Henry s. L. Collatz 419.
- Gorup, Guntram v. (Strömungsfunktionen) 176.
- Goto, Morikuni (Topological groups) 19.
- Gottschalk, W. H. (Intersection and closure) 138.
- Gotusso, Guido (Onde sulla superficie) 183.
- Gould, S. H. s. O. Ore 243.
- Grafi, Dario (Equazioni delle oscillazioni) 154.
- Grammel, R. (Selbsterregter Kreisel) 152.
- Green, H. S. (Field quantization) 210.
- s. H. Messel 446.
- J. W. (Convex functions) 200.
- Greenwood, Robert E. (Probabilities of card games) 102; (Number of cycles) 247.
- — — and A. M. Gleason (Round-off errors for running averages) 104.
- Thomas (Valeur explicative des mathématiques) 244.
- Gregg, C. V. (Reciprocal nomograms) 90.
- Greig, John (Technical developments) 354.
- Grémillard, Jean (Problème des trois corps) 157; (Solutions périodiques) 157.
- Griffin, G. s. D. R. Bates 225.
- jr., Ernest L. (Rings of operators) 343.
- Griffith, J. Stanley (Conjugated molecules. II.) 225.
- Grinstein, Louisa S. (Real roots of polynomial equations) 251.
- Gröbner, W. und P. Lesky (Eigenschwingungen eines Kreisinges) 415.

- Groot, S. R. de, P. Mazur and H. A. Tolhoek (Irreversible phenomena) 186.
 — — — s. G. A. Kluitenberg 185.
 — — — s. H. Holtan jr. 187.
 — — — s. P. Mazur 426.
 Gross, Wolf (Attrazione newtoniana) 409.
 Grossmann, Aleksandar (Ensembles ordonnés) 39.
 — D. P. (Numerische Differentiation) 97.
 Großman, Walter (Ausgleichsrechnung) 372.
 Grottemeyer, K. P. (Verbiegung konvexer Flächen) 383; (Gleitverbiegungen) 384.
 Grothendieck, Alexandre (Espaces de fonctions holomorphes. I. II.) 87; (Équations aux dérivées partielles) 88.
 Gruder, Osias (Zerlegung von Permutationen) 248.
 Gruenberger, F. (Table of prime numbers) 35.
 Grün, O. (Gruppentheorie. V.) 257.
 Guderley, Gottfried (Shocks in subsonic - supersonic flow patterns) 422.
 — — and Hideo Yoshihara (Flow patterns at Mach number 1.) 176.
 Guest, P. G. (Doolittle method) 109.
 Guevel, Pierre (Transformation de Schwartz-Cristoffel) 183.
 Guggenbuhl, Laura (Henri Crocard) 114.
 Gulmanelli, P. (Non-local field theories) 211.
 Gumowski, Igor (Slowly converging series) 45.
 Günther, Gotthard (Nicht-Aristotelische Logik) 245.
 Gupta, Hansraj (Möbius function) 33.
 Gurland, John (Distribution of quadratic forms) 355.
 Gutiérrez Novoa, Lino (Antimetrischer quadratischer Raum) 117.
 Guttenberg, W. von (Kapazität des Kreisplattenkondensators) 192.
 Gvozdkov, N. N. und M. F. Širokov (Turbulente Reibung) 422.
Haacke, Wolfhart (Nicht-lineare Mechanik) 153.
 Haar, D. ter (Origin of the solar system) 238.
 Haas, Felix (Global behavior of differential equations) 324.
 Haase, Rolf (Irreversible Prozesse. III.) 425.
 Haasen, P. (Verfestigungskurve von Metallkristallen) 451.
 Hagen, G. B. (Elektronenbahnen in Potentialfeldern) 434.
 Hahn, Wolfgang (Geometrische Differenzengleichung) 155.
 Hails, J. S. s. E. J. Hopkins 118.
 Haimo, Franklin (FC-chain) 15.
 Hakala, Reino W. (Integration of functions $e^{azf(x)}$) 298.
 Haken, H. (Wechselwirkung zwischen Elektron und Gitteroszillator) 235.
 Haldane, J. B. S. (Estimation of two parameters) 371.
 Hall, Newman A. (Nonequilibrium thermodynamics) 185.
 Halperin, Israel s. H. W. Ellis 87.
 — Max (Effect of birth order) 368.
 Halphen, Étienne (Remarquable identité) 305.
 Hamada, Tetsuo und Masao Sugawara (Lévy's fourth order potential) 214.
 — Tetuo (Magnetic moment anomaly) 443.
 — — s. T. Matsumoto 443.
 Hamaker, H. C. (Binomial probabilities) 109.
 Hamburger, Hans Ludwig (Differential operators) 322.
 Hammer, P. C. and Andrew Sobczyk (Planar line families. I.) 135.
 Hammersley, J. M. (Counters with random dead time. I.) 106; (Elliptic integrals) 355.
 — — — s. H. A. Antosiewicz 347.
 Hanai, Siiro (T-closure operators) 260.
 Hanani, Haim (Sums of series) 45.
 Haneman, V. S. s. R. M. Howe 351.
 Hansen, Chr. (Lebensversicherung) 111.
 Hara, Hisao (Cauchy's product series theorem) 45.
 Harary, Frank and Robert Z. Norman (Husimi trees) 405.
 — — s. A. H. Copeland sr. 21.
 Harrington, C. F. and J. M. Hyslop (Strong summability) 45.
 Harish-Chandra (Semisimple Lie group. I.) 340.
 Harmann, Willis W. (Electronic motion) 198.
 Harrington, Roger F. (Propagation along a slotted cylinder) 195.
 Harris, T. E. and Herbert Robbins (Ergodic theory of Markov chains) 105.
 Hartman, Philip and Aurel Wintner (Non-oscillatory differential equations) 65; (Differential and difference equations) 71; (Real binary differential systems) 71; (Elliptic Monge-Ampère equations) 77; (Convex surfaces) 123; (Riemannian manifolds) 128.
 Harvey, R. B. s. H. B. Ferguson 412.
 Hasegawa, Kazu and Shūkō Azuma (π -nucleon scattering) 443.
 Hasenjaeger, G. (Henkin's Beweis) 5.
 Hasikuni, Mitugi (Plasma oscillations) 227.
 Haslam-Jones, U. S. (Generalized derivative) 298.
 Hasse, H. s. Ph. Furtwängler 267.
 Hayakawa, Satio s. Yoichi Fujimoto 222.
 Hayman, W. K. (Integral function with defective value) 58.
 Healy, M. J. R. and G. V. Dyke (Hollerith technique) 353.
 Heath, Sir Thomas (Works of Archimedes) 242.
 Heber, G. (Quantenstatistik) 428.
 Hedrick, E. R. s. Felix Klein 6.
 Heinrich, G. (Schwingungsmittelpunkt) 150; (Energietransport) 175.
 Heins, Maurice (Conformal mapping of Riemann surfaces. I.) 61.

- Heinz, C. (Überschallströmungen) 179.
- Heisenberg, Werner (Quantum-electrodynamics) 209.
- Heitler, W. s. E. Arnous 212.
- Hellwig, Günter (Anfangs- und Randwertprobleme) 76.
- Henley, E. M. and M. A. Ruderman (Nuclear forces) 216.
- Henriksen, Melvin and J. R. Isbell (Real roots of algebraic equation) 340.
- Hepner, W. A. and D. R. Workman (Bhabha's theory) 208.
- Herbeck, M. (Wärmeaustausch) 429.
- Herbst, Robert Taylor (Differential systems) 73.
- Herdan, G. (Small particle statistics) 428.
- Herpin, A. (Forces de polarisabilité) 231.
- Herstein, I. N. (Class of rings) 25; (Theorem on rings) 25; (Article de M. Tumuraru) 263.
- s. Gerard Debreu 9.
- Herzberger, M. (Approximate methods) 94.
- Hewitt, Edwin (Fourier-Stieltjes transforms) 18; (Measures in Boolean algebras) 292.
- Heyting, A. (Philosophie des mathématiques) 244.
- Hickerson, T. F. (Spiraled compound curves) 352.
- Higgins, T. P. and A. W. Straiton (Electromagnetic resonant cavity) 196.
- Hilbert, D. s. R. Courant 288.
- Hildebrandt, T. M. (Integration) 42.
- Hille, Einar (Laplace transforms) 335.
- Hilton, P. J. (Homotopy theory) 403.
- Hines, C. O. (Reflection of waves) 168.
- Hinteregger, H. (Induktionserscheinungen bei Materiebewegung. III.) 430.
- Hiong, King-Lai (Fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles) 59; (Fonctions holomorphes dans le cercle unité) 59.
- Hirzebruch, Friedrich (Steenrod's reduced powers) 145.
- Hitotumatu, Sin (Dirichlet problem) 78; (Maximal ideals of analytic functions) 87.
- Hitschfeld, Walter, s. J. S. Marshall 432.
- Hjelmlev, Johannes (Géométrie sensible) 376.
- Hjelte, F. s. O. Holme 170.
- Hlavatý, V. (Spinor connection) 203; (Einstein's two unified theories of relativity) 203; (Differential line geometry) 391.
- and A. W. Sáenz (Unified theory of relativity) 203.
- Hoek, U. H. van der (Calculation of α_x) 373.
- Hoerni, Jean A. and James A. Ibers (Electron scattering) 223.
- Hoffman, A. J. and H. W. Wielandt (Spectrum of a normal matrix) 9.
- Hofmann, Jos. E. (Altindische Berechnung von π) 242.
- Hoheisel, Guido und Jürgen Schmidt (Totale Ordnung in Bäumen) 39.
- Holme, O. and F. Hjelte (Pressure distribution on wings) 170.
- Holtan jr., H., P. Mazur and S. R. de Groot (Thermocouples and thermocells) 187.
- Holzer, Ludwig (Ternäre quadratische Formen) 31.
- Homma, T. (Jordan curve theorem) 401.
- and H. Terasaka (Plane translation of Brouwer) 147.
- Hönl, Helmut (Machsches Prinzip) 201.
- und Eva Zimmer (Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt. II.) 197.
- Hoop, A. T. de (Propagation constant) 195.
- Hopf, Eberhard (Correction to inequality for minimal surfaces) 126; (Minimal surfaces) 126.
- H. (Vom Nullstellensatz zur Homotopietheorie) 141.
- Hopkins, E. J. and J. S. Hails (Plane projective geometry) 118.
- Hori, Shoichi (Transition amplitude) 211.
- Hornich, Hans (Partielle Differentialgleichungen) 74; (Equazioni lineari a derivate parziali) 74.
- Horowitz, J. et A. M. L. Mes-siah (Réactions (dp) et (dn)) 446.
- Horváth, Jean (Itération de la transformée de Hilbert) 90; (Primzahlen. IV.) 280.
- Houbault, Jean s. Georges Ambrosino 211.
- Householder, Alston S. (Numerical analysis) 346.
- Hove, J. and J. A. Krumhansl (Lattice sums for cubic crystals) 229.
- Howe, J. W. s. H. Rouse 415.
- R. M. and V. S. Haneman (Electronic differential analyzer) 351.
- Hsu, P. L. (Matrices) 367.
- Hu, Hai-Chang (Continuous beams on elastic foundation) 411.
- Sze-tsen (Homotopy addition theorem) 403.
- Hughes, J. B. (Paper by K. H. T'zou) 210.
- Vernon s. W. Perl 226.
- Hukuhara, Masuo (Théorème de Kneser) 297.
- Huldt, Lennart (Maß-System der Elektrizitätslehre) 148.
- Hull jr., M. H. s. R. L. Gluckstern 212.
- Humbert, Pierre et Paul Dellerue (Fonction de Mittag-Leffler) 55.
- Hunt, G. A. s. P. Erdős 103.
- J. N. (Gravity waves) 184.
- Hunter, H. E. s. K. M. Siegel 306.
- S. C. s. A. H. Cottrell 231.
- Huppert, Bertram (Faktorisierbare Gruppen) 16.
- Husimi, Kôdi and Masuhiko Ôuka (Elementary quantum mechanics. III.) 435.
- Hwang, Chintsun (Plastic collapse) 414.
- Hyrenius, Hannes (Ranges in comparing small samples) 365.
- Hyslop, J. M. s. C. F. Harington 45.
- Ibers, James A. s. Jean A. Hoerni 223.

- Ibrahim, Z. (Ionospheric current systems) 240.
 Iguchi, S. (Eigenschwingungen und Klangfiguren) 167.
 Infeld, L. (Dirac's electrodynamics) 191.
 — — and J. Plebański (Electrodynamics) 190.
 Ingarden, R. S. (Bewegungs- und Feldgleichungen) 202.
 Inglis, D. R. (Light nuclei) 218.
 Ingraham, Richard L. (Linear partial differential equation) 74; (Spin-collineation space) 398.
 Inkeri, K. (Fermatsches Problem) 280.
 Inzinger, Rudolf (Drehungen vom Faltungstypus) 86.
 Irger, D. S. s. Ju. B. Germejer 319.
 Iribarne, Julio V. und Dora G. de Kowalewski (Schwingungsfrequenzen) 229.
 Isay, Wolfgang - Hermann (Leitfähigkeitstheorie) 453.
 Isbell, J. R. (Homogeneous spaces) 139.
 — — s. M. Henriksen 340.
 Iséki, Kiyoshi (Anneaux normés de Hilbert. II.) 91.
 Ishaq, M. (Four-point matrices) 249.
 Ishii, Yoshihito (Riemannian space) 393.
 Itô, Hiroshi (Hydrodynamics) 228.
 — Noboru (Linear fractional group) 259.
 Iwasawa, Kenkichi (Extensions of algebraic number fields) 266.
 Izumi, Shin-ichi (Approximation problem) 48; (Trigonometrical series. V.) 302.
Jackson, James R. (Partial ordering) 39.
 — T. A. S. (Degeneracy of hydrogen) 206.
 Jacob, L. and J. R. Shah (Symmetrical electron lens) 198.
 Jacobs, P. (Transformations pseudo-adiabatiques) 426.
 Jaeckel, K. (Profil geringer Dicke) 170.
 Jaffard, Paul (Groupes ordonnés) 13.
 Jager, J. de (Mortality tables) 373.
 Jaglom, A. M. und M. S. Pinsker (Zufällige Prozesse) 105.
 Jakobi, R. (Parabeigenschaften) 116; (Orthogonal-axonometrisches Bild) 147.
 Jakovkin, M. V. (Reduzibilität von Polynomen) 251; (Aufsuchen von irreduziblen Faktoren) 251.
 James, Hubert M. s. Lloyd D. Fosdick 230.
 — I. M. (Factor spaces) 141.
 Jan, J.-P. (Phénoménologie des conductibilités électrique et thermique) 187.
 Janenko, N. N. (Einbettung Riemannscher Metriken) 128.
 Janković, Zlatko (Hermite's and Laguerre's differential equation) 307.
 Jarman, W. R. and P. A. Fraser (Vibrational transition probabilities. II.) 226.
 — — s. P. A. Fraser 225.
 Jasper, Renee s. E. Marden 355.
 Jeger, M. (Nomographie) 352.
 Jehle, Herbert s. W. L. Bade 207.
 Jehne, W. s. Ph. Furtwängler 267.
 Jekhowsky, Benjamin de (Orbites paraboliques) 236.
 Jenkins, James A. (Univalent functions). 312.
 Jensen, Arne (Markoff chains) 356.
 Johansson, Ingebrigt (Formalization of constructive theories) 244.
 John, Fritz (Linear elliptic equations) 328.
 Johnson, John L. and J. L. McHale (One-body resonances) 222.
 — N. L. (Sequential methods) 361.
 — R. E. (Prime rings) 24; (Imbedding of a ring) 265.
 Jonas, Hans (Differentialgleichung der Affinsphären) 387.
 Jones, D. S. (Eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$) 77.
 — F. Burton (Collections of sets) 290.
 Jongmans, F. (Géométrie kählerienne) 130.
 Jordan, Pascual (Nichtkommutative Verbände) 20.
 — — und Ernst Witt (Schrägverbände) 21.
 Jouvin, Jacqueline (Spectre d'énergie des électrons) 216.
 Judin, M. I. s. D. L. Laichtman 425.
 Juhos, Béla (Wahrscheinlichkeitsschlüsse) 244.
 Julia, Gaston (Géométrie infinitésimale. I.) 380.
 — — s. M. L. Dubreil-Jacotin 260.
 Juncosa, M. L. and D. M. Young (Fourier coefficients) 51.
 Jung, H. (Niederhalterdruck beim Tiefziehen) 164; (Rotations-symmetrische Körper) 414.
 Juretschke, Hellmut J. (Exchange potential) 453.
Kac, M., W. L. Murdock and G. Szegő (Hermitian forms) 303.
 Kaempffer, F. A. (Electromagnetic vacuum) 191; (I.) 192; (Gravitational waves) 200.
 Kahane, A. and A. Solarski (Supersonic flow) 179.
 Kainer, Julian H. (Load distribution) 180.
 Kalitzin, Nikola St. (Neue Kerntheorie) 213.
 Källén, Gunnar (Renormalization technique) 209.
 Kaluza jr., Theodor (Faktoren in beliebigen Graphen) 405.
 Kamynin, L. I. (Wärmeleitungsgleichung. I. II.) 76.
 Kanô, Kenzi and Shigeo Naya (Antiferromagnetism) 454.
 Kanold, Hans-Joachim (Ungerade vollkommene Zahlen) 279; (Befreundete Zahlen. II.) 279.
 Kanter, I. s. E. H. Lee 168.
 Kantz, Giorgio (Radici dell'unità) 268.
 Kaplansky, Irving (Quadratic forms) 29; (Modules over operator algebras) 91; (Operators with property L) 92.
 Kapuano, Isaac (Courbes dont l'homéomorphie se prolonge à R^3) 146.
 Karlin, Samuel (Random walks. I.) 106; (Infinite games) 107; (Vector functions) 296.
 Karunes, B. (Concentration of stress) 161; (Distribution of stress) 161.

- Karush, W. and A. V. Martin (Thermal contraction) 430.
- Kasch Friedrich (Untermolden des Endomorphismenrings) 27; (Riccatische Differentialgleichung) 29; (Annäherung algebraischer Zahlen) 36.
- Kashiwagi, Sadao s. S. Ozaki 317, 318.
- Katayama, Yasuhisa (Interactions with higher derivatives) 438.
- Kato, Tosio (Operators T^*T) 92.
- Kaufman, Allan N. (Strong coupling theory) 215.
- H. s. R. L. Sternberg 71.
- Kaus, P. s. R. Finkelstein 440.
- Kawada, Yukiyosi (Ramification theory) 269.
- Kawaguchi jr., Michiaki (g -extensor analysis) 381.
- Keilson, Julian (Diffusion of decaying particles) 232.
- Keldyš, L. V. s. N. N. Luzin 291.
- Keller, Joseph B. (Bowling of violin strings) 168; (Image method) 329.
- — — and Mortimer Weitz (Reflection and transmission coefficients) 196.
- Kemp, Nelson H. and W. R. Sears (Aerodynamic interference) 172.
- Kendall, David G. (Stochastic processes in theory of queues) 105.
- M. G. s. F. N. David 107.
- Kertész, A. (Theorem of Kulikov) 256.
- Kesava Menon, P. (Positive forms) 249.
- Kestin, J. and S. K. Zaremba (Ordinary differential equations) 66.
- Keune, Friedrich (Velocity distribution on high-aspect-ratio wings) 177; (Flow around low aspect ratio wings) 177; (Influence of camber and twist on wings) 177.
- Khanna, Girja s. S. M. Shah 59.
- Kiefer, J. s. A. Dvoretzky 366.
- Kilmister, C. W. (Quaternion approach to meson theory) 437.
- King, E. P. (Rejection of suspected data) 362.
- King, N. M. s. B. H. Branden 224.
- Kirchhoff, A. (Topologische Algebra) 142.
- Kita, Hideji (Equation of motion) 437.
- Kitagawa, Tosio (Stochastic considerations) 109.
- Kitkin, P. A. (Strömungen in Meeren und Ozeanen) 425.
- Klamkin, M. S. (Buffon needle problem) 356.
- Klein, Abraham (Tamm-Dancoff formalism) 214; (Adiabatic nuclear potential. II.) 215.
- Felix (Elementary mathematics) 6.
- G. et I. Prigogine (Phénomènes irréversibles. III.) 427.
- H. and R. Sedney (Analyzing dynamic flight-test) 182.
- Klein-Barmen, Fritz (Pseudoverband) 21.
- Kleinfeld, Erwin (Simple alternative rings) 25.
- Kleinman, R. E. s. K. M. Siegel 306.
- Klimczak, W. J. (Differential operators) 57.
- Klimov, A. I. (Nullstellen der L -Funktionen) 33.
- Kluitenberg, G. A., S. R. de Groot and P. Mazur (Irreversible processes. I.) 185.
- Knaster, B. et M. Reichbach (Lemme sur les F_σ) 400; (Ensemble des bouts d'une courbe) 400; (Prolongements des homéomorphismes) 401.
- et K. Urbanik (Espaces complets séparables) 401.
- Kneser, Martin (Dichte von Summenmengen) 281.
- Knight jr., Bruce W. (Canonical field theory) 209.
- Knipp, Julian K., Tetsuo Eguchi, Masao Ohta and Shozo Nagata (Ionization of gas) 222.
- Knoche, Hans-Georg (Frobeniusscher Klassenbegriff. II.) 17.
- Knödel, Walter (Carmichael-sche Zahlen) 31.
- Ko, Dja-Cha (Integro-Differentialgleichungen) 82.
- Kochendörffer, Rudolf (Réductible schiefe Produkte) 256; (Einbettungsproblem für abelsche Algebren) 266.
- Kodaira, K. (Cohomology groups of analytic varieties) 145.
- and D. C. Spencer (Groups of complex line bundles) 145; (Divisor class groups) 146.
- Koecher, Max, (Kronecker-sche Grenzformel) 318.
- Koenig, J. Frank (Zeros of polynomials) 153.
- Kofoed-Hansen, O. s. G. Alaga 439.
- Koiter, W. T. (Aufsatz Woinowsky-Kriegers) 164.
- Kolmogorov, A. N. (Begriff des Algorithmus) 245.
- Koltynov, M. A. (Platte nach Verlust der Stabilität) 415.
- Komatu, Yūsaku (Boundary value problems) 77; (Neumannsche Randwertaufgabe) 78.
- Komm, H. s. V. V. Novosilov 163.
- Komoda, Toshiya and M. Sasaki (Proton-neutron interaction) 217.
- Konopinski, E. J. and H. M. Mahmoud (Fermi interaction) 214.
- Kónya, A. s. R. Gáspár 225.
- Koppe, H. (Quantum radiation) 437.
- Korevaar, Jacob (Best L_1 approximation) 300.
- Korobov, N. M. (Verteilung von Bruchteilen) 286.
- Kou, Tsing-Tsuan and Kai-Yi Chang (Diamagnetic susceptibilities) 226.
- Kovancov, N. I. (Kanonisches Büschel) 389.
- Kovásznay, Leslie S. G. (Turbulence in supersonic flow) 422.
- Kowalewski, Dora G. de s. Julio V. Iribarne 229.
- Kraitichik, Maurice (Mathématique des jeux) 6; (Récréations mathématiques) 6.
- Krasil'nikov, V. A. und V. I. Tatarskij (Streuung des Schalls) 168.
- Krasner, Marc (Extensions d'une certaine forme) 28, 267.
- Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij (Integraloperatoren) 343.
- Krauskopf, Konrad Bates (Physical science) 148.

- Kreis, H. (Orthogonalpolynome) 54.
- Kreisel, O. (Diagonal method) 6.
- Krejn, M. G. (Čebyšev-Markovsche Ungleichung) 69.
- Krettner, J. (Theorie der Schalen) 162; (Rotationschalen) 163.
- Krickeberg, Klaus (Darstellungen oberer und unterer Integrale) 294.
- Krieger, Rudolf (Aberrationsfunktionen 2. Grades) 198.
- Krienes, Klaus (Planimeterbeziehungen) 352.
- Krilov, A. N. s. J. A. Lappo-Danilevsky 323.
- Krishna, Shri s. R. Sh. Mishra 385.
- Kroll, N. M. s. J. Wenner 213.
- Kron, Gabriel (Solutions of physical systems) 194.
- Kronig, R. (Non-viscous fluids and helium II. III.) 449.
- Krooth, Robert S. (Univariate discrimination) 361.
- Krubeck, Eleonore (Zerfällungen) 277.
- Krull, Wolfgang (Homomorphismen von Polynomgruppen) 255.
- Krumhansl, J. A. s. J. Hove 229.
- Kruse, U. E. s. N. F. Ramsey 218.
- Krzywoblocki, M. Z. V. (Wing in supersonic range) 180.
- Kudar, J. s. H. B. Fergusson 412.
- Kudrjavcev, L. D. (Differenzierbare Abbildungen) 43.
- Kuerti, G. (Principle of angular momentum) 150.
- Kuessner, H. G. (Unsteady lifting surface theory) 174.
- Kuh, Ernest Shiu-jen (Loss functions) 431.
- Kuipers, L. (Distribution modulo 1) 286.
- and B. Meulenbeld (Continued fraction) 37.
- Kuo, Y. H. (Incompressible viscous fluid) 173.
- Kupradze, V. D. (Stationäre elastische Schwingungen) 166.
- Kuramochi, Z. (Covering surfaces) 315.
- Kurepa, Georges (Correspondances multivoques) 40; (Espaces abstraits) 290.
- Kursunoğlu, Behram (Unified field theory) 202.
- Kurth, Rudolf (Homologie-Sätze des Sternaufbaus) 239.
- Kuttner, B. (Fractional derivatives) 298.
- Kyles, J. S. C. G. Campbell 199.
- Ladegast, Konrad (Schlichte Funktionen) 60.
- Laderman, J., S. B. Littauer and Lionel Weiss (Inventory problem) 364.
- Lah, Ivo (Zinsfußproblem) 373.
- Laichtman, D. L. und M. I. Judin (Transformation der unteren Luftschicht) 425.
- Laidlaw, William R. (Loadings for wings) 169.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 169.
- Lampariello, G. (Randwertbedingungen in Elektrodynamik) 238; (Elektrisches Erdfeld) 238.
- Lamprecht, Erich (*I*-reguläre Ringe. I.) 265; (*s*-Differenten) 273.
- Landahl, M. s. H. Merbt 179.
- — T. (Tail interference problems) 179.
- — and V. J. E. Stark (Oscillating-surface problem) 172.
- Landau, E. (Handbuch der Primzahlen) 280.
- Landsberg, Max (Lokalkonvexe Räume) 85.
- Lane, A. M. (Energy states) 444.
- N. D. and Peter Scherk (Differential points) 134.
- Lang, Gaines s. David Ellis 138.
- Langer, Susanne K. (Symbolic logic) 5.
- Lanza, G. (Scattering mesone-nucleone) 216.
- Lappo-Danilevsky, I. A. (Équations différentielles linéaires. I.—III.) 323.
- Larsen, Harold D. (Rinehart mathematical tables) 354.
- Laudet, Michel (Equation des trajectoires électroniques) 199.
- Lauffer, Rudolf (Wege in Minimalebenen) 117; (Konfiguration von Desargues. II.) 118.
- Laugwitz, Detlef (Normtopologien) 337.
- Lauwerier, H. A. (Diffusion from a source) 417; (Conduction of heat) 429.
- Lavender, Robert, E. (Supersonic flow) 178.
- Laurent'ev, M. M. (Genauigkeit der Lösung eines Systems von linearen Gleichungen) 346.
- Lawrence, H. R. (Low aspect ratio wing-body combinations) 170.
- Lazard, Michel (Problèmes d'extension) 15.
- Leavitt, W. G. (Mappings of vector spaces) 9.
- Lech, Christer (Recurring series) 278.
- Ledinegg, E. und P. Urban (Magnetisches Verhalten einer Atomkette) 453.
- Ledsham, Kathleen s. D. R. Bates 225.
- Lee, E. H. and I. Kanter (Wave propagation) 168.
- John F. (Specific heat of gases) 187.
- Lefebvre, Roland (Méthode d'interaction de configuration) 225.
- Legendre, Robert (Écoulement isentropique plan) 175.
- Lehmann, E. L. and C. M. Stein (Invariant statistical tests) 109.
- N. Joachim (Verteilung der Eigenwerte) 70.
- Lehto, Olli (Majorant principle) 59.
- Leibfried, G. (Versetzungen in anisotropem Material) 230.
- Lein, G. (Torsionssteifigkeit) 162.
- Leist, Margarete (Elektrolyte) 450.
- Lekkerkerker, C. G. (Sequences of integers. I. II.) 31; (Logarithmic concave functions. I. II.) 299.
- — s. H. J. A. Duparc 274.
- Lense, Josef (Reihenentwicklungen) 48.
- Leuz, Hanfried (Endliche projektive Ebene) 113; (Kreistreue konforme Abbildungen) 388.

- Lepage, Th. H. (Opérateurs différentiels) 80.
- Lesemann, Klaus - Jürgen (Differentialgleichung eines Diffusionsvorganges) 99.
- Lesieur, L. s. M. L. Dubreil-Jacotin 260.
- Lesky, P. s. W. Gröbner 415.
- Leslie, P. H., Dennis Chitty and Helen Chitty (Population parameters. III.) 110.
- LeVeque, W. J. (S -numbers) 36; (Uniform distribution modulo a subdivision) 285; (Trigonometric sequences) 285.
- Levi, F. W. (Helyscher Satz) 137.
- Levy, Harry s. V. Hlavatý 391.
- Lucretia Switser s. V. Hlavatý 391.
- Lévy, Paul (Arithmétique des substitutions aléatoires) 102; (Processus markoviens) 357.
- Lewis, T. (χ^2 distribution) 359.
- Li, T. Y. and H. J. Stewart (Supersonic oscillating wing theory) 180.
- Liber, A. E. (Flächentheorie im projektiven Raume) 389.
- Libermann, Paulette (Structure presque complexe) 132; (Forme différentielle) 326.
- Lichnerowicz, André (Espaces homogènes kählériens) 131.
- Lieberman, Gerald J. (Dodge's inspection plan) 364.
- Lietzmann, W. (Wo steckt der Fehler?) 6; (Riesen und Zwerge) 30; (Pythagoreischer Lehrsatz) 114.
- Linnik, Ju. V. (Summe von Primzahlen und Potenzen) 34.
- Lions, J. L. (Transformation de Laplace) 335.
- Littauer, S. B. s. J. Laderman 364.
- Littlewood, D. E. (Poincaré polynomials) 18.
- J. E. (Mathematician's miscellany) 1.
- Livesley, R. K. (Loaded elastic plate) 161.
- Livingston, Arthur E. (Space H_p) 87.
- Ljapin, N. M. s. M. P. Černjajev 244.
- Ljapunov, A. A. (Trennbarkeit der B -Mengen) 291; (Kriterien des Ausartens) 291.
- Ljunggren, Wilhelm (Theorem of T. Nagell) 278.
- Ljusternik, L. A. (Differenzenapproximationen) 96; (Kubaturformeln) 351; (Netzapproximationen) 351.
- Lo, Y. T. (Cylindrical antenna) 196.
- Loc, Phan van (Principe de Huygens) 206.
- Locher-Ernst, L. (Regelmäßige Figuren) 116.
- Lodigiani, Bruna (Differenzialität *asintotica*) 42.
- Löbell, Frank (Flächen mit vorgegebener Differential-invariante) 124.
- Loewner, Charles (Compressible fluid flow) 174.
- Loježanskij, L. G. (Verdrillter Strahl) 183.
- Longuet-Higgins, M. S. (Decrease of velocity in water wave) 184.
- Lopez Nieto, A. s. J. C. Belgrano 98.
- Lopuszański, J. (Bosons and fermions) 188; (Kosmische Schauer) 446.
- Lorch, E. R. (Convex bodies) 338.
- Lee (Derivatives) 299.
- Lorentz, G. G. (Representation of integers) 32; (Bernstein polynomials) 50.
- — — and D. G. Wertheim (Linear functionals on Köthe spaces) 90.
- Lorenzen, Paul (Halbgeordnete Gruppen) 253.
- Lorey, Wilhelm (K. F. Gauss) 4.
- Löringhoff, B. Freytag s. Freytag Löringhoff, B. 244.
- Lotkin, M. (Integration procedure) 97; (Boundary problems) 349.
- — — and Russell Remage (Scaling and error analysis) 347.
- Low, F. s. H. A. Bethe 221.
- Lowe, R. D. and D. Zelinsky (Galois fields) 267.
- Lozinskij, S. M. (Polynomoperatoren) 52; (System von gewöhnlichen Differentialgleichungen) 349; (Gleichungen in Variationen) 350.
- Lubatski, M. (Absolute neighbourhood retract) 402.
- Lubcat, François s. Yves Ayant 221.
- Luce, R. Duncan (Networks) 147.
- Ludford, G. S. S. (Riemann's method of integration) 326.
- Ludloff, H. F. (Aerodynamics of blasts) 423.
- Lukasiewicz, Jan (K. J. Cohen's remark) 6.
- Lunc, A. L. (Punkte, in denen ein Kontinuum lokal zusammenhängend ist) 401.
- Lundquist, Stig (Strong-focusing synchrotron) 199.
- Luxenberg, Harold (Torsion of cylinders) 412.
- Luzin (Lusin), N. N. (Werke. I.) 41; (Analytische Mengen) 291.
- Lyndon, R. C. (Fouxe-Rabinovitch series) 255.
- Lyttleton, R. A. (Stability of rotating liquid masses) 185.
- Maak, W. (Darstellungstheorie) 18.
- Macke, Wilhelm (Bethe-Salpeter equation) 211; (Zweikörperproblem, I. II.) 211.
- Mackey, George W. (Induced representations of locally compact groups. II.) 19; (Kronecker squares) 259.
- MacNeal, R. H. (Redundant structures) 155.
- MacWilliams jr., W. H. (Computers) 100.
- Madelung, E. (Math. Hilfsmittel des Physikers) 406.
- Maeda, Fumitomo (Algebraic and transcendental extensions) 22.
- Magnus, W. (Problem of Burnside) 255.
- — s. A. Erdélyi 303.
- Maharam, Dorothy (Abstract integrals) 292.
- Mahler, K. und J. Popken (Maximumproblem) 7.
- — s. Paul Cohn 28.
- Mahmoud, H. M. s. E. J. Konopinski 214.
- Maignan, Paul s. Georges Ambrosino 211.
- Majorov, V. M. (Potentialnetz) 383.
- Majumdar, Kulandra N. (Theorems in combinatorics) 108.
- Mal'cev, A. I. (Matrizengleichungen) 248.

- Malenka, B. J. (High-energy deuteron pickup) 218.
- Malenka, B. J. s. N. F. Ramsey 218.
- Mallows, C. L. (Sequential discrimination) 108.
- Mamuzić, Zlatko (Ensembles parfaits de points du segment [0,1]) 297.
- Manacorda, Tristano (Derivate del potenziale) 79.
- Manara, C. F. (Triangoli equilateri) 114.
- Manaresi, Gabriella (Equazione di Liénard) 68.
- Mandelbrojt, S. (J. Hadamard) 243.
- Mandò, M. e P. G. Sona (Assorbimento dei muoni sotto terra) 222.
- Manfredi, Bianca (Propagazione del calore) 190.
- Manfredini, A. s. C. Castagnoli 446.
- Mann, H. B. s. A. P. Calderon 104.
- Mansfield, E. H. (Neutral holes in plane sheet) 162.
- Mantel, Nathan (Buffon needle problem) 356.
- March, N. H. (Dirac's equation) 206; (Exchange potential in electron gas) 206; (Exchange in Thomas-Fermi model) 232.
- Marchi, Enrico (Efflusso piano) 171.
- Marchionna, Ermanno (Gruppo trirettangolo di omografia) 378.
- Marcus, Paul M. and E. Maxwell (Superconductivity) 454.
- Marden, Ethel, Kathryn Christoph, Anne Futterman, Renee Jasper, Sally Tsingou and Bernard Urban (Struve function) 355.
- Marmion, A. (Tétraèdre) 115.
- Marshall, J. S. and Walter Hitschfeld (Fluctuating echo. I.) 432.
- Martin, A. V. s. W. Karush 430.
- John C. and Nathan Gerber (Lifting pressure and damping) 178.
- R. M. (Non-translational semantics) 244.
- Maruhn, Karl (Bewegung von Wirbelringen) 183.
- Marušin, M. N. (Grenzwertsatz der Ordnung $p < 2$) 104.
- Marx, G. (Dilatationsschwingungen) 219.
- Masotti, Arnaldo (Moti kepleriani) 150.
- Massey, H. S. W. (Atoms and energy) 218.
- Matsumoto, Tokuji, Tetuo Hamada and Masao Sugawara (Symmetrical pseudoscalar meson theory. I.) 443.
- Matsusaka, Teruhisa (Positive divisors) 379.
- Matsushita, Shin-ichi (Analyse harmonique. I. II.) 341.
- Matthews, P. T. s. Abdus Salam 207.
- Mattila, Sakari (Iterated moving averages) 366.
- Mattioli, Ennio (Copertura dei gruppi) 258.
- Mauler, Heribert (Kommutatoren eines Ringes) 25.
- Maximon, H. s. H. A. Bethe 221.
- Maxwell, E. s. P. M. Marcus 454.
- Mayer - Kalkschmidt, Jörg (Singularitäten von Laplace-Integralen) 335.
- Mazur, P. and S. R. de Groot (Onsager's relations) 426.
- — and S. B. R. A. Nijboer (Statistical mechanics. I.) 430.
- — et I. Prigogine (Thermodynamique de la matière) 186.
- — s. G. A. Kluitenberg 185.
- — s. I. Prigogine 186.
- — s. S. R. de Groot 186.
- — s. H. Holtan jr. 187.
- Mazzarella, Franco (Condizioni di integrabilità) 319.
- McCombie, C. W. (Fluctuation) 148.
- McCrea, W. H. (Analytical geometry) 117; (Cosmology) 202.
- McEwen, W. H. (Spectral theory) 71.
- McHale, J. L. s. John L. Johnson 222.
- McLaughlin, J. E. (Relatively complemented lattices) 20.
- — — and Alex Rosenberg (Zero divisors) 24.
- McShane, Edward J. (Order-preserving maps) 293.
- McVittie, G. C. (Equations of gas dynamics) 182.
- Meier, Rudolf und Kurt Schuster (Dickenschwingungen) 231.
- Meijer, C. S. (G-function. IV. V.) 308.
- Meinardus, Günter (Partitionenproblem) 280.
- Meinesz, F. A. Vening s. Vening Meinesz, F. A. 240.
- Meixner, Josef (Wärmeleitfähigkeit von Gasen) 187; (Beugung an leitender Kreisscheibe) 197.
- Mejman, N. N. (Ergänzungen zu „Differentialgleichungen und Verteilung der Nullstellen“) 311.
- Meksyn, D. (Equations of transonic flow) 177.
- Melvin, M. Avramy (Classical electrodynamics) 430.
- Menne, Albert (Beweis und Negation) 244.
- Menon, P. Kesava s. Kesava Menon, P. 249.
- Menzel, Donald H. (Mathematical physics) 407.
- Merbt, H. and M. Landahl (Oscillating low aspect ratio wings) 179.
- Merk, H. J. and J. A. Prins (Thermal convection. I.) 417.
- Meschkowski, Herbert (Verzerrungssätze) 312.
- Messel, H. and H. S. Green (Cascade processes) 446.
- — and R. B. Potts (Extensive air showers) 222.
- Messiah, A. M. L. s. J. Horowitz 446.
- Metropolis, N. and S. Ulam (Arithmetical function) 102.
- Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 37.
- Mezzetti, L. s. E. Amaldi 222.
- Michaelson, R. L. (Large-scale machines) 100.
- Michal, A. D. (Partial differential equations in normed linear spaces) 93.
- Michiura, Tadashi (Partially ordered groups) 15.
- Mieghem, Jacques-M. van (Vorticity equation) 239.
- Mikeladze, S. E. (Entwicklung der Differenz einer Funktion) 300.
- Mikolás, Miklós (Gammafunktion und trigonometrische Funktionen) 52.
- Miles, John W. (Virtual momentum) 179; (Rectangular airfoil in supersonic flow) 179.

- Millas Vallierosa, José („Nova Geometria“) 243.
 Miller, K. S. and R. J. Schwarz (Interference of pulse trains) 431.
 Minagawa, T. and T. Rado (Infinitesimal rigidity of surfaces) 124.
 Mindlin, R. D. and H. Deresiewicz (Elastic spheres) 412.
 Mineo, Massimo (Deviazione della geodetica) 147.
 Minorsky, Nicolas (Extinction asynchrone) 67; (Excitation asynchrone) 67.
 Mishra, Ratan Shanker and Shri Krishna (Congruence of Ribaucour) 385.
 Misonou, Yosinao (Operator algebras) 91.
 Mitrović, Dragiša (Intégral de Dirichlet) 330.
 — Dusan (Servomécanisme non linéaire) 99.
 Mitter, H. and P. Urban (Streuung schneller Elektronen. I.) 214.
 Miyasawa, Kōichi (Minimax point estimations) 109.
 Moessner, Alfred (Zahlen-theoretische Untersuchungen) 274.
 Mogi, Isamu s. K. Yano 396.
 Mohr, Ernst (Fundamentalsatz der Algebra) 10; (Riemannsche Gebietsintegrale) 297; (Arithmetisch-geometrisches Mittel) 345.
 Moise, Edwin E. (Affine structures. VI. VII.) 404.
 Moiseev, N. N. (Bewegung eines starren Körpers) 171.
 Monna, A. F. (Reelle Zahlen) 288.
 Moon, Parry and Domina Eberle Spencer (Separation of Laplace's equation) 329.
 Mooser, E. s. G. Busch 454.
 Mordell, L. J. (Independence of algebraic numbers) 268; (Integer solutions) 278; (Symmetric congruence) 282; (Product of forms) 284.
 Moreno, D. s. C. Castagnoli 446.
 Moreno Olmedo, Miguel (Schuldentilgung) 373.
 Morgan, Joseph (Geometrical and physical optics) 433.
 Mori, Hazime (Transport phenomena. II.) 429.
 Mori, Mitsuya (Cohomology group of Lie algebras) 23.
 Morinaga, Kakutaro and Noboru Nishigōri (Axiom of betweenness. I. II.) 38.
 Morita, Masato (Interactions in β -decay) 440; (Interference terms of β -ray) 441.
 Moriya, Mikao (Derivationen) 27.
 Morris, Deane N. and John W. Smith (Laminar boundary layer) 420.
 Morse, Marston and William Transue (Fréchet variation) 338.
 — Philip M. and Herman Feshbach (Theoretical physics. I. II.) 400.
 Moser, Jürgen (Restringiertes Dreikörperproblem) 158.
 Moses, Harry E. (Kohn-Hulthén variational principle) 207.
 Mosteller, Frederick s. R. R. Bush 356.
 Mott, N. F. (Teoria dei solidi) 229.
 Mottelson, Ben R. s. A. Bohr 443.
 Motzkin, T. S. and Olga Taussky (Pairs of matrices) 8.
 Mrozowski, S. (Zone structure of graphite) 452.
 Mugibayashi (Perturbation theory) 438.
 Mulè, Giovanni (Criterio di convergenza uniforme) 45.
 Müller, Hans Robert (Proiezione cinematica) 118; (Momente in der Integralgeometrie) 137; (Kinematik des Rollgleitens) 151.
 — Heinz (Konforme Abbildung regulärer Polygone) 96.
 Müller-Magyari, F. (Deformationen dünner Plattenstreifen) 413.
 Mullin, Charles J. (Wave equation near an extremum of the potential) 436.
 Münster, Arnold (Statistische Schwankungen) 427.
 Münzner, Hans (Korngrößenverteilung) 109.
 Muracchini, Luigi (Geometria differenziale conforme) 128; (Trasformazioni puntuali analitiche) 376; (Trasformazioni puntuali) 389; (Varietà del Veronese) 390; (Varietà Γ_3) 390.
 Murdoch, W. L. s. M. Kac 303.
 Muskhelishvili, N. I. (Singular integral equations) 332.
 Myard, Francis ($\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$, $\psi(x) = f(x)/f'(x)$) 353.
 Myers, D. M. s. W. H. Witt-
rick 411.
 Nabarro, F. R. N. s. A. H. Cottrell 231.
 Nagai, O. (Simple groups) 17.
 Nagamiya, Takeo (Resonance absorption) 453.
 Nagao, Hiroshi and Tadaki Nakayama ((M_0) - and (M_n) -modules) 263.
 Nagaraja, J. V. and S. S. Rao (Vibration of rectangular plates) 415.
 Nagata, Jun-iti (General uniform space) 400.
 — Masayoshi (Henselian rings) 26; (Corrections to complete local rings) 26.
 — Shozo s. Julian K. Knipp 222.
 Najmark, M. A. (Spektrum und Entwicklung nach Eigenfunktionen) 322; (Entwicklung nach Eigenfunktionen) 322.
 Nakai, Yoshikazu (Divisors of differential forms) 379.
 Nakano, Hidegorō (Product spaces) 339.
 — Huzio (Ferromagnetism of crystal) 234.
 Nakayama, Tadaki (Division rings) 26; (Wedderburn's theorem) 264.
 — — s. H. Nagao 263.
 Namiki, Mikio s. N. Mugibayashi 438.
 Nardini, R. (Randwertproblem der Magneto-Hydrodynamik) 227; (Problema al contorno della magnetoidrodinamica) 238.
 Nardo, S. V. (Buckling load of flat sandwich panels) 411.
 Nataf, R. s. R. Bouchez 440.
 Natanson, G. I. (Summation von Reihen nach Jacobischen Polynomen) 301.
 — I. P. (Entwicklung von Funktionen nach Orthogonalpolynomen) 301.

- Natucci, Alpinolo (Teoria delle proporzioni) 3; (Ultimo teorema di Fermat) 280.
- Naya, Shigeo s. K. Kanô 454.
- Néel, Louis (Anisotropie superficielle) 454.
- Nehari, Zeev (Inequalities) 312.
- Nekrasov, K. P. (Bewegung eines Körpers in Flüssigkeit) 172.
- Nelms, Ann T. (Compton energy-angle relationship) 446.
- Nestorovič, N. M. s. M. P. Černjaev 244.
- Neuber, H. (Druckstabilität der Sandwichplatte. I. II.) 160; (Elastische Stabilität) 163; (Bruchflächentheorie) 166.
- Neumann, B. H. (Means in groups) 15.
- J. von and H. H. Goldstone (Conjecture of Kummer) 281.
- Neumer, Walter (Hypothese $2^{\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) 40.
- Nevanlinna, Rolf (Funktionalanalyse) 343.
- Neville, E. H. (Involution) 118.
- Newburgh, J. D. (Finite dimensional groups) 20.
- Newton, R. H. C. (Infinite matrices) 346.
- Tyre A. (Hölder mean) 45.
- Nicholas, J. F. s. F. C. Frank 230.
- Nicol, Charles A. (Restricted partitions) 275.
- Niessen, K. F. (Ratio of exchange integrals) 453.
- Nieto, A. Lopez s. Lopez Nieto, A. 98.
- Nigam, S. D. (Rotation of a plane lamina) 176.
- Nijboer, B. R. A. s. P. Mazur 430.
- Nijenhuis, Albert (Linear connections. I a. Ib.) 132.
- Nikaidō, Hukukane (Minimax theorem) 85.
- Nikodým, Otton Martin (Transfinite iterations of closure of convex sets) 85.
- Nikol'skij, S. M. (Differenzierbare Funktionen) 43.
- Nirenberg, Louis (Weyl and Minkowski problems) 124.
- Nishigori, Noboru s. Kakutaro Morinaga 38.
- Nishijima, Kazuhiko (Models of V-particles) 218.
- s. Yoichi Fujimoto 222.
- Nishiyama, Toshiyuki (Boson assemblies. II.) 450.
- Nitsche, Joachim (Verbiegung der Halbkugel) 125.
- Noble, A. s. Felix Klein 6.
- M. E. (Non-measurable interpolation sets. III.) 57.
- W. J. s. A. B. Bhatia 433.
- Nocilla, Silvio (Problema di aerodinamica) 418.
- Noi, Salvatore di (Varie metriche del piano proiettivo) 377.
- Nomizu, Katsumi (Transformations affines) 129; (Group of affine transformations) 396.
- Norman, Robert Z. s. F. Harary 405.
- Northam, E. S. (Interval topology of a lattice) 260.
- Novikov, P. S. s. N. N. Luzin 291.
- Novoa, L. Gutiérrez s. Gutiérrez Novoa, L. 117.
- Novoselov, V. S. (Wurzeln eines Polynoms) 10.
- Novozhilov, V. V. (Nonlinear theory of elasticity) 163.
- Obata, Yukio s. Takehiko Oguchi 233.
- Oberhettinger, F. s. A. Erdélyi 303.
- Oberman, Carl s. Henri Amar 192.
- Ogasawara, Tōzirō and Masayuki Takahashi (Orthogonality relation. I. II.) 360.
- Ogawa, Junjiro (Sampling distribution) 366.
- Oguchi, Takehiko (Spin wave theory) 453.
- and Yukio Obata (Antiferromagnetism) 233.
- Ohmann, D. (Extremalprobleme) 135; (Sätze über Eilini) 135; (Inkreisdien bei Überdeckung) 136.
- Ohta, M. s. T. Eguchi 441.
- Otha, Masao s. Julian K. Knipp 222.
- Ōkubo, Hajimu (Torsion of a circular shaft) 413.
- Okun, L. B. (Zusammenstoß schwerer Teilchen) 222.
- Ollerenshaw, Kathleen (Non-convex region) 36.
- Olmedo, M. Moreno s. Moreno Olmedo, M. 373.
- Olsen, H., P. Werenskiöld and H. Wergeland (Retardation of meson fields) 208.
- O'Meara, O. T. (Quadratic forms over local fields) 29.
- Ōneda, Sadao (Interactions between elementary particles) 213.
- Ono, Akimasa (Plastic distortion) 165; (Stress and strain in metals) 165, 415.
- Onō, Isao s. S. Ozaki 317.
- Ono, Ken-ichi (V-particles) 218.
- Ōno, Yōrō (Constants of motion) 438.
- Opitz, Günter (Genäherte Integration linearer Differentialgleichungen) 96.
- Oppenheim, A. (Integral quadratic forms) 32; (One-sided inequalities for quadratic forms. II.) 284.
- Ore, O. (Cardano) 243.
- Orloff, Constantin (Évaluation numérique des déterminants) 348.
- O'Rourke, R. C. (Absorption of light) 452.
- Osborn, Roger (Null class) 288.
- Osima, Masaru (Induced characters) 17; (Schur relations) 23.
- Ossicini, Alessandro (Funzioni di Legendre) 53; (Polinomi di Jacobi) 53.
- Ostrogradskij, M. V. (Wärmelehre) 4.
- Ōtuka, Masuhiko s. K. Hsimi 435.
- Oudart, Adalbert (Contrainte turbulente pariétale) 422.
- Overhauser, Albert W. (Polarization of nuclei) 232.
- Owen, Donald B. (Sample test procedure) 363.
- Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi (Vector spaces) 317; (Normed rings) 318.
- and Isao Onō (Analytic functions) 317.
- Paasche, Ivan (Moessnerscher Satz) 7.
- Pailloux, Henri (Calcul fonctionnel) 158.
- Pais, A. (Isotopic spin) 209.
- Palamà, Giuseppe (Regola di Fermat) 243; (Derivata

- erresima di classici polinomi) 307; (Funzioni d'Hermite e di Laguerre) 307.
- Paolantonio, Raffaele (Trisettrici degli angoli) 114.
- Paolucci, D. s. D. Gilbarg 181.
- Pap, Arthur (Analytic truth) 244.
- Park, David (Scattering theory) 435.
- Parker, K. (Nuclear multipole moments on electron scattering) 206.
- Robert L. (Kristallstereogramme) 147.
- Parodi, Maurice (Polynomes récurrents) 10; (Équations intégrales fonctionnelles) 333; (Analyse symbolique) 334.
- Pars, L. A. (Dynamics) 407.
- Parthasarathy, M. (Integer as sum of three fourth powers) 279.
- Pastori, Maria (Tensore fondamentale) 204.
- Patterson, E. M. (Kähler manifolds) 395.
- Payne, W. T. (Four-terminal networks) 193; (Nonrelativistic spin theory) 436.
- Pearson, J. D. (Sound waves) 167.
- Peaslee, D. C. (V -spin) 439; (Linear combination in β decay) 440.
- Pekeris, C. L. (Model of a roton) 227.
- Pentkowski, M. W. (Nomenclographie) 352.
- Pereira Coelho, R. (Regularity types) 390.
- Gomes, A. (Distribution de vitesses sur l'axe) 420.
- Peremans, W. s. H. J. A. Duparc 274.
- Péres, Joseph (Mécanique générale) 407.
- Pérez-Cacho, L. (Funktion $E(x)$) 274.
- Perfect, Hazel (Stochastic matrices) 357.
- Perl, William (Magnetic moment of n -electron) 226.
- — and Vernon Hughes (Magnetic moment of 3S_1 helium) 226.
- Perron, Oskar (Formel von Ramanujan) 47.
- Peschl, Ernst und Friedheim Erwe (Beschränkte Systeme von Funktionen) 64; (Reguläre Funktionenspalten) 309.
- Peters, J. (Tafel trigonometrischer Funktionen) 355.
- Petiau, Gérard (Corpuscules de spin quelconque) 437; (Diffusion des corpuscules) 437.
- Petresco, Julian (Chaines. IV.) 21.
- Pfirsch, Dieter (Kernspaltung und Kernquadrupolmomente) 220.
- Pfluger, Albert (Riemannsche Flächen) 314.
- Philbert, Georges (Coefficients d'auto-induction) 454.
- Piazzolla-Beloch, M. (Curve algebriche plane) 121; (Triangolazione aerea grafica) 147.
- Pichler, O. (Betriebswirtschaftliche Aufgaben) 374; (Erfassung von Betriebsabläufen) 375.
- Pickert, Günter (Analytische Geometrie) 375.
- Picone, Mauro (Formola di maggiorazione) 53; (Polinomio di Legendre) 53.
- Pierce, J. R. and L. R. Walker („Brillouin flow") 192.
- Pini, Bruno, (Equazioni a derivate parziali) 76; (Sistemi di equazioni a derivate parziali) 77; (Sistemi ai differenziali totali) 326; (Teorema di Picone) 330; (Problema di valori al contorno. I. II.) 330.
- Pinl, M. (B -Kugelbilder) 126.
- Pinsker, M. S. s. A. M. Jaglom 105.
- Pirl, Udo (Nichtlineare Integralgleichungen) 81.
- Pisano, Paolo (Rappresentazione di involuzioni) 121.
- Pisot, Ch. s. J. Dufresnoy 29, 282.
- Plans, Antonio (Homologiegruppen) 146.
- Plebański, J. (Nonlinear electrodynamics) 190.
- — s. L. Infeld 190.
- Pleijel, Åke (N. E. Fremberg) 243.
- Pniewski, J. (β -spectrum of RaE) 439.
- Poch, F. Azorin s. Azorin Poch, F. 359.
- Poel, W. L. van der (Dead programmes for a computer) 100.
- Pogorelov, A. V. (Stabilität isolierter Kantenpunkte) 384; (Konvexe Fläche) 384.
- Poiani, G. s. P. Budini 214.
- Pollard, Harry (Bounded functions) 83.
- Pomerancev, A. A. (Konzentration in Gasströmungen) 421.
- Pong, William (Double springmass system) 154.
- Pontrjagin, L. S. (Nullstellen transzendenter Funktionen) 311.
- Poor, Vincent C. (Polygenic functions) 62.
- Popken, J. (Asymptotic expansions) 48.
- — s. K. Mahler 7.
- Pople, J. A. (Dielectric polarization) 231.
- Popoff, Kyrille (Processus irréversibles) 425.
- Popov, B. S. (Weber's differential equation) 65; (Equation différentielle) 319.
- S. G. (Turbulente Strömungen) 416.
- Popovici, Const. C. (Itération des systèmes linéaires) 347.
- Poppelbaum, W. J. (Forces électromotrices) 187.
- Porod, Günther (Fadenmoleküle. II.) 449.
- Pöschl, Theodor (Oscillazioni principali) 154; (Hauptschwingungen. II.) 154.
- Possel, René de et Jacques Valensi (Sillage d'une plaque perméable) 183.
- Potter, Ruth Lind (Self-adjoint differential equations) 65.
- Potts, R. B. s. H. Messel 222.
- Poullet-Desisle, A.-C.-M. s. Ch.-Fr. Gauss 30.
- Pound, R. V. s. A. Abragam 441.
- Pozin, M. E. s. L. M. Batuner 288.
- Prachar, Karl (Zahlen $a^2 + b^2$) 33.
- Prager, William (Singular yield conditions) 165; (Slip line field) 414.
- Prais, S. J. (Heteroscedastic errors) 370.
- Pratelli, Aldo M. (Leggi integrali) 436.

- Pratt jr., George W. (Eigenfunctions of S^2) 232.
- Predonzan, Arno (Formula d'interpolazione) 48.
- Predvoditelev, A. A. und B. A. Smirnov (Dynamisches Kriechen) 415.
- Preston, Eric J. (Analysis of statistical distribution) 108.
- Glenn W. (Optimum transducers) 431.
- Prigogine, I. et P. Mazur (Phénomènes irréversibles) 186.
- — s. G. Klein 427.
- — s. P. Mazur 186.
- Primrose, E. J. F. s. R. L. Goodstein 376.
- Prins, J. A. s. H. J. Merk 417.
- Probability tables for analysis of extreme-value 355.
- Proc. XIth International Congr. Philosophy. (Vol. V. XIV.) 244.
- Prochorov, Ju. V. (Binomialverteilung) 103.
- Prociassi, Angiolo (Inviluppo delle parabole) 3.
- Proschan, Frank (Confidence and tolerance intervals) 371.
- Pryce, M. H. L. (Diffraction of radio waves) 431.
- Puckette, C. C. (Curve of pursuit) 119.
- Pudovkin, M. A. s. N. V. Tjabin 417.
- Purcell, Everett W. (Simultaneous linear equations) 353.
- Quenouille, M. H. (Variate-difference method) 369.
- Quimby, S. L. and Paul M. Sutton (Mean Debye temperature) 230.
- Rabbeno, Giorgio (Epistemologia matematica) 4.
- Rabin, Michael (Représentation des idéaux) 264.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 110, 372.
- Radicati, Luigi A. s. A. Gamba 259.
- Rado, R. s. P. Erdős 40.
- Tibor (Cohomology theory) 402.
- s. T. Minagawa 124.
- Radok, J. R. M. s. N. I. Muskhelishvili 332.
- Radzievskij, V. V. (Dreikörperproblem) 409.
- Ragab, Fouad M. (E -functions) 54.
- Raj, Des (Parameters of a normal population) 371.
- Ramanujan, M. S. (Series-to-series transformations) 46.
- Ramsey, N. F., B. J. Malenka and U. E. Kruse (Polarizability of deuteron) 218.
- Randolph, John F. (Trigonometry) 116.
- Rao, C. Radhakrishna (Genetic differentiation) 110; (Transformations in distribution problems) 372.
- S. K. Lakshmana (Motion of vortex filaments) 169.
- S. S. s. J. V. Nagaraja 415.
- Raševskij, P. K. (B. F. Kagan) 243.
- Rasiowa, H. and R. Sikorski (Satisfiability and decidability) 245.
- Raußenbach, B. V. (Thermische Schallerregung) 415.
- Rayner, M. E. (Boundary-value problems in potential theory) 329.
- Read, W. T. (Dislocations in crystals) 230.
- Rédei, Ladislaus (Bedingtes Artinsches Symbol) 269; (2-Ringklassengruppe) 271; (Quadratischer Nichtrest) 281.
- — und A. Stöhr (Schiefes Produkt) 257.
- Redheffer, Raymond M. (Partial differential equation) 73.
- Redhead, M. L. G. (Scattering of electrons and positrons) 207.
- Reenpää, Yrjö (Anschauliche Unabhängigkeit) 114.
- Reichardt, H. (Wandturbulenz) 175.
- Reichbach, M. s. B. Knaster 400, 401.
- Reidemeister, Kurt (Geist und Wirklichkeit) 4.
- Reifman, A. (Kernphotoeffekt) 219.
- Reik, Helmut G. (Irreversible Vorgänge. IV.) 425.
- Reinville, Earl D. (Heat conduction problem) 189.
- Reissner, Eric (Finite elastic deformations) 163.
- Remage, Russell s. M. Lotkin 347.
- Remmert, Reinhold und Karl Stein (Singularitäten analytischer Mengen) 63.
- Reza, Fazlollah (Dipôles électriques) 431.
- Rhodes jr., J. Elmer (Optical images) 198.
- Ricci, Gilberto (Ricerche cronologiche dei calendari) 6.
- Richter, Hans (Wahrscheinlichkeitstheorie. II.) 102.
- Rickart, C. E. (Spectral permanence) 91.
- Rideout, V. C. s. Han Chang 98.
- Rieger, G. J. (Waringsches Problem) 32.
- Riekstyņš, E. Ja. (Telegraphengleichungen) 54.
- Riesz, Frédéric et Bela Sz. Nagy (Analyse fonctionnelle) 84.
- Marcel (Lemme de Zolotareff) 275.
- Riguet, Jacques (Algèbres extérieures et algèbres de Clifford) 22.
- Riordan, J. s. L. Carlitz 276.
- Ripelle, M. Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, M. 206.
- Rjabova, E. V. (Transversaler Stoß) 415.
- Robbins, Herbert s. T. E. Harris 105.
- Robert, J.-P. (Bases techniques des assurances) 111.
- Roberts, G. T. (Bounded weak topologies) 84.
- Robertson, M. S. (Star-like functions) 312.
- Rodosskij, K. A. (Kleinste Primzahl in arithmetischer Progression) 34.
- Rodríguez S. J., Alberto (Verdoppelung des Würfels) 2.
- Rogers, C. A. (Critical lattices) 35; (Integrals over convex sets) 136; (Volume of a polyhedron) 136.
- K. (Minima of inhomogeneous functions) 35.
- Rogosinski, W. W. and H. S. Shapiro (Extremum problems) 56.
- Rohde, K. und H. Störmer (Durchlaßwahrscheinlichkeit) 358.
- Rohrberg, Albert (Logarithmischer Rechenstab) 99.
- Röhrli, Helmut (Fabersche Entwicklungen) 61.
- Roosjen, J. P. van (Numerical integration) 352.
- Roosbroeck, W. van (Transport of current carriers) 235.

- Roquette, Peter (Riemannsche Vermutung) 273.
- Rosenberg, Alex s. J. E. McLaughlin 24.
- Rosenfeld, L. (Quantum electrodynamics) 209.
- Rosenhead, L. (Vortex systems) 420.
- Rosenlicht, Maxwell (Differentials of the second kind) 30; (Differentials on Hodge manifolds) 395.
- Rosenthal, E. (Diophantine equations) 31.
- Roshwalb, Irving (Weighting by card-duplication) 366.
- Rosina, B. A. (Cóniche generalizzate) 378.
- Roth, Benjamin (Two-body scattering) 445.
- Rothe, R. (Höhere Mathematik, III.) 287.
- und István Szabó (Höhere Mathematik, VI.) 64.
- Rothstein, Wolfgang (Singularitäten analytischer Funktionen) 63.
- Rotta, J. (C.) (Turbulente Grenzschichten) 176; (Isotropic turbulence) 421.
- Rouse, Hunter and J. W. Howe (Basic mechanics of fluids) 415.
- Roussopoulos, Paul (Diffusion d'une particule de Dirac) 206.
- Roy, S. N. (Test construction) 367.
- Royden, H. L. (Open Riemann surfaces) 62; (Bounds on a distribution function) 337.
- Rubin, H. and M. H. Stone (Hilbert space) 338.
- Ruderman, M. (Nuclear forces) 215.
- A. s. E. M. Henley 216.
- Rudin, Walter (Graves' closure criterion) 49.
- Rufener, E. (Renten und Todesfallversicherungen) 112.
- Ruffini, Paolo (Opere, II.) 250.
- Rumsey, V. H. (Wave slot antennas) 196.
- Ruppel, Werner et Robert Weber (Flutter en régime supersonique) 180.
- Rusanov, B. V. (Instationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit) 182, 183.
- Ruse, H. S. (Affine spaces of symmetric connection) 133.
- Rushbrooke, G. S. and H. I. Scoins (Fluids) 449.
- Rushforth, J. M. (Jacobi's fundamental formulae) 311.
- Russo, Salvatore (Sottogruppi del gruppo G_2) 18.
- Ruston, A. F. (Paper by Allen) 337.
- Rutickij, Ja. B. s. M. A. Krasnosel'skij 343.
- Rzewuski, J. (Differential conservation laws) 438.
- Saalfrank, C. W. (Universal covering space) 402.
- Saarnio, Uuno (Teil und Gesamtheit) 247.
- Sabbioni, C. (Funzione quasi periodica) 319.
- Saddler, W. s. W. R. Andress 376.
- Sade, Albert (Quasi-groupes) 254.
- Sáenz, A. W. (Monovalent metals by lattice distortions) 231.
- — s. V. Hlavatý 203.
- — García, Clemente (Physikalische Einheiten) 148.
- Saibel, Edward and W. J. Berger (Characteristic equation of a square matrix) 348.
- Sailer, Herbert (Bewegungsgleichungen) 200.
- Sakai, Shozo (Map excision theorem) 403.
- Sakakihara, Kenenji (Neighborhood systems) 137.
- Salam, Abdus (Partial integral equations) 82.
- and P. T. Matthews (Fredholm theory of scattering) 207.
- Salió, Hans (Satz von A. Moessner) 7.
- Salinas, Balthasar R. (Laplace-Transformierte) 83.
- Salpeter, E. E. and J. S. Goldstein (Momentum space wave functions, II.) 218.
- Saltykow, N. (Équations aux dérivées partielles de premier ordre) 325.
- Saltzer, Charles (Electrical networks) 192.
- Salzer, Herbert E. (Hyperbolic functions) 101.
- Samelson, Hans (Whitehead and Potryagin product) 139.
- Samuel, Pierre (Tendances de la géométrie algébrique) 120.
- Sanden, H. von (Praktische Mathematik) 346.
- Sandham, H. F. (Square as the sum of 7 squares) 279.
- Sangren, W. C. s. S. D. Conte 324.
- Sansone, Giovanni (Equazioni delle oscillazioni) 153.
- Sapiro, Z. Ja. (Allgemeine Randwertaufgaben) 329.
- Sarafyan, Diran (Nested series) 94.
- Sario, Leo (Riemann surfaces) 61.
- Saroléa, L. (Order-disorder transitions) 451.
- Sasaki, M. s. Toshiya Komoda 217.
- Usa (Affine geometry) 112; (Semi-modularity) 112; (Characterization of geometries) 112.
- Sasayama, Hiroyoshi (Extensions) 381.
- Sassenfeld, Helmut M. (Lockkartenmaschinen) 100.
- Sathe, L. G. (Problem of Hardy, II.) 280.
- Savage, I. Richard (Non-parametric statistics) 359.
- Savinov, G. V. (Eigenschwingungssysteme) 321.
- Savorgnan, C. Bonati s. Bonati Savorgnan, C. 42.
- Sawyer, D. B. (Minima of quadratic forms) 284.
- W. W. s. W. R. Andress 376.
- Saxon, David S. and A. S. Cahn (Vibration of suspended chain) 155.
- Sbrana, Francesco (Equazioni differenziali della meccanica) 408.
- Sčerbakov, R. N. (Erzeugung von Flächen) 390.
- Schaden, K. (Biegefestigkeit von Balken) 415.
- Schaefer, Hermann (Spannungsfunktionen) 410.
- Schafer, R. D. (Casimir operation) 263; (Theorem of Albert) 263; (Finite simple rings) 263.
- Schäfer, Friedrich Wilhelm (Stabilitätskriterien) 320.
- Schafroth, M. R. (Antiferromagnetism) 454.
- Schaumberger, J. (Ziqpu-Gestirne) 2.
- Scheidegger, A. E. (Gravitational motion) 202.

- Scherk, Peter s. N. D. Lane 134.
- Scherrer, W. (Metrisches Feld, II.) 201.
- Schiek, Helmut (Relation in freien Gruppen) 255.
- Schild, A. (Electromagnetic theory) 190.
- Schirmer, Herbert (Xenon-Hochdruckbogen. II.) 450.
- Schiske, Peter s. W. Glaser 435.
- Schläfli, Ludwig (Abhandlungen. II.) 241.
- Schlichting, H. (Laminare Strömung) 416.
- Schmidt, Arnold (Existenz und Widerspruchsfreiheit) 244.
- Jürgen s. Guido Hoheisel 39.
- Schneider, Heinrich (Leibniz) 3.
- Schoenberg, I. J. and Anne Whitney (Pólya frequency functions. III.) 336.
- Schönberg, M. (Classical statistical mechanics. II.) 209; (Quantum mechanics) 209.
- Schörner, Ernst s. R. Beyer 382.
- Schröder, Johann (Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung) 92; (Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme) 348.
- Schubert, Andreas (Integration von Funktionen) 53.
- H. (Mußestunden) 6.
- Horst (Knoten und Vollringe) 404.
- Schuh, Fred. (Zauberkreisel „Tippe top“) 408.
- H. (Aerodynamic heating) 175; (Laminar heat transfer on cylinders) 189.
- Schultz-Grunow, F. (Green-sche Funktionen) 79.
- Schuster, Kurt s. Rudolf Meier 231.
- Schützenberger, Marcel Paul ($F(x+y) = F(x)F(y)$) 94; (Problème des mots) 260.
- Schwarz, R. J. s. K. S. Miller 431.
- Schwinger, Julian (Quantum dynamical principle) 210.
- Sciama, D. W. (Origin of inertia) 200.
- Scoins, H. I. s. G. S. Rushbrooke) 449.
- Scott, E. J. (Jacobi transforms) 334.
- Scott, Leland L. (Metabelian groups) 17.
- W. R. (Homomorphisms) 14.
- Seal, K. C. (Double sampling) 368.
- Sears, Francis Weston (Thermodynamics) 185.
- W. R. s. Nelson H. Kemp 172.
- Sedmark, Viktor (Ensembles partiellement ordonnés) 40.
- Sedney, R. s. H. Klein 182.
- Segal, I. E. (Abstract integration) 342; (Correction to abstract integration) 342.
- Segre, Beniamino (Continuo e discontinuo) 378; (Élément linéaire projectif) 391.
- Seidel, W. s. V. V. Novoshilov 163.
- Seiden, Joseph (Rotations aléatoires des aimants) 447; (Diffusion des protons) 448.
- Seki, Setsuya (Curvatura integra) 394.
- Selmer, Ernst S. (Rational points on cubic surfaces) 32.
- Semín, Ferruh (Cyclides de Dupin) 384.
- Sen, R. N. (Pairs of teleparallelisms) 133.
- Sengupta, H. M. (Bending of an elastic plate. IV.) 160.
- Sercescu, Pierre (Histoire du nombre) 2.
- Sestini, Giorgio (Stabilità per il moto di un punto) 321.
- Sevrin, A. (Surface réglée) 385.
- Shah, J. R. s. L. Jacob 198.
- S. M. and Girja Khanna (Entire functions) 59.
- Shapiro, Harold N. (Arithmetic functions) 33.
- H. S. s. W. W. Rogosinski 56.
- Shapley, L. S. (Stochastic games) 358.
- Sharma, Ambikeshwar (Zeros of polynomials) 9.
- Shepherdson, J. C. (Models for set theory. III.) 38.
- Shield, R. T. (Soil mechanics) 165.
- Shimamoto, Y. s. J. B. French 197.
- Shirota, T. (Space of pseudometrics) 400.
- Shniad, H. (Convexity properties) 313.
- Sholander, Marlow (Boolean algebras) 21; (Plane geometries from convex plates) 113.
- Siegel, K. M., J. W. Crispin, R. E. Kleinman and H. E. Hunter (Zeros of $(dP_{m_i}^1(x)/dx)|_{x=x_0}$) 306.
- Siebert, Arnold J. F. (Fusion and condensation) 428.
- Sierpiński, W. (Équivalence des ensembles de points par décomposition finie) 41; (Hypothèse du continu) 41; (Ensembles analytiques linéaires) 291.
- Sikkema, P. C. (Differential operators) 344.
- Sikorski, R. s. H. Rasiowa 245.
- Sil, N. C. (Charged meson) 441.
- Silberstein, J. P. O. (Compact linear operators) 92.
- Silveira, Adel da (Particles of spin 3/2) 437.
- Singh, S. K. (Paper of R. C. Buck) 58.
- Širokov, M. F. s. N. N. Gvozdkov 422.
- Sitnikov, K. A. (Dreikörperproblem) 157.
- Sjöstrand, Nils Göran (Distribution of neutrons in graphite) 447.
- Olof (Differential- und Integralrechnung) 287.
- Skornjakov, G. B. (Ausstrahlung von γ -Quanten) 441.
- Slansky, Serge (Photons annihilés) 212.
- Slater, J. C. (Periodic potential problem) 452.
- L. J. (Confluent hypergeometric function) 101.
- Slepian, David (Boolean functions) 248.
- Slibar, A. and K. Desoyer (Sternmotoren) 415.
- — s. K. Desoyer 150, 155.
- Sloovere, H. de (Variations successives d'une intégrale) 80.
- Smail, Lloyd L. (Analytic geometry) 376.
- Smart, W. M. (Celestial mechanics) 236.
- Šmidov, F. I. (Funktionen von zwei Veränderlichen) 42.
- Smirnov, B. A. s. A. A. Predvoditelev 415.
- Ju. (Vollständigkeit uniformen Räume) 399.

- Smith, C. A. B. (Intraclass correlation) 369.
 — John W. (Diffusion fields on laminar boundary layer) 420.
 — — — s. D. N. Morris 420.
 — M. L. s. G. Herdan 428.
 Snyder, L. R. (Business mathematics) 112.
 Sobczyk, Andrew s. P. C. Hammer 135.
 Sobel, Milton (Decision functions for sequential problems) 109.
 — — s. B. Epstein 385.
 Sobolev, V. I. (Halbgeordnetes Maß von Mengen) 42.
 Solarski, A. s. A. Kahane 179.
 Solmitz, F. T. (Proton-proton scattering) 217.
 Solomjak, M. Z. (Gestörter Operator) 344.
 Solovine, Maurice s. Albert Einstein 199.
 Sona, P. G. s. M. Mandò 222.
 Sorokin, V. S. (Variationsmethode in Theorie der Konvektion) 421.
 Sowerby, L. (Rotating spheroid) 172.
 — — and J. C. Cooke (Flow of fluid along corners) 170.
 Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead (Homotopy theory) 140.
 Spanner, D. C. (Biological systems) 426.
 Specker, Ernst P. (Axiom of choice) 37.
 Spencer, D. C. s. K. Kodaira 145, 146.
 — Domina Eberle s. P. Moon 329.
 — L. V. and Charles Wolff (Hard X-rays) 222.
 Spiegel, M. R. (Summation of series) 47.
 Srivastava, H. M. (Laplace transforms) 336.
 Stallmann, Friedemann (Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke) 314.
 Stamatis, Euangelos (Vollständige Induktion) 242.
 Stampacchia, Guido (Funzioni in n variabili) 81.
 Stange, Kurt (Verteilungsgesetz für Korngrößen) 109; (Ausgleichen von Kurven) 372.
 Stanjuković, K. P. (Gleichungen vom hyperbolischen Typus) 419.
 Stark, V. J. E. s. M. T. Landahl 172.
 Starnberg, W. (Verdrehung bildsamer Metallstäbe) 414.
 Staržinskij, V. M. (Stabilität eines mechanischen Systems) 153.
 Staševskaja, V. V. (Umkehrprobleme der Spektralanalyse) 322.
 Steenberg, N. R. (Polarization of γ -radiation) 234; (Nuclei aligned at low temperatures) 234.
 Steiger, Franz (Mengen von Punkten) 116.
 Stein, C. M. s. E. L. Lehmann 109.
 — Karl s. Reinhold Remmert 63.
 Steklov, V. A. (100. Geburtstag Ostrogradskijs) 4.
 Stelson, H. E. (Interest rate) 373.
 Stephenson, G. (Electrodynamics and unified field theory) 204.
 Sternberg, R. L. and H. Kaufman (Multiple non-uniform transmission lines) 71.
 Sterne, Theodore E. (Ordinary differential equations) 95.
 Sternheimer, R. M. (Čerenkov radiation) 222.
 Stevens, K. W. H. s. R. J. Elliott 233.
 Stewart, A. L. s. D. R. Bates 225.
 — H. J. s. T. Y. Li 180.
 Stewartson, K. (Rotating fluid) 171; (Flow between rotating disks) 419.
 Stiefel, E. (Tabellierte Funktionen) 96; (Ausgleichung) 349.
 Stöhr, Alfred ($(n+1)$ -Pole) 430.
 — — s. L. Rödei 257.
 Stojaković, Mirko (Déterminants rectangulaires) 8.
 Stoker, J. J. (Unsteady waves) 424.
 Stone, M. H. s. H. Rubin 338.
 Stoppelli, Francesco (Effetto giroscopico) 153.
 Stoppini, G. s. E. Amaldi 222.
 Storch, Leo (Reactive networks) 193.
 Storch, Edoardo (Azione potenziale stazionaria) 150.
 Störmer, H. s. K. Rohde 358.
 Straiton, W. s. T. P. Higgins 196.
 Strasser, A. (Beulung versteifter Platten) 160.
 Stratton, R. (Debye specific heat) 229.
 Stringer, J. B. s. M. V. Wilkes 100.
 Stroffolini, R. (Radiazione cosmica) 222.
 Stroh, A. N. (Energy in work-hardened material) 231.
 Strubecker, Karl (Quasirückungsnetz) 126.
 Šubnikov, A. V. (Homologie der Kristalle) 228.
 Suchy, Kurt (Übergang von Wellenoptik zur Strahlenoptik. II.) 434.
 Suetin, P. K. (Reihen nach Faberschen Polynomen) 55; (Fabersche Polynome) 55.
 Suetuna, Zyoiti (Grundlagen der Mathematik. III.) 289.
 Suffczyński, Maciej (Electrodynamics) 191.
 Sugawara, Masao s. Tetsuo Hamada 214.
 — — s. T. Matsumoto 443.
 Sulejkin, V. V. (Energieübertragung vom Wind auf die Welle) 425.
 Sumner, D. B. (Differential system) 344.
 Sun, J. Tseying (Equivalence problem) 128.
 Sundrum, R. M. (Systematic sampling) 108; (Rank correlation coefficient) 369.
 Sunouchi, Gen-ichiro (Fourier series) 303.
 Sunyer i Balaguer, Ferran (Théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors) 57; (Values of entire functions) 310; (Directions de Borel-Valiron) 310; (Momente der in einem Winkelraum holomorphen Funktionen) 337.
 Surova, K. E. (Poincarésche Gleichungen) 408.
 Süßmann, C. (Energieverteilung der α -Teilchen. I.) 220.
 Sutton, Paul M. s. S. L. Quimby 230.
 Suzuki, Jingoro (Uniformities) 399.
 Svenonius, Per (Scattering of light) 211.
 — Björn (Quasirechtwinklige Dreiecke) 31.
 Svešnikov, A. G. (Arbeit M. V. Ostrogradskijs) 4.
 Swabey, M. C. s. Ernst Casirer 202.

- Swan, P. (Bound state of ^4H) 218.
- Sydler, J.-P. (Diédres rationnels) 116.
- Symon, Keith R. (Mechanics) 149.
- Syozi, Itiro (Statistical mechanics) 428.
- Sz.-Nagy, Béla (Orthogonal expansions) 49.
- s. Frédéric Riesz 84.
- Gy. (Mittelkante einer Ecke) 116.
- Szabó, István s. R. Rothe 64.
- Szarski, J. et T. Ważewski (Equations hyperboliques aux dérivées partielles) 75.
- Szász, G. (Zentralprojektion) 147; (Assoziativitätsbedingungen) 252.
- Otto (Sets of rational functions) 49.
- Szegő, Gabor (Vibrations of clamped plate) 167.
- s. M. Kac 303.
- Szűsz, P. (Hardy-Littlewood-scher Satz) 285.
- T**aam, Choy-tak (Functions of Sturm-Liouville type) 320.
- Table of Bessel-Clifford functions 101.
- Table of natural logarithms 101.
- Taffara, L. s. P. Budini 222.
- Taga, Yasushi (Sample size and number of strata) 108.
- Takahashi, Masayuki s. T. Ogasawara 360.
- Yasushi (Structure of elementary particle) 436.
- Takasu, Tsurusaburo (Connection spaces. I. II. III. IV. V. VI.) 398; (Combined field theory) 398.
- Takeda, Ziro (Perfection of measure spaces) 91; (Fourier-Stieltjes integral. II.) 334.
- Tan, H. S. (Laminar boundary layer) 419.
- Tanaka, Chuji (Dirichlet series. IV.) 50.
- Tandai, Kwoichi (Areal space. VI.) 396.
- Tanikawa, Yasutaka (Interaction forms of beta-decay) 440.
- Tatarskij, V. I. s. V. A. Krasil'nikov 168.
- Tatchell, J. B. (Integral transformations) 84.
- Taub, A. H. (Curved shocks) 181.
- Taussky, Olga s. T. S. Motzkin 8.
- Taylor, Howard E. (Mapping function of Riemann surfaces) 315.
- Tedeschi, Bruno (Assicurazioni) 112.
- Teissier, Marianne (Demi-groupes) 255.
- Tellegen, B. D. H. (Networks) 193.
- Teltow, J. (Gitteraufweitung von Kristallen) 451.
- Temperley, H. N. V. (Liquid helium) 227.
- Tena, Luigi (Campi a tre dimensioni) 3; (Vincenzo Viviani) 243.
- Terasaka, H. s. T. Homma 147.
- Terpstra, T. J. (Probability distribution of the T statistic) 366.
- Thébault, Victor (Curiosités arithmétiques) 6; (Cevians of a triangle) 115; (Cercles et sphères) 115; (Recreational geometry) 116.
- Thellung, A. (Helium II. II.) 449.
- Thielman, H. P. (Types of functions) 138; (Functions of real variables) 292.
- Thierrin, Gabriel (Équivalences dans un demi-groupe D) 12; (Équivalence en relation) 12; (Sous-groupoides) 12.
- Thimm, Walter (Singuläre Bildpunkte) 64.
- Thirring, Walter (Divergence of perturbation theory) 209.
- Thomas, Johannes (Turbulenzproblem) 82.
- L. H. (Plane Poiseuille flow) 173.
- T. S. E. (Physical formulae) 406.
- T. Y. (Singular surfaces) 165.
- jr., George B. (Calculus) 287.
- Thompson, Lee Detmer (Integral means) 44.
- Thomsen, John S. (Coulomb friction) 150; (Logical relations) 427.
- Alice C. s. Peter G. Bergmann 187.
- Thüring, B. (Eigenbewegungen der Fixsterne) 236.
- Tietz, Horst (Partialbruchzerlegung von Funktionen) 315.
- Tietze, Heinrich (Arithmetisch-geometrisches Mittel) 47.
- Tiffen, R. (Stress problems) 159.
- Tikson, Michael (Tabulation of an integral) 355.
- Tillmann, Heinz-Günther (Randverteilungen analytischer Funktionen) 89.
- Timman, R. (Reziprozitätssatz der Tragflächentheorie) 418.
- Ting, Lu (Diffraction of weak shocks) 181.
- Tjabin, N. V. und M. A. Pudovkin (Strömung eines zähplastischen Systems) 417.
- Tobocman, W. s. F. L. Friedman 219.
- Todeschini, Bartolomeo (Potenziale elettromagnetico) 204.
- Tôki, Y. (Open Riemann surfaces. I.) 62.
- Tolhoek, H. A. s. S. R. de Groot 186.
- Tomber, Marvin L. (Lie algebren) 262.
- Tomita, Kazuhisa und Kiyoshi Fukui (Electronic structure of LiH) 449.
- Tomotika, S. and T. Aoi (Flow of viscous fluid) 173.
- Tong, Kwang-Chong (Divisor problems) 280.
- Tonolo, Angelo (Meccanica dei mezzi continui) 382.
- Torre, C. (Firmo-viskose Stoffe) 165; (Charakteristiken und Berührungstransformation) 165.
- Torrey, H. C. (Nuclear spin relaxation) 223.
- Tosberg, Adolf (Versicherungsmathematisches Verfahren) 111.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 113, 114.
- Touschek, B. F. s. W. K. Burton 210.
- Transue, William (Minimo in campi illimitati) 81.
- s. M. Morse 338.
- Trevisan, Giorgio (Quasigruppen) 12; (Ordinamenti di gruppo libero commutativo) 13.
- Tricomi, Francesco G. (Equazioni di tipo ellittico) 77.
- s. A. Erdélyi 303.
- Trilling, Leon (Transonic flow) 178.
- and K. Walker jr. (Transonic flow) 178.

- Truax, Donald R. (Optimum slippage test) 361.
 Trucco, Ernesto (Stability of heavy nuclei) 213.
 Truckenbrodt, E. (Geschwindigkeitspotential) 169; (Traglinientheorie) 416; (Profilwiderstand) 416.
 Truesdell, C. (Equations of hydrodynamics) 169; (Physical components of vectors and tensors) 381; (Absorption and dispersion of infinitesimal waves) 422.
 Tsao, Chia Kuei s. B. Epstein 365.
 Tsien, T. C. (Geodätische Abbildungen) 125.
 Tsingou, Sally s. E. Marden 355.
 Tsuboi, Teruo (Metabelian groups) 255; (Finite simple groups) 256.
 — — s. S. Ozaki 317, 318.
 Tsuchikura, Tamotsu (Cesàro summability) 302.
 Tsuji, Masatsugu (General Cantor sets) 79.
 Tuckey, C. O. and W. Armistead (Coordinate geometry) 376.
 Turri, Tullio (Superficie razionali reali) 121; (Trasformazioni involutorie) 121.
 Turumaru, Takasi (Direct-product of operator algebras. II.) 343.
 Tyabji, S. F. B. (Equations of motion) 199; (Helium-4) 449.
 Ubbink, J. (Antiferromagnetic resonance) 233.
 Uberoi, Mahinder S. (Eddy turbulence in compressible fluid) 176.
 Udeschini, Paolo (Spostamento delle righe spettrali) 204.
 Ueno, Yoshio (Equivalency for observers) 199.
 Uhler, Horace S. (10th digit in the sequence of natural numbers) 7; (Perfect numbers) 278.
 Ulam, S. s. N. Metropolis 102.
 Ul'janov, P. L. (Trigonometrische Reihen) 51.
 Umegaki, Hisaharu (Operator algebra. II.) 91.
 Umezawa, Toshio (Multivalent functions) 60.
 Unger, Heinz (Biorthonormierung) 95; (Matrizen-eigenwertprobleme) 348.
 Upadhyay, M. D. (Φ -congruences) 385, 386.
 Urban, Bernard s. E. Marden 355.
 — P. und K. Wildermuth (Bornsches Näherungsverfahren) 206.
 — — s. E. Ledinegg 453.
 — — s. H. Mitter 214.
 Urbanik, K. s. B. Knaster 401.
 Urcelay, J. M. s. J. C. Belgrano 98.
 Ursell, F. (Surface waves) 184.
 Uspenskij, V. A. (Algorithmische Reduzibilität) 245; (Satz von Gödel) 245.
 Vaart, H. R. van der (Wilcoxon's two sample test) 363.
 Vacca, Maria Teresa (Polinomio di Jacobi) 306.
 Vaccaro, Giuseppe (Isometria di calotte) 125.
 Vaccarino, Giuseppe (Calcolo delle classi) 37; (Logiche polivalenti) 245.
 Vaidya, P. C. (Nonsymmetrical field theories. I.) 204.
 Vajda, S. (Quadratic forms) 9.
 Vajnberg, M. M. (Existenz der Eigenfunktionen bei Integraloperatoren) 93.
 Valensi, Jacques et Claire Clarion (Mouvement oscillatoire) 183.
 — — s. René de Possel 183.
 Vallicrosa, J. Millas s. Millas Vallicrosa, J. 243.
 Vandiver, H. S. (Fermat's last theorem) 280.
 Vaughan, H. E. (Plane topology) 146.
 Vekua, I. N. (Metaharmonische Funktionen) 49.
 Velte, Waldemar (Arbeit von H. Rund) 80.
 Vening Meinesz, F. A. (Pendulum observations) 240.
 Verblunsky, S. (Level curves) 60.
 Verhoeff, J. (Pseudo-convergent sequences) 28.
 Verma, A. R. (Crystal growth) 231.
 Vernotte, Paul (Moindres carrés) 148.
 — Pierre (Calorimétrie directe des isolants) 190.
 Verschaffelt, J. E. (Chaleur réaction) 187; (Relations d'Onsager) 187; (Équilibre d'un fluide mixte) 187; (Dissipation d'énergie) 187; (Transformation moléculaire) 187; (Phénomènes de transport) 189; (Ensemble d'un fluide mixte) 427; (Polarisation) 427; (Énergie dissipée. II.) 427.
 Videnskij, V. S. (Gewogene Annäherung) 301.
 Vigier, Jean-Pierre (Densité statistique des ensembles de particules) 205.
 Villa, Mario (Geometria proiettiva differenziale) 388.
 Vil'ner, I. A. (Anamorphose von Funktionen) 99.
 Vincensini, Paul (Arcs d'un même cercle) 137.
 Vinogradov, I. M. (Summen der Werte $\chi(p+k)$) 281.
 — — — s. I. A. Lappo-Danilevsky 323.
 Viola, Tullio (Momenti del quart'ordine d'una funzione) 337.
 Viswanath, G. (Electronic spectra) 449.
 Viswanatham, B. (Harmonic vibrations) 71.
 Viswanathan, K. S. (Vibrations of crystal lattices. I. II.) 229.
 Vogel, Théodore (Systèmes déferlants) 83.
 Vojt, S. S. (Sphärische Schallwellen) 424.
 Volkmann, Bodo (Hausdorffsche Dimensionen. I.) 41; (II. III.) 297.
 Volkoff, G. M. (Nuclear quadrupole effects. I.) 221.
 Volpato, Mario (Equazione differenziale) 68.
 Volpe, Galvano della (Galileo) 243.
 Vorob'ev (Kongruenzen von Algebren) 262.
 Voss, H. M. s. G. Zartarian 184.
 Vrănceanu, G. (Groupes de mouvement d'un espace de Riemann) 393.
 Vrkljan, V. S. (Diracsches Verfahren der Linearisation) 206.
 Vroelant, Claude (Formes approchées de la fonction d'onde) 448.
 Waage, E. (Pythagoreische Dreiecke) 30.
 Wada, W. W. (Scattering of mesons) 217.
 Waerden, B. L. van der (Einfall und Überlegung)

- 1; (Bewegung der Sonne) 2; (Two-sample problem. II.) 363.
- Wagenbreth, H. (Dublettaufspaltung von Alkalitermenen) 448.
- Wagner, Gustav (Folgetest für Abnahmeprüfung) 364.
- Wait, James R. (Fields of a line source of current) 432.
- Walcher Casotti, Maria (I. Barozzi da Vignola) 2.
- Waldmann, Ludwig (Quantenmechanik des starren Elektrons) 205.
- Walker, A. G. (Fibering of Riemannian manifolds) 129.
- L. R. s. J. R. Pierce 192.
- R. (Cartesian geometry) 376.
- Walker jr., K. s. L. Trilling 178.
- Wall, G. E. (Galois group) 11.
- H. S. (Continued fractions) 44.
- Wallace, Andrew H. (Capelli operators) 249; (Young tableaux) 249.
- P. R. (Fluctuating echo. II.) 432.
- Walmsley, Charles (Null trigonometric series) 319.
- Walsh, John E. (Density function values) 109.
- Wang, Hao (Predicates) 5; (Number theory and set theory) 246.
- Shih-Chiang (Propositional calculus) 5.
- Wangness, Roald K. (Sublattice effects) 454.
- — — and F. Bloch (Nuclear induction) 223.
- Wansink, Joh. H. (Quadratische Gleichungen) 352.
- Washizu, K. (Boundary value problems in elasticity) 410.
- Wasow, Wolfgang (Differential equation of hydrodynamic stability) 66.
- Wataghin, G. (Nonlocal field theory) 211.
- Watanabe, Hideaki (Uniformisation des ensembles) 41.
- Watson, G. L. (Integers n relatively prime to $[a n]$) 32; (Minkowski's conjectures) 36.
- K. M. s. K. A. Brueckner 213, 215.
- — — s. N. C. Francis 216.
- Waugh, Dan F. and Frederick V. Waugh (Probabilities in bridge) 102.
- Frederic V. s. Dan F. Waugh 102.
- Ważewski, T. s. J. Szarski 75.
- Weber, Constantin (Pyramide mit Spitzenlast) 411.
- G. P. (Meson-Nukleon-Streuung) 439.
- Heinrich K. (Regulierungen) 195.
- Max (Kombinationsseismographen) 240.
- Robert s. Werner Ruppel 180.
- Wegner, U. (Matrizentheorie) 94; (Ebene Elastizitätstheorie) 159.
- Wei, Yung-Chio (Attenuation of sound) 168.
- Weibull, Martin (t - and F -statistics) 359.
- Weinberg, Louis (Darlington problem) 193.
- Weinberger, H. F. (Torsional rigidity) 412.
- Weirich, H. (Schwingungsvorgang im Differentialwasserschloß) 424.
- Weiss, Lionel (Higher order complete class theorem) 264.
- — s. J. Laderman 364.
- Weissinger, Johannes (Differenzierungsprozeß für Abbildungen) 43.
- Weitz, Mortimer s. Joseph B. Keller 196.
- Weizel, W. (Ableitung der Quantentheorie aus klassischem Modell. I. II.) 204.
- Welby, B. G. (Computer) 100.
- Weneser, J., R. Bersohn and N. M. Kroll (Corrections to atomic energy levels) 213.
- Wentzel, G. (Recoil corrections) 215; (Many-nucleon forces) 443.
- Wenzl, F. (Nullstellendichte) 50.
- Werenskiöld, P. s. H. Olsen 208.
- Wergeland, H. s. H. Olsen 208.
- Werle, J. (Meson field) 191; (Mutual nucleon-nucleon interaction) 442.
- Wertheim, D. G. s. G. G. Lorentz 90.
- White, W. D. (Nonlinear filters) 194.
- Whitehead, J. H. C. s. E. H. Spanier 140.
- Whitham, G. B. (Weak spherical shocks in stars) 181.
- Whitlock jr., W. P. (Pythagorean triangles) 7.
- Whitney, Anne s. I. J. Schoenberg 336.
- Wielandt, H. W. s. A. J. Hoffman 9.
- Wijngaarden, A. van (Coefficients of invariant $J(\tau)$) 318.
- Wilder, R. L. (Mathematical concepts) 241.
- Wildermuth, K. s. P. Urban 206.
- Wilhelm, Johannes (Sondentheorie) 226.
- Wilkes, M. V. and J. B. Stringer (Micro-programming electronic digital computer) 100.
- Williams, E. J. (Test of significance) 369.
- Winogradski, Judith (Particules de spin $1/2$) 436.
- Winther, A. s. G. Alaga 439.
- Wintner, Aurel (Logarithmic potential) 383.
- — s. Philip Hartman 65, 71, 77, 123, 128.
- Witt, Ernst s. Pascual Jordan 21.
- Witten, L. s. T. H. Berlin 428.
- Witting, Hermann (Differenzverfahren von Görtler) 419.
- Wittrick, W. H. (Stability of bimetallic disk. I.) 411.
- — — D. M. Myers and W. R. Blunden (Stability of bimetallic disk. II.) 411.
- Wohlfarth, E. P. (Energy band structure) 453.
- Woinowsky-Krieger, S. (Biegung von Platten) 160.
- Wolf, James s. E. Chamberlain 251.
- Paul (Galoissche Algebra. II.) 27.
- Wolfe, James s. Eliot Chamberlain 24.
- Wolff, Charles s. L. V. Spencer 222.
- Wolfowitz, J. (Method of maximum likelihood) 370; (Minimum distance method) 370.
- — s. A. Dvoretzky 366.
- Workman, D. R. s. W. A. Hepner 208.
- Woronetz, Konstantin (Écoulement par les orifices) 419.
- Worsley, Beatrice H. (Correction terms to values of gravity) 240.

- Wouk, Arthur (Difference equations) 72.
 Wright, E. M. (Large primes) 34.
 Wu, Wen-tsün (Squares in Grassmann manifolds) 141.
- Y**amada, Masami (Beta-decay nuclear matrix elements) 439; (β -spectrum of RaE) 440; (Finite nuclear size effect) 440.
 Yamamoto, Koichi (Three-line Latin rectangles) 247.
 Yamamuro, Sadayuki (Exponents of linear spaces) 339.
 Yanagawa, Sadaaki (Vibration in crystal) 229.
 Yano, Kentaro (Killing vector fields) 131; (Riemannian spaces) 393.
 — — and S. Bochner (Curvature and Betti numbers) 394.
 — — et Isamu Mogi (Variétés pseudokähleriennes) 396.
 Yates, Frank (Sampling methods) 107.
 Yen, Chih-Ta (Connexion projective normale) 397.
 Yntema, L. (Discrete equivalence) 374.
- Yoneda, Keizo (Neyman's allotation) 361.
 — Nobuo (Mappings of complexes) 139.
 Yoshida, Shiro (Deuteron stripping reaction) 445.
 Yoshihara, Hideo s. Gottfried Guderley 176.
 Yosida, Kei (Antiferromagnetism) 454.
 Young, D. M. s. M. L. Junco 51.
 — F. H. (NOTS REAC.) 100.
 — L. C. (Compactness and closure of surfaces) 295.
 Yûjôbô, Zuiman (Pseudoregular functions) 316; (Quasi-conformal mapping) 316.
- Z**acher, Giovanni (Gruppi risolubili) 258.
 Zadeh, L. A. (Optimum nonlinear filters) 194; (Nonlinear multipoles) 194.
 Zaldastani, Othar (Isentropic fluid flow) 417.
 Zappa, Guido (Teoria dei reticoli) 20.
 Zaremba, S. K. s. J. Kestin 66.
 Zaring, W. M. s. N. G. de Bruijn 275.
 Zartarian, G. and H. M. Voss ($F_2(M, \bar{\omega})$) 184.
- Zassenhaus, Hans (Trace functions) 262.
 Zelinsky, D. s. R. D. Lowe 267.
 Zeller, Karl (FK-Räume. I.) 86.
 Ziegler, Hans (Linear elastic stability) 163.
 Ziel, A. van der (Production of secondary electrons) 232.
 Zierp, J. (Leerwellenströmung) 176.
 Zilsel, P. R. s. B. T. Darling 208.
 Ziman, J. M. (Quantum hydrodynamics) 227; (Bose-Einstein condensation) 450.
 Zimmer, Eva s. H. Hönl 197.
 Zin, Giovanni (Geometria infinitesimale) 134; (Funzioni analitiche) 309; (Problema piano di Dirichlet) 329, 330.
 Zinner, Ernst (Sternnglaube) 242.
 Zlateff, Ivan (Propagation de la chaleur) 429.
 Žmud', E. M. (Transformationen der quadratischen Formen) 283.
 Zorat, Alfredo (Decimazioni zoratiane) 247.
 Zwinggi, Ernst (Prämien in Todesfallversicherung) 111; (Effektivzinsfuß) 112.



